

MATHÉMATIQUES

Janvier 2013 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 2

Durée de l'épreuve : 3h00

Documents interdits - Calculatrice autorisée.

(Les trois exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 Le gérant d'une salle de cinéma de 300 places constate que le nombre x de spectateurs à une séance est une fonction affine du prix p du billet. Plus précisément on a : $x = 300 - 12p$.

1. Expliquer pourquoi on a obligatoirement $0 \leq p \leq 25$.
2. Sachant que les charges fixes pour chaque séance s'élèvent à 1632€, montrer que le bénéfice $b(p)$ de chaque séance est égal à $b(p) = -12p^2 + 300p - 1632$.
3. En déduire pour quelles valeurs de p la séance est rentable.
4. Déterminer le prix du billet pour que le bénéfice soit maximum. Quel est alors le nombre de spectateurs et le bénéfice réalisé ?

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (2x - 1)e^x + 3$. On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. (a) On admet le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.
Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
(b) En déduire que la courbe \mathcal{C} admet une droite asymptote dont on donnera une équation.
2. (a) Déterminer la fonction dérivée de f .
(b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
(c) Étudier sur \mathbb{R} le signe de $f'(x)$ puis en déduire le sens de variation de f sur \mathbb{R} .
(d) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} près du minimum de la fonction f .
3. (a) On note $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2 + x + \frac{3}{2}x^2\right) dx$.
Démontrer que $I = 1,1875$.
(b) On note $K = \int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 1)e^x dx$.
Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 3 - 2e^{\frac{1}{2}}$.
(c) On note $J = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$.
En utilisant la question précédente, déterminer la valeur de J .
(d) Vérifier que $J - I$ est inférieur à 2×10^{-2} .

Exercice 3 Le tableau suivant donne le montant des cotisations qu'ont eu à payer en 2011 les adhérents à une médiathèque, selon la catégorie à laquelle ils appartiennent :

Adhérents	Catégories	Cotisation
Résidents	catégorie A : scolaires	gratuit
	catégorie B : étudiants	60€
	catégorie C : autres	100€
Non résidents	catégorie D	140€

La recette totale de la médiathèque se compose :

- d'une subvention municipale.
- des cotisations des adhérents.

En 2011 :

- la subvention municipale a été de 200 000€.
- il y a eu au total 5 000 adhérents, dont 72% de résidents.
- parmi les résidents, 45% appartiennent à la catégorie A et 30% à la catégorie B.

1. Combien y a-t-il eu d'adhérents dans chaque catégorie ?

2. Quelle a été la recette totale ?

En 2012 :

- pour équilibrer le budget, la recette totale doit augmenter de 10%
- la subvention municipale est augmentée de 3%.

3. Montrer que pour équilibrer le budget, la part de la recette totale provenant des cotisations en 2012 doit être égale à 399 880€.

4. Le nombre d'adhérents augmente en 2012 de 10% dans chaque catégorie. On modifie uniquement les cotisations des catégories C et D ; la cotisation de la catégorie C passe à 105€.

Calculer, à 10€ près par excès, la cotisation minimale de la catégorie D pour que la part de la recette provenant des cotisations en 2012 soit au moins de 399 880€.

5. Calculer dans ces conditions les pourcentages d'augmentation des cotisations des catégories C et D entre 2011 et 2012.