ISCID-CO - Prépa 1 **ULCO - Dunkerque**

MATHÉMATIQUES Décembre 2012 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 1

Durée de l'épreuve : 3h00 Documents interdits.

(Les trois exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 12pts

Partie A

1. 0,5pt $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{120}{e^x+15} \sim \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

   0,5pt On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote de g en $+\infty$.

2. 1pt $g'(x) = \left(\frac{120}{e^x+15}\right)' = 120 \times \frac{-(e^x+15)'}{(e^x+15)^2} = -\frac{120e^x}{(e^x+15)^2}.$

3. 0,5pt Le numérateur de $g'(x)$ est toujours négatif ($e^x > 0$ donc $-120e^x < 0$) tandis que le signe du dénominateur est toujours positif (carré). Par conséquent, $g'(x) \leq 0$, $\forall x \in [0; +\infty[$ donc g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

   1pt On peut dresser le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
signe de $g'(x)$	$-$	
variations de g	$\frac{120}{16}$ ↘	0

4. 1pt On a les valeurs :

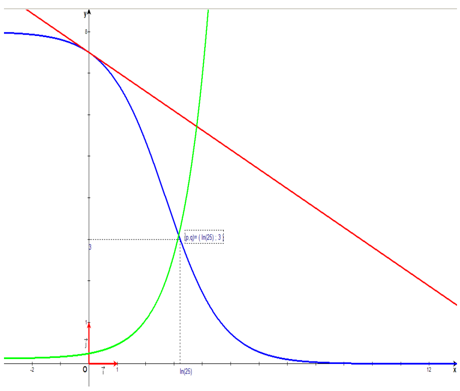
x	0	0,5	1	2	3	3,5	4	5	6	7
$g(x)$	7,5	7,2	6,8	5,4	3,4	2,5	1,7	0,7	0,3	0,1

5. 0,5pt Le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0 est donné par $g'(0) = -\frac{120e^0}{(e^0+15)^2} = -\frac{120}{16^2} = -\frac{120}{256} = -0,47$ à 10^{-2} près par excès.

6. 0,5pt L'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0 est :

$$T : y = g(0) + g'(0)(x-0) = \frac{120}{16} - \frac{120}{256}x = \frac{120}{256}(16-x).$$

   1pt On a le graphique suivant :

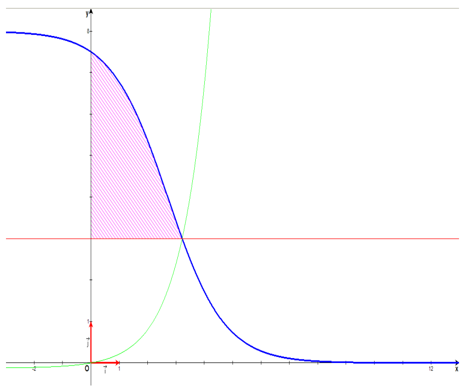


7. (a) 0,5pt Voir graphique précédent.

(b) $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ Remplaçons x par $q=\ln(25)$ dans $f(x)$ et $g(x)$: on a d'une part $f(x)=f(\ln(25))=\dfrac{e^{\ln(25)}-1}{8}=\dfrac{24}{8}=3$ et d'autre part $g(x)=g(\ln(25))=\dfrac{120}{e^{\ln(25)}+15}=\dfrac{120}{40}=3$.
$\boxed{0{,}5\text{pt}}$ On a bien $f(q)=g(q)=p=3$ pour $q=\ln(25)$.

Partie B

1. $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ Le domaine $\mathcal{D}$ est représenté par la surface hachurée du graphique ci-dessous :



2. $\boxed{1\text{pt}}$ G est une primitive de g si et seulement si $G'=g$. Comme $G'(x)=(8(x-\ln(e^x+15))'=8\left(1-\dfrac{e^x}{e^x+15}\right)=8\left(\dfrac{15}{e^x+15}\right)=\dfrac{120}{e^x+15}=g(x)$, on a bien démontré que G était une primitive de g sur $[0;+\infty[$.

3. (a) $\boxed{1\text{pt}}$ Comme $\displaystyle\int_0^q g(x)dx$ représente l'aire comprise entre la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=q=\ln(25)$, et que pq représente l'aire du carré délimité par la droite d'équation $y=3$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=q=\ln(25)$, $R(q)=\displaystyle\int_0^q g(x)dx-pq$ représente bien, en unités d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

   (b) $\boxed{1\text{pt}}$ $R(q)=\displaystyle\int_0^q g(x)dx-pq=\int_0^3\frac{120}{e^x+15}dx-3\ln(25)\overset{2.}{=}[8(x-\ln(e^x+15))]_0^3-3\ln(25)=\big(8(3-\ln(e^3+15))-8(0-\ln(e^0+15))\big)-3\ln(25)=24-8\ln(e^3+15)+8\ln(16)-3\ln(25)$ $(=8,062$ à 10^{-3} près par excès).

   (c) $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ L'unité d'aire est $1\times1000=1000$€ (l'unité du surplus du consommateur) donc une valeur approchée de R à l'euro près est $8,062\times1000=8062$€.

Exercice 2 $\boxed{4{,}5\text{pts}}$

1. $\boxed{1\text{pt}}$ On a $\dfrac{725,76}{1,12}=648$ ($1,12$ représente la baisse de 12%) et $\dfrac{648}{1,08}=600$ ($1,08$ représente la baisse de 8%) donc le prix initial de ce produit est de 600€.

2. $\boxed{1\text{pt}}$
   - Proposition 1 : $0,90\times1,196=1,076$ ($0,90$ représente la baisse de 10%, $1,196$ représente la TVA),
   - Proposition 2 : $1,196\times0,90=1,076$.

   Les deux propositions sont donc identiques.

3. $\boxed{1\text{pt}}$ $\dfrac{30}{100}\times\dfrac{20}{100}=\dfrac{600}{10000}=6\%$. Le pourcentage des élèves de 1ère ES par rapport à l'effectif total du lycée est de 6%.

4. (a) $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ Il sera multiplié par $1,01$ chaque mois.

   (b) $\boxed{1\text{pt}}$ $12000\times1,12682503=13521,90036$.

   Le montant du capital au 1er Janvier 2001 sera de $13521,90$€.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ $\boxed{\text{4,5pts}}$

1. - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $I_{P,H} = \dfrac{100}{80} \times 100 = 125$,
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $I_{P,R} = \dfrac{70}{50} \times 100 = 140$,
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $I_{P,C} = \dfrac{30}{10} \times 100 = 300$.
2. $\boxed{\text{1pt}}$ Les dépenses de l'hôtel en 2006 sont de $120 \times 80 + 200 \times 50 + 40 \times 10 = 20000$€.
3. - $\boxed{\text{1pt}}$ $I_{L,P} = \dfrac{100 \times 120 + 70 \times 200 + 30 \times 40}{80 \times 120 + 50 \times 200 + 10 \times 40} \times 100 = 136$,
   - $\boxed{\text{1pt}}$ $I_{L,P} = \dfrac{100 \times 90 + 70 \times 150 + 30 \times 50}{80 \times 90 + 50 \times 150 + 10 \times 50} \times 100 = 138,16$ à 10^{-2} près par excès.