Prépa 1 - ISCID-CO **Dunkerque - ULCO**

Mathématiques Janvier 2014 - Contrôle Terminal, Session 1

Durée de l'épreuve : 3h00 Aucun document autorisé. Calculatrice autorisée

---

Exercice 1 *Correction* : $\boxed{\text{5pts}}$

- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{-x}$.

1. $\boxed{\text{0,5pt}}$ On a $f(\ln 2) = (\ln 2)e^{-\ln 2} = (\ln 2)e^{\ln(2^{-1})} = (\ln 2)e^{(\ln \frac{1}{2})} = (\ln 2)\frac{1}{2}$ (réponse (d)).
2. $\boxed{\text{0,5pt}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$ (réponse (c)).
3. $\boxed{\text{0,5pt}}$ L'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 est : $y = f(0) + f'(0)(x-0) = 0 + 1(x-0) = x$ (réponse (c)).
4. $\boxed{\text{0,5pt}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = (1-x)'e^{-x} + (1-x)(e^{-x})' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$. Par conséquent, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$. On en déduit que f est convexe si et seulement si $x > 2$ (et donc concave si et seulement si $x < 2$). La seule réponse qui convienne est la réponse (a).
5. $\boxed{\text{0,5pt}}$ On a $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xe^{-x}dx \overset{IPP}{=} [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx = -\frac{1}{e} + [-e^{-x}]_0^1 = -\frac{1}{e} + \frac{1}{e} + 1 = 1$ (réponse (d)).
6. $\boxed{\text{0,5pt}}$ $f(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 2x - 3x + 6 = x^2 - 5x + 6$ (réponse (c)).
7. $\boxed{\text{0,5pt}}$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 3$ (réponse (b)).
8. $\boxed{\text{0,5pt}}$ $f(1) = (1-2)(1-3) = (-1)(-2) = 2$ (réponse (b)).
9. $\boxed{\text{0,5pt}}$ $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x < 2$ ou $x > 3$ (réponse (c))
10. $\boxed{\text{0,5pt}}$ On remarque tout dabord que $\forall x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $-x \in \mathcal{D}_f$. Ensuite, $f(-x) = (-x)^2 - 5(-x) + 6 = x^2 + 5x + 6$ (réponse (c)).

Exercice 2 *Correction* : $\boxed{\text{7,5pts}}$

1. $\boxed{\text{1,5pt}}$ Le coefficient multiplicateur global entre 2008 et 2011 est égal à $\alpha = \dfrac{63182}{81295} = 0,7772$ à 10^{-4} près par excès. Par conséquent, le coefficient multiplicateur moyen entre 2008 et 2011 est égal à $\overline{\alpha} = \sqrt[3]{0,772} = 0,9194$. Ainsi le taux d'évolution annuel moyen entre 2008 et 2011 est égal à $\overline{t} = 100(\overline{\alpha} - 1) = 100(0,9194 - 1) = -8,06\%$ à 10^{-2} près.
2. $\boxed{\text{2pts}}$ Entrée : $P = 50000$
Initialisations : $0 \to N$, $63182 \to U$
Traitement : $(U = 63182) > (P = 50000)$, Pas 1 : $0 + 1 = 1 \to N$, $0,92 \times 63182 = 58127,44 \to U$
$(U = 58127,44) > (P = 50000)$, Pas 2 : $1 + 1 = 2 \to N$, $0,92 \times 58127,44 = 53477,24 \to U$
$(U = 53477,24) > (P = 50000)$, Pas 3 : $2 + 1 = 3 \to N$, $0,92 \times 53477,24 = 49199,07 \to U$
$(U = 49199,07) < (P = 50000)$, Fin du Tant que, $3 + 2011 = 2014 \to N$
Sortie : $N = 2014$.

   Dans le contexte de la production de perles, on peut affirmer que le montant réalisé à l'exportation, égal à 63182 milliers d'euros en 2011 et diminuant annuellement et en moyenne de 8%, sera inférieur à 50000 milliers d'euros en 2014.

3. (a) $\boxed{\text{1pt}}$ On montre aisément que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(1 - \dfrac{8}{100}\right) u_{n-1} = 0,92 u_{n-1}$ avec $u_0 = 63182$. Cela prouve que (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,92$.

   (b) $\boxed{\text{1pt}}$ On peut montrer par récurence que $u_n = 0,92^n u_0 = 63182 \times 0,92^n$.

   (c) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Le montant prévu pour l'exportation des produits perliers de Polynésie Française en 2016 est égal à $u_5 = 63182 \times 0,92^5 = 41642$ au millier d'euros près.

4. $\boxed{\text{1,5pt}}$ On rappelle que la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite gométrique $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de raison $q \neq 1$ vérifie : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n = u_0(1+q+\cdots q^n) = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$. Dans notre cas, le montant cumulé des produits perliers exportés que l'on peut prévoir avec ce modèle à partir de 2011 (comprise) jusqu'à 2020 (comprise) est égal à $63182 \times \dfrac{1-0,92^{10}}{1-0,92} = 446706$ milliers d'euros.

