ISCID-CO - Prépa 1 **ULCO - Dunkerque**

MATHÉMATIQUES Janvier 2013 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 2

Durée de l'épreuve : 3h00 Documents interdits - Calculatrice autorisée.

(Les trois exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ $\boxed{\text{5pts}}$

1. $\boxed{\text{0,5pt}}$ Le prix p du billet est une quantité nécessairement positive donc $p \geq 0$.
   Le nombre x de spectateurs étant lui aussi nécessairement positif, on a
   $$x \geq 0 \Leftrightarrow 300 - 12p \geq 0 \Leftrightarrow 300 \geq 12p \Leftrightarrow p \leq \frac{300}{12} = 25.$$
   Finalement, on a obligatoirement $0 \leq p \leq 25$.
2. $\boxed{\text{1pt}}$ On a par définition $b(p) = R(p) - C_T(0)$ avec $R(p) = xp$ désignant la recette et $C_T(0) = 1632$ les coûts fixes. Comme $x = 300 - 12p$, $R(p) = (300 - 12p)p = -12p^2 + 300p$. Ainsi, $b(p) = -12p^2 + 300p - 1632$.
3. $\boxed{\text{1,5pt}}$ La séance est rentable lorsque le bénéfice est positif. Comme $\Delta = (300)^2 - 4(-12)(-1632) = 11664 = 108^2 > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes qui sont $p_1 = \dfrac{-300 - \sqrt{11664}}{2(-12)} = 17$ et $p_2 = \dfrac{-300 + \sqrt{11664}}{2(-12)} = 8$. Le trinôme est donc négatif à l'extérieur des racines (signe de $a = -12 < 0$) et positif à l'intérieur. Par conséquent, la séance est rentable pour $p \in]8, 17[$.
4. $\boxed{\text{2pts}}$ Dans notre cas, déterminer le bénéfice maximum revient à déterminer p_0 tel que $b'(p_0) = 0$ et calculer $b(p_0)$. On a $\forall p \in \mathbb{R}$, $b'(p) = 0 \Leftrightarrow -24p + 300 = 0 \Leftrightarrow 24p = 300 \Leftrightarrow p = \dfrac{25}{2}$. Le bénéfice est maximum pour $p = 12,5$€ et vaut $b(12,5) = 243$€, pour un nombre de spectateurs égal à $x = 300 - 12 \times 12,5 = 150$.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ $\boxed{\text{9pts}}$

1. (a) $\boxed{\text{0,5pt}}$ On écrit $f(x) = 2xe^x - e^x + 3$. Comme on a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$, alors, par somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$.

   (b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ D'après le résultat précédent, la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = 3$ comme asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.
2. (a) $\boxed{\text{0,5pt}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x + 1)e^x$.

   (b) $\boxed{\text{1pt}}$ Une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est donnée par :
   $$(T): \ y = f(0) + f'(0)(x - 0) = (-1 + 3) + (1)(x - 0) = 2 + x.$$

   (c) $\boxed{\text{1,5pts}}$ Comme $f'(x) = (2x + 1)e^x$ et que pour tout réel x, $e^x > 0$, alors $f'(x)$ est du signe de $(2x + 1)$. Ainsi,
   $$2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \text{ et } 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$$
   et la fonction f est
   - strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$,
   - strictement croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

   (d) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Le minimum de f est alors atteint pour $x = -\dfrac{1}{2}$ et $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2e^{-\frac{1}{2}} + 3 \simeq 1,79$.

3. (a) $\boxed{\text{1pt}}$ On a $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2 + x + \frac{3}{2}x^2\right) dx = \left[2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{19}{16} = 1,1875.$

   (b) $\boxed{\text{1,5pt}}$ Pour intégrer par parties, on pose

$$\left\{\begin{array}{l} u(x) = 2x - 1 \\ v'(x) = e^x \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} u'(x) = 2 \\ v(x) = e^x \end{array}\right.$$

   d'où

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^x dx = [(2x-1)e^x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} 2e^x dx = [(2x-1)e^x]_0^{\frac{1}{2}} - 2[e^x]_0^{\frac{1}{2}} = [(2x-3)e^x]_0^{\frac{1}{2}} = -2e^{\frac{1}{2}} + 3.$$

   (c) $\boxed{\text{1,5pt}}$ On a :

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} ((2x-1)e^x + 3)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} 3e^x dx = K + 3[x]_0^{\frac{1}{2}} = K + 3 \times 0,5 = \frac{9}{2} - 2e^{\frac{1}{2}}.$$

   (d) $\boxed{\text{0,5pt}}$ On a $J - I = \frac{9}{2} - 2e^{\frac{1}{2}} - 1,1875 \simeq 0,015 < 2 \times 10^{-2}$.

Exercice 3 $\boxed{\text{6pts}}$

1. $\boxed{\text{2pts}}$ Il y a au total 5 000 adhérents.
   - Il y a 72% de résidents soit $5000 \times \frac{72}{100} = 3600$ résidents. Il y a donc $5000 - 3600 =$1 400 non résidents (catégorie D).
   - Parmi les résidents, 45% appartiennent à la catégorie A soit $3600 \times \frac{45}{100}$ =1 620 résidents de catégorie A.
   - Parmi les résidents, 30% appartiennent à la catégorie B soit $3600 \times \frac{30}{100}$ =1 080 résidents de catégorie B.
   - Il y a enfin $3600 - (1620 + 1080) = 900$ résidents de catégorie C.
2. $\boxed{\text{0,5pt}}$ La recette totale est égale à

$$200000 + (0 \times 1620 + 60 \times 1080 + 100 \times 900 + 140 \times 1400) = 200000 + 350800 = 550\ 800€.$$

3. $\boxed{\text{1pt}}$ Pour équilibrer le budget, la recette totale doit augmenter de 10% et doit donc valoir

$$550800 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 605\ 880€.$$

   La subvention municipale est augmentée de 3% donc vaut maintenant :

$$200000 \times \left(1 + \frac{3}{100}\right) = 206\ 000€.$$

   Par conséquent, la part de la recette totale provenant des cotisations en 2012 doit être égale à

$$605880 - 206000 = 399\ 880€.$$

4. $\boxed{\text{1,5pt}}$ Soit x la cotisation en euros de la catégorie D. On a le tableau suivant :

Adhérents	Catégories	Cotisation	Nombre	Recette
Résidents	catégorie A : scolaires	gratuit	$1620 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1782$	0
	catégorie B : étudiants	60€	$1080 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1188$	71 280
	catégorie C : autres	105€	$900 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 990$	103 950
Non résidents	catégorie D	x€	$1400 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1540$	$1540x$

Par conséquent, la part de la recette provenant des cotisations en 2012 est égale à $0 + 71280 + 103950 + 1540x = 1540x + 175230$. Pour que cette part soit au moins de 399 880€, il faut trouver x tel que

$$1540x + 175230 > 399880 \Leftrightarrow x > 145,87 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Finalement, la cotisation minimale de la catégorie D pour que la part de la recette provenant des cotisations en 2012 soit au moins de 399 880€ est de 150€.

5. $\boxed{\text{1pt}}$
- $t_C = \dfrac{105 - 100}{100} \times 100 = 5\%$.
- $t_D = \dfrac{150 - 140}{140} \times 100 = 7,15\%$ à 10^{-2} près par excès.