Exercice 1 *Correction* : $\boxed{\text{3pts}}$

1. $\boxed{\text{1pt}}$ Par définition, la recette est définie par $R(x) = x \times p(x)$ où $p(x)$ est le prix de vente. Par conséquent,
$$R(x) = x \times \left(-\frac{45}{8}x + 2750\right) = -\frac{45}{8}x^2 + 2750x.$$

2. $\boxed{\text{2pts}}$ La recette marginale est définie par
$$r_m(x) = R'(x) = -\frac{45}{4}x + 2750.$$
Le coût marginal est défini par
$$C_m(x) = C'(x) = \frac{1}{10}x^2 - 30x + 2500.$$
On résout ensuite l'équation $r_m(x) = C_m(x)$ c'est-à-dire :
$$\frac{1}{10}x^2 - 30x + 2500 = -\frac{45}{4}x + 2750 \Leftrightarrow \frac{1}{10}x^2 - \frac{75}{4}x - 250 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 375x - 5000 = 0.$$
On a dans ce cas $\Delta = (-375)^2 - 4(2)(-5000) = 180625 = 425^2 > 0$ ce qui implique que l'équation $2x^2 - 375x - 5000 = 0$ admet deux racines distinctes qui sont :
$$x_1 = \frac{-(-375) - 425}{2(2)} = -\frac{25}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-375) + 425}{2(2)} = 200.$$
Comme $x \in [0; 300]$, l'équation $r_m(x) = C_m(x)$ admet une unique solution $x = 200$.

Exercice 2 *Correction* : $\boxed{\text{4pts}}$

1. $\boxed{\text{1pt}}$ En utilisant les données de l'énoncé, on obtient le système (non-linéaire) suivant :
$$\begin{cases} Q(2) = K2^\alpha = 13,929 & (1) \\ Q(5) = K5^\alpha = 72,748 & (2) \end{cases}$$
$\boxed{\text{2pts}}$ En divisant (1) par (2), on obtient
$$\left(\frac{2}{5}\right)^\alpha = \frac{13,929}{72,748} \simeq 0,191 \Leftrightarrow \alpha \ln\left(\frac{2}{5}\right) \simeq \ln(0,191) \simeq -1,653 \Leftrightarrow \alpha \simeq 1,804.$$
En remplaçant α dans (1) ou (2), on obtient $K \simeq 3,989$. Finalement, la fonction d'offre recherchée s'écrit :
$$Q(p) = 3,989 \times p^{1,804}.$$

2. $\boxed{\text{1pt}}$ Si $p = 5,03$, $Q(p) = Q(5,03) \simeq 73,535$ à 10^{-3} près.

Exercice 3 *Correction* : $\boxed{\text{16pts}}$

<u>Partie A</u> : On pose $f(x) = 0,5x + 2 - 1,5\ln(x+1)$ pour $x \in [0; 30]$.

1. $\boxed{\text{2pts}}$ f est dérivable pour tout $x > -1$. Donc, $\forall x \in [0; 30]$, $f'(x) = 0,5 - \dfrac{1,5}{x+1} = \dfrac{0,5x - 1}{x+1}$.
Le dénominateur de $f'(x)$ étant toujours positif ($x \in [0; 30]$), on a le tableau de variations suivant :

x	0		2		30
signe $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations f	2	$\searrow$	$1,35$	$\nearrow$	$11,85$

2. $\boxed{\text{2pts}}$ (Δ) est parallèle à $(\mathcal{D})$ si et seulement si les deux droites ont le même coefficient directeur c'est-à-dire $0,4$. La pente de la tangente (Δ) étant égale à $f'(x_0)$, on cherche x_0 (qui sera l'abscisse du point A recherché) tel que

$$f'(x_0) = 0,4 \Leftrightarrow 0,5 - \frac{1,5}{x_0+1} = 0,4 \Leftrightarrow 0,1 = \frac{1,5}{x_0+1} \Leftrightarrow x_0 + 1 = 15 \Leftrightarrow x_0 = 14.$$

