Prépa 1 - ISCID-CO **Dunkerque - ULCO**

Mathématiques Janvier 2014 - Contrôle Terminal, Session 2

Durée de l'épreuve : 3h00 Aucun document autorisé. Calculatrice autorisée

---

Exercice 1 Pour une entreprise E dont la production peut varier de 0 à 300 unités, le coût total de fabrication de x unités est donné par la fonction :

$$C(x) = \frac{x^3}{30} - 15x^2 + 2500x.$$

On suppose que l'entreprise est en situation de monopole, ce qui a pour effet que la demande est uniquement fonction du prix. La relation liant le prix de vente p et la demande x (en unités) est :

$$p(x) = -\frac{45x}{8} + 2750$$

(autrement dit, quand x objets sont vendus, chacun l'est au prix $p(x)$).

1. Calculer la recette totale $R(x)$ pour la vente de x unités,
2. On appelle *recette marginale* l'augmentation de recette procurée par la vente d'un objet supplémentaire qu'on modélise par :

$$r_m(x) = R'(x)$$

   Pour quelle valeur de x la recette marginale est égale au coût marginal ?

Exercice 2 La fonction d'offre d'un certain bien est à élasticité constante. On sait dans ce cas que cette fonction s'écrit en fonction du prix p sous la forme $Q(p) = Kp^\alpha$ avec K et α dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer cette fonction d'offre sachant que :
   – si le prix est fixé à 2 alors l'offre vaut 13,929 ;
   – si le prix est fixé à 5 alors l'offre vaut 72,748.
2. Évaluer la valeur de l'offre si le prix est fixé à 5,03.

Exercice 3 Pour un promoteur immobilier, le coût de production, en millions d'euros, pour n maisons construites, $0 \leq n \leq 30$, est donné par

$$C(n) = 0,5n + 2 - 1,5\ln(n+1).$$

Chaque maison est vendue 400000 euros. On pose $f(x) = 0,5x + 2 - 1,5\ln(x+1)$ pour $x \in [0;30]$.

Partie A : On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f et $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y = 0,4x$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 0,5cm en abscisses et 2cm en ordonnées).

1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Montrer qu'il existe un point A de $(\mathcal{C})$ où la tangente (Δ) est parallèle à $(\mathcal{D})$. Préciser les coordonnées de A et donner une équation de (Δ).
3. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous (après l'avoir recopié sur la copie). Les calculs seront effectués à 10^{-2} près par défaut.

x	0	1	2	3	5	6	12	15	18	22	26	30
$f(x)$												

Tracer la courbe représentative de f ainsi que les droites (Δ) et $(\mathcal{D})$.

4. Répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique précédent.
   (a) Combien y a-t-il de points d'intersection entre $(\mathcal{C})$ et (Δ) ?
   (b) En quelle valeur f admet-elle un minimum ? Quel est ce minimum ?

Partie B : Le bénéfice réalisé par le promoteur immobilier, en millions d'euros est donné par :

$$B(n) = 0,4n - C(n).$$

On pose alors $g(x) = 0,4x - f(x)$ pour x appartenant à $[0;30]$.

1. (a) Étudier les variations de g sur $[0;30]$.
   (b) Montrer alors qu'il existe un réel unique x_0 dans l'intervalle $[0;6]$ tel que $g(x_0) = 0$.
   (c) Donner un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-1}.
   (d) À quoi correspond cette valeur x_0 pour le promoteur ?
2. (a) Déterminer la valeur x_1 pour laquelle g atteint son maximum.
   (b) À quoi correspond cette valeur pour le promoteur ?
   (c) Sur quel bénéfice peut-il au maximum compter ?

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$. On souhaite déterminer l'aire $\mathcal{A}$ délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les deux droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$. L'unité graphique est le centimètre.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En remarquant que $f(x) = x(x^2 + x - 2)$, étudier le signe de $f(x)$.
3. En justifiant l'intérêt des calculs, déterminer $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{0}^{1} (-f(x))dx$.
4. Calculer l'aire totale $\mathcal{A}$ en cm^2.

Exercice 5

1. Pour quelles valeurs de la variable x les fonctions f, g et h définies respectivement par

$$f(x) = \ln(2x+3)$$
$$g(x) = \ln(-5x+4)$$
$$h(x) = \ln(-7x+2)$$

   sont-elles définies ?
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\ln(2x+3) + \ln(-5x+4) = \ln(-7x+2)$$