Prépa 1 - ISCID-CO **Dunkerque - ULCO**

Mathématiques Janvier 2014 - Contrôle Terminal, Session 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Aucun document autorisé. Calculatrice autorisée

---

Exercice 1

- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{-x}$.

1. L'image $f(\ln 2)$ de $\ln 2$ par f est égale à :
   (a) $\ln 2$
   (b) $-2\ln 2$
   (c) $2\ln 2$
   (d) $\frac{1}{2}\ln 2$
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Alors, pour tout nombre réel, on a :
   (a) $f'(x) = e^{-x}$
   (b) $f'(x) = -e^{-x}$
   (c) $f'(x) = (1-x)e^{-x}$
   (d) $f'(x) = (1+x)e^{-x}$
3. L'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 est :
   (a) $y = 2x$
   (b) $x - 1$
   (c) $y = x$
   (d) $y = 2x - 1$
4. La fonction f est :
   (a) concave sur $[0; 1]$
   (b) concave sur $[0; +\infty[$
   (c) convexe sur $[0; +\infty[$
   (d) convexe sur $[0; 1]$
5. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ est égale à :
   (a) $e - 5$
   (b) 5
   (c) $\frac{e-2}{2}$
   (d) 1

- On considère la fonction f définie par $f(x) = (x-2)(x-3)$.

6. Si on développe $f(x)$, on obtient :
   (a) $x^2 - x + 6$,
   (b) $x^2 - x - 6$,
   (c) $x^2 - 5x + 6$.
7. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont :
   (a) -2 et -3,
   (b) 2 et 3,
   (c) x et 0.

8. L'image de 1 par f est :
   (a) 1,
   (b) 2,
   (c) 3.
9. Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ sont :
   (a) $[-3;-2]$,
   (b) $[2;3]$,
   (c) $]-\infty;2] \cup [3;+\infty[$.
10. La fonction f est :
   (a) paire,
   (b) impaire,
   (c) ni paire ni impaire.

Exercice 2

La production des perles de culture de Tahiti est une activité économique importante pour la Polynésie Française. Les montants réalisés à l'exportation des produits perliers de 2008 à 2011 sont donnés dans le tableau suivant, en milliers d'euros :

Années	2008	2009	2010	2011
Valeurs brutes des produits perliers (en milliers d'euros)	81295	66052	64690	63182

Source : ISPF (Institut de Statistiques de Polynésie Française).

1. Montrer que le taux d'évolution annuel moyen des montants à l'exportation des produits perliers de Polynésie entre 2008 et 2011 est $-8,06\%$ arrondi au centième.
   On admet pour la suite de l'exercice, que la production continuera à baisser de 8% par an à partir de 2011.
2. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	Saisir un nombre positif P
Initialisation :	Affecter la valeur 0 à la variable N
	Affecter la valeur 63182 à U
Traitement :	Tant que $U > P$
	Affecter la valeur $N+1$ à N
	Affecter la valeur $0,92 \times U$ à U
	Fin de Tant que
	Affecter la valeur $N + 2011$ à N
Sortie :	Afficher N

   Si on saisit $P = 50000$ en entrée, qu'obtient-on en sortie par cet algorithme ? Interpréter ce résultat dans le contexte de la production de perles.
3. Pour prévoir les montants réalisés à l'exportation des perles de Tahiti, on modélise la situation par une suite (u_n). On note u_0 le montant en 2011, en milliers d'euros, et u_n le montant en $2011 + n$, en milliers d'euros. On a donc $u_0 = 63182$ et on suppose que la valeur baisse tous les ans de 8%.
   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

(b) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

(c) Avec ce modèle, quel montant peut-on prévoir pour l'exportation des produits perliers de Polynésie Française en 2016 ? On arrondira le résultat au millier d'euros près.

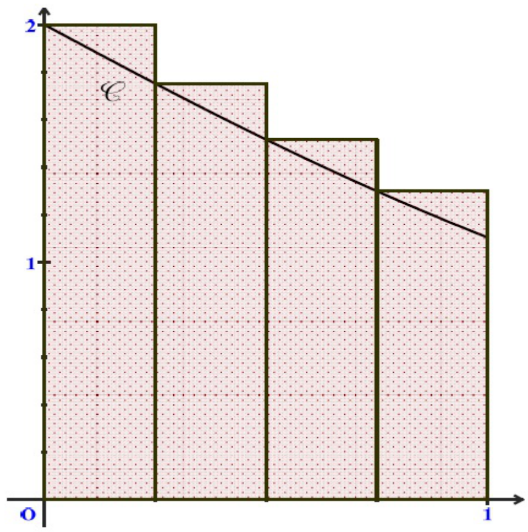
4. Calculer le montant cumulé des produits perliers exportés que l'on peut prévoir avec ce modèle à partir de 2011 (comprise) jusqu'à 2020 (comprise). On donnera une valeur approchée au millier d'euros près.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étude de la fonction f.
   (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec les axes du repère.
   (b) Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.
   (c) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0; 1]$ en quatre intervalles de même longueur :
   - sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$,
   - sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$,
   - sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$,
   - sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$,

   Cette construction est illustrée ci-après :



   L'algorithme suivant permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k (entier) variant de 0 à 3
	Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{4} f\left(\frac{k}{4}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

(b) Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0; 1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.(a). Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

(c) Écrire l'algorithme pour la méthode des rectangles à droite (il suffit de modifier une seule ligne dans l'algorithme de la question 2.(b)).

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x-3)e^{-x}$. On admet que la fonction g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (a) Calculer l'aire exacte $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.
   (b) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant $\mathcal{A}$ par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme à la question 2.(a), c'est-à-dire de l'écart entre ces deux valeurs.

Exercice 4

On veut construire un bassin ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, pouvant contenir 32m^3 d'eau. La surface du bassin est recouverte d'un matériau étanche coûteux et l'objectif est de prévoir les dimensions du bassin qui nécessite le moins de matériau possible. On appelle x sa longueur (en mètres), y sa largeur (en mètres) et z sa hauteur (en mètres).

1. Quelle est la surface recouverte de matériau ? Quelle contrainte sur le volume doit considérer le constructeur ?
2. Montrer que la fonction à minimiser (c'est-à-dire la surface du bassin en m^2) est donnée par
$$S = xy + 64\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right).$$
3. Trouver les dimensions optimales du bassin.