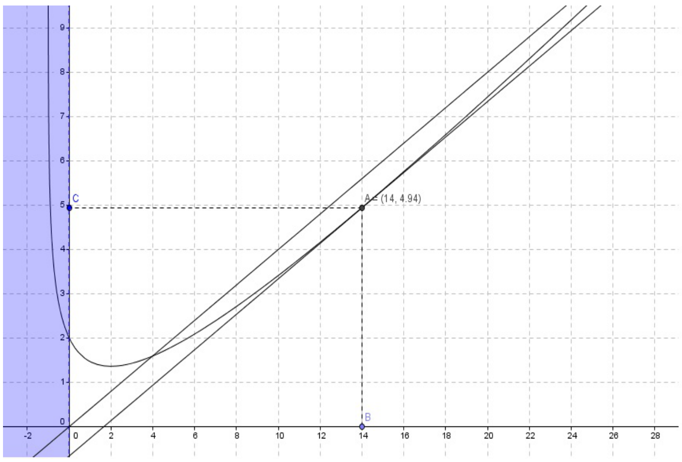
Comme $f(x_0) = f(14) = 0,5 \times 14 + 2 - 1,5\ln(14+1) = 9 - \frac{3}{2}\ln(15) \simeq 4,94$, le point A admet pour coordonnées approximatives $(14; 4,94)$.
Pour information, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A admettra pour équation :

$$(\Delta) : y = f(14) + f'(14)(x-14) = 9 - \frac{3}{2}\ln(15) + 0,4(x-14) \simeq -0,4x - 0,66.$$

3. $\boxed{\text{1pt}}$ On a les valeurs suivantes :

x	0	1	2	3	5	6	12	15	18	22	26	30
$f(x)$	2	1,46	1,35	1,42	1,81	2,08	4,15	5,34	6,58	8,30	10,06	11,85

$\boxed{\text{1pt}}$ ainsi que le graphe suivant :



4. (a) $\boxed{\text{1pt}}$ Il y a 2 points d'intersection entre $(\mathcal{C})$ et (Δ) dans $\mathbb{R}$ soit $(4; 1,5)$ et $(32; 13)$, et donc 1 seul dans $[0; 30]$ à savoir le point $(4; 1,5)$.

   (b) $\boxed{\text{1pt}}$ La fonction f admet un minimum en $x = 2$ approximativement. Son minimum vaut $f(2) \simeq 1,32$.

Partie B : On pose $g(x) = 0,4x - f(x) = -0,1x - 2 + 1,5\ln(x+1)$ pour x appartenant à $[0; 30]$.

1. (a) $\boxed{\text{2pts}}$ g est dérivable pour tout $x > -1$. Donc, $\forall x \in [0; 30]$,

$$g'(x) = -0,1 + \frac{1,5}{x+1} = \frac{-0,1x + 1,4}{x+1}.$$

Le dénominateur de $g'(x)$ étant toujours positif ($x \in [0; 30]$), on a le tableau de variations suivant :

x	0		14		30
signe $g'(x)$		$-$	0	$+$	
variations g	-2	$\nearrow$	$0,66$	$\searrow$	$0,15$

(b) $\boxed{\text{1pt}}$ Il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) qu'on rappelle : *"Soit $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue alors, $\forall u \in \mathbb{R}$, $u \in [h(a); h(b)]$, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $h(c) = u$. Si de plus h est strictement monotone, c est unique."*
Comme g est strictement croissante, et que $0 \in [g(0); g(6)] = [-2; 0,32]$, il existe un unique réel $x_0 \in [0; 6]$ tel que $g(x_0) = 0$.

(c) $\boxed{\text{1pt}}$ En utilisant la calculatrice, on trouve assez facilement que $c \in [3,9; 4]$.

(d) $\boxed{\text{1pt}}$ Pour le promoteur, cette valeur x_0 correspond au nombre de maisons qu'il faut vendre pour que le bénéfice soit positif.

2. (a) $\boxed{\text{1pt}}$ À l'aide du tableau de variations précédent, on déduit que la valeur pour laquelle g atteint son maximum est égale à $x_1 = 14$.

(b) $\boxed{\text{1pt}}$ Pour le promoteur, cette valeur x_1 correspond au nombre de maisons à construire permettant de réaliser un bénéfice maximum.

(c) $\boxed{\text{1pt}}$ Le promoteur peut compter au maximum sur un bénéfice de $g(x_1) = g(14) = -3,4 + 1,5\ln(15) \simeq 0,66$ M€.

