

Durée : 3 H 00

14 décembre 2011

Examen de Mathématiques

Documents et calculatrices interdits

Toutes les réponses doivent être justifiées par la citation de théorèmes du cours ou par des calculs détaillés.

Exercice 1 On considère le système paramétré (S_m) suivant où m est un paramètre réel :

$$(S_m) \begin{cases} 3x + 2y + z = 3m \\ mx - y + 2z = 2 \\ 3x + 7y + (m-5)z = 0 \end{cases}$$

1. (a) Préciser la matrice A_m associée au système (S_m) .
(b) Calculer $\det(A_m)$ en fonction de m et montrer que

$$\det(A_m) = -2(m^2 - 7m + 6).$$

- (c) En déduire que (S_m) admet une solution unique sauf pour 2 valeurs de m que l'on précisera.
2. Résoudre le système (S_m) dans le cas où $m = 1$ en utilisant la méthode du pivot de Gauss.
3. Résoudre le système pour $m = 3$.

Exercice 2 Soit f la fonction numérique de deux variables réelles définie par

$$f(x, y) = x^2 - x + 2xy^2 - xy.$$

1. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de la fonction f .
2. Démontrer que f possède trois points critiques.
3. Préciser la nature de ces points à l'aide des conditions du second ordre.

Exercice 3

Partie A :

Chaque jour, une entreprise fabrique x centaines d'objets (x compris entre 0 et 12). Le coût total de la fabrication journalière de ces objets, en euros, est donné par : $C_T(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 126$. On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de C_T dans un repère orthogonal d'unités : 1cm pour une centaine d'objets et 1cm pour 100 €.

1. Quel est le montant des coûts fixes ?
2. Calculer la dérivée C'_T de C_T . Que représente cette dérivée en économie ?
3. Étudier le signe de $C'_T(x)$ puis dresser le tableau de variation de C_T sur $[0 ; 12]$.
4. Calculer C''_T , puis étudier son signe. Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} ?
5. Compléter le tableau de valeurs donné en ANNEXE.
6. Construire la courbe \mathcal{C} dans le repère donné en ANNEXE.

Partie B :

On suppose que toute la production est vendue au prix de 50 € la centaine d'objets. La fonction recette est donc donnée par : $R(x) = 50x$.

1. Tracer sur le graphique précédent la courbe \mathcal{R} représentative de la recette.
2. Déterminer graphiquement le nombre minimum et le nombre maximum d'objets à fabriquer pour que l'entreprise fasse des bénéfices. Faire apparaître sur le graphique les tracés nécessaires.

Partie C :

1. Vérifier que le bénéfice est donné par la formule : $B(x) = -x^3 + 12x^2 - 126$.
2. Calculer la dérivée B' de B .
3. Étudier le signe de $B'(x)$ sur $[0 ; 12]$, puis dresser le tableau de variation de B .
4. En déduire le nombre d'objets à fabriquer chaque jour pour avoir un bénéfice maximum.

Exercice 4

1. Le prix du pétrole « a flambé » en 2008, voici un tableau donnant le prix, en dollar, du baril de pétrole au cours des 5 premiers mois de l'année.

mois	janvier	février	mars	avril	mai
prix en dollar	91,99	95,05	103,78	109,07	123,15

Source DIREM

Les résultats seront donnés à 10^{-1} près.

- a) Calculer les taux d'évolution mensuel et compléter le tableau, donné en ANNEXE.
- b) Calculer le taux d'évolution global entre janvier et mai 2008.
- c) En déduire le taux moyen d'évolution sur la même période.
- d) Si l'on suppose que le taux d'évolution restera égal à 7,6 % par mois à partir du mois de mai, quel sera le prix d'un baril de pétrole en décembre 2008 ?

2. Le tableau ci-dessous donne le prix en dollar du baril de pétrole au cours des mois de mai 1992, 1996, 2000, 2004 et 2008.

année	1992	1996	2000	2004	2008
prix en dollar	19,94	19,08	27,74	37,73	123,15

Source DIREM

Les résultats seront arrondis à l'entier.