Exercice 3 *Correction* : $\boxed{\text{7,5pts}}$

1. (a) $\boxed{\text{1pt}}$ Déterminons les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$, d'équation $y = (x+2)e^{-x}$, avec les axes du repère :
   - Avec l'axe des abscisses : $y = 0 \Leftrightarrow (x+2)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (e^{-x} ne s'annule pas). La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au point $(2; 0)$.
   - Avec l'axe des ordonnées : $y = (0+2)e^{-0} = 2$. La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point $(0; 2)$.

   (b) $\boxed{\text{1pt}}$ On a
   - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+2)e^{-x} = -\infty$,
   - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+2)e^{-x} = 0$.

   On en déduit que $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$.

   (c) $\boxed{\text{1,5pt}}$ f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f'(x) = (x+2)'e^{-x} + (x+2)(e^{-x})' = e^{-x} - (x+2)e^{-x} = -(x+1)e^{-x}.$$

   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f			e		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0

2. $\boxed{\text{1,5pt}}$

   (a) Initialisation : $0 \to S$

   Traitement : $k = 0$; $0 + \dfrac{1}{4}f(0) = 0 + \dfrac{1}{4}((0+2)e^{-0}) = \dfrac{1}{2} \to S$

   $k = 1$; $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\left(\left(\dfrac{1}{4}+2\right)e^{-\frac{1}{4}}\right) = 0,938 \to S$

   $k = 2$; $0,938 + \dfrac{1}{4}f\left(\dfrac{2}{4}\right) = 0,938 + \dfrac{1}{4}\left(\left(\dfrac{2}{4}+2\right)e^{-\frac{2}{4}}\right) = 1,317 \to S$

   $k = 3$; $1,317 + \dfrac{1}{4}f\left(\dfrac{3}{4}\right) = 1,317 + \dfrac{1}{4}\left(\left(\dfrac{3}{4}+2\right)e^{-\frac{3}{4}}\right) = 1,642 \to S$

   Fin Pour, $S = 1,642$.

(b) $\boxed{0{,}5\text{pt}}$

Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k (entier) variant de 0 à $N-1$
	Affecter à S la valeur $S + \dfrac{1}{N} f\left(\dfrac{k}{N}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

(c) $\boxed{0{,}5\text{pt}}$

Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k (entier) variant de 1 à N
	Affecter à S la valeur $S + \dfrac{1}{N} f\left(\dfrac{k}{N}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

3. (a) $\boxed{1\text{pt}}$ $\mathcal{A} \overset{f(x)\geq 0}{=} \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = [g(x)]_0^1 = [(-x-3)e^{-x}]_0^1 = (-4)e^{-1} - (-3)e^0 = 3 - \frac{4}{e} \simeq 1{,}528$.

   (b) $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ $|\mathcal{A} - S| = |1{,}528 - 1{,}642| = 0{,}114$.

Exercice 4 *Correction* : $\boxed{5\text{pts}}$

1. $\boxed{1\text{pt}}$ La surface recouverte de matériau est définie par $S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$. La contrainte sur le volume que doit considérer le constructeur est $V(x,y,z) = xyz = 32$.

2. $\boxed{1\text{pt}}$ La contrainte peut s'écrire : $z = \dfrac{32}{xy}$ (x, y, z étant supposés non nuls d'après le contexte de l'exercice). Par conséquent,

$$S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz = xy + 2x\left(\frac{32}{xy}\right) + 2y\left(\frac{32}{xy}\right) = xy + 64\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right).$$

3. $\boxed{3\text{pts}}$ Déterminons les points critiques de S à l'aide des conditions nécessaires du premier ordre. On résout :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial x}(x,y) = y - \frac{64}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial y}(x,y) = x - \frac{64}{y^2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{64}{x^2} \\ x = \frac{64}{\frac{64^2}{x^4}} = \frac{x^4}{64} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{64}{x^2} \\ \frac{x}{64}(x^3 - 4^3) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{64}{x^2} \\ \frac{1}{64}\underbrace{x}_{\neq 0}(x-4)\underbrace{(x^2+4x+4^2)}_{\neq 0} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = \frac{64}{4^2} = 4 \end{array}\right.$$

La fonction S admet donc un point critique $(4,4)$. Montrons que ce point représente un minimum à l'aide des conditions du second ordre. On a

$$r = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x,y) = \frac{128}{x^3},\ s = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(x,y) = 1,\ \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}(x,y) = \frac{128}{y^3}.$$

et donc $\Delta'(x,y) = s^2 - rt = 1 - \dfrac{16384}{x^3y^3}$. On montre ainsi aisément que $\Delta'(4,4) = 1 - \frac{16384}{4096} = -3 < 0$ et $r(4,4) = \frac{128}{4^3} = 2 > 0$, ce qui prouve que S admet un minimum local en $(4,4)$. Conclusion, les dimensions du bassin qui permettent de minimiser la surface de matériau étanche, soumis la condition volumique $V = 32\text{m}^3$, sont $x = 4$, $y = 4$ et $z = 2$. La surface de matériau est alors égale à $S(4,4,2) = 48\text{m}^2$.