Exercice 4 *Correction* : $\boxed{\text{8pts}}$

1. $\boxed{\text{2pts}}$ f est dérivable $\forall x \in \mathbb{R}$. On a $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$. Comme $\Delta = (2)^2 - 4(3)(-2) = 4 + 24 = 28$, l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions distinctes
$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{28}}{2(3)} = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \simeq -1,21 \text{ et } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \simeq 0,55.$$
On en déduit le tableau de variations suivant :

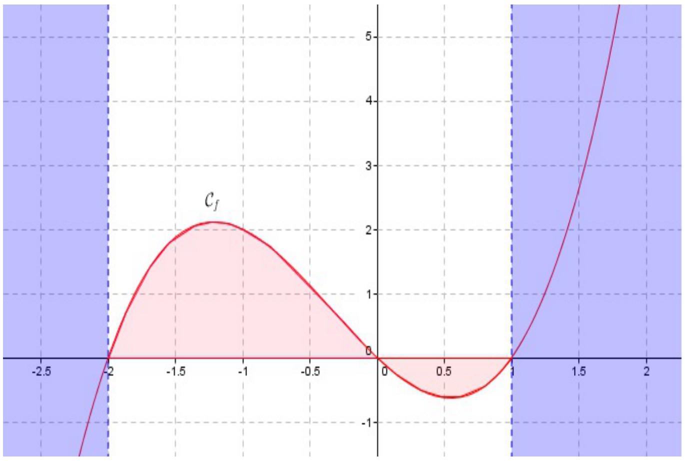
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations f	$-\infty$	$\nearrow$	$2,11$	$\searrow$	$-0,63$	$\nearrow$	$+\infty$

On a en effet
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 \left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right) = +\infty$.

2. $\boxed{\text{2pts}}$ Puisque $f(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x+2)$, étudier le signe de $f(x)$ revient à étudier le signe de x, de $x - 1$ et de $x + 2$. On obtient aisément le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
signe $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe $x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3. $\boxed{\text{1pt}}$ Comme on cherche à calculer une aire relative à l'intervalle $[-2;1]$, il est nécessaire d'étudier le signe de la fonction $f(x)$ sur cet intervalle et de calculer les intégrales sur des intervalles où le signe de $f(x)$ est constant. On peut également considérer le graphique suivant :



$\boxed{\text{1pt}}$ $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0} = -\left(\frac{1}{4}(-2)^4+\frac{1}{3}(-2)^3-(-2)^2\right) = -\left(4-\frac{8}{3}-4\right) = \frac{8}{3}$.

$\boxed{\text{1pt}}$ $\displaystyle\int_{0}^{1}(-f(x))dx = \int_{0}^{1}-(x^3+x^2-2x)dx = -\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{1} = -\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right) = -\left(\frac{3+4-12}{12}\right) = \frac{5}{12}$.

4. $\boxed{\text{1pt}}$ $\displaystyle\mathcal{A} = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1}(-f(x))dx = \frac{8}{3}+\frac{5}{12} = \frac{37}{12}\text{cm}^2$.

Exercice 5 *Correction* : $\boxed{\text{4pts}}$

1. $\boxed{\text{1,5pt}}$ En utilisant la définition de la fonction “ln”, on obtient

$$\mathcal{D}_f = \left]-\frac{3}{2};+\infty\right[,\ \mathcal{D}_g = \left]-\infty;\frac{4}{5}\right[,\ \mathcal{D}_h = \left]-\infty;\frac{2}{7}\right[.$$

2. $\boxed{\text{2,5pts}}$ En travaillant dans l'intersection des domaines de définition précédents c'est-à-dire $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_h = \left]-\frac{3}{2};\frac{2}{7}\right[$, on a

$$\ln(2x+3)+\ln(-5x+4) = \ln(-7x+2) \Leftrightarrow \ln((2x+3)(-5x+4)) = \ln(-7x+2)$$
$$\Leftrightarrow (2x+3)(-5x+4) = -7x+2 \Leftrightarrow -10x^2-15x+8x+12 = -7x+2 \Leftrightarrow 10x^2-10 = 0$$
$$\Leftrightarrow 10(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow 10(x-1)(x+1) = 0.$$

Cette dernière équation admet pour unique solution dans $\mathcal{D}$ la valeur $x=-1$.