- a) En prenant pour base 100, l'année 1992, calculer les indices du prix du baril de pétrole et compléter le tableau donné en ANNEXE.
- b) Un journaliste écrit « On peut estimer, qu'entre mai 1992 et mai 2008, le prix du baril de pétrole a été multiplié par 6 ». A-t-il raison ? Justifier la réponse.
- 3)** Le pouvoir d'achat d'un consommateur est le quotient de son salaire mensuel par le prix d'un objet de référence. Il peut être assimilé à une quantité de ce produit.
- a) Pendant l'année 1999, ce consommateur a consacré un budget de 2 550 F pour l'achat de 30 CD. Au cours de l'année 2000, le prix moyen d'un CD a augmenté de 5% et le budget de ce consommateur n'a pas augmenté. De combien le pouvoir d'achat en CD a-t-il baissé ?
- b) Pendant l'année 2001, il a décidé d'augmenter son budget de CD de 300 F, et d'acheter des CD dont le prix moyen est celui de l'année 2000. Le pouvoir d'achat (en quantité de CD) a-t-il augmenté ?
- c) Durant l'année 2002, il décide d'augmenter son budget de CD de 10%, par rapport à 2001, le prix de ces CD ayant augmenté de 8%. Quelle est la variation de son pouvoir d'achat (en CD) ?

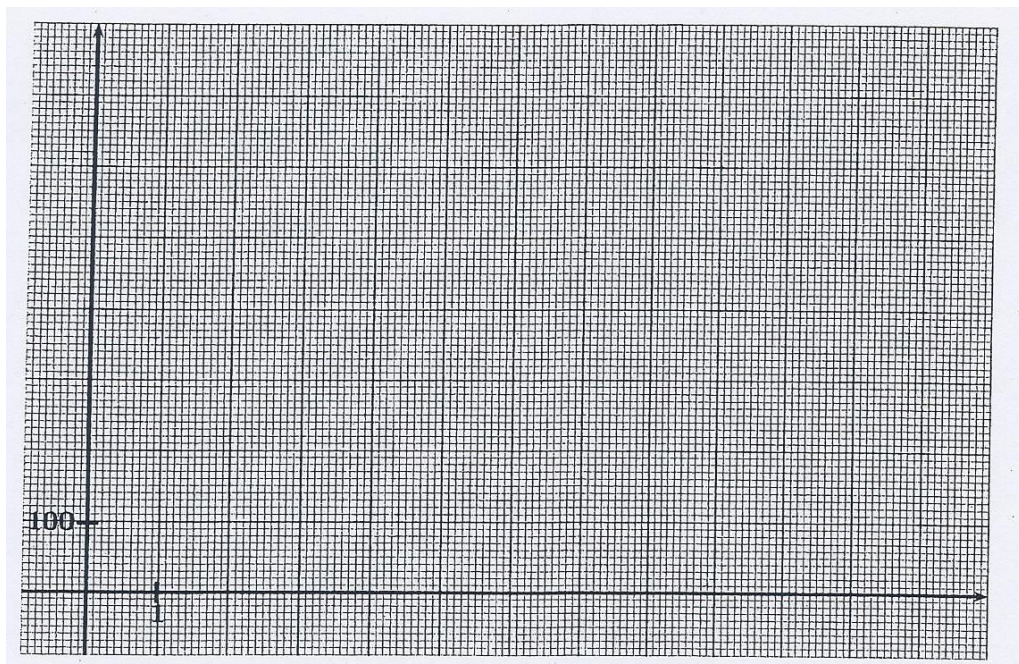
Annexe : A rendre avec la copie

N° étudiant :

Exercice 3 Partie A question 5 : Tableau de valeurs

x	0	2	4	6	8	10	12
$C_T(x)$			198		270		726

Exercice 3 Partie A question 6 :



Exercice 4 Question 1.a)

mois	janvier	février	mars	avril	mai
évolution en pourcentage	XXXX				

Exercice 4 Question 2.a)

année	1992	1996	2000	2004	2008
indice	100				