Table des matières

Chapitre 0

Rappels sur les polynômes et fractions algébriques

0.1 Puissances

0.1.1 Puissance d'un nombre réel

- Soit n un nombre naturel supérieur à 1. On appelle puissance n-ième d'un nombre réel a le produit de n facteurs égaux à a. La notation exponentielle de cette puissance est a^n.

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots a}_{n \text{ fois}}}$$

a est la base de la puissance a^n, n est l'exposant.
- Pour tout nombre réel a,

$$\boxed{a^1 = a}$$

- Pour tout nombre réel a non nul,

$$\boxed{a^0 = 1}$$

Exemple 0.1.1

. $3^2 = 3 \times 3 = 9$

. $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

. $3^1 = 3$

. $3^0 = 1$

0.1.2 Loi des exposants

- Produit de puissances de même base :

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

Exemple 0.1.2 $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

- Quotient de puissances de même base :

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}} \ (a \neq 0)$$

Exemple 0.1.3 $\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3$

- Puissance d'un produit :

$$\boxed{(a \times b)^n = a^n \times b^n}$$

Exemple 0.1.4 $(2 \times 5)^2 = 2^2 \times 5^2$

- Puissance d'un quotient :

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}} \ (b \neq 0)$$

Exemple 0.1.5 $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2}$

- Puissance d'une puissance :

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m\times n}}$$

Exemple 0.1.6 $(2^3)^2 = 2^{3\times 2} = 2^6$

0.1.3 Puissance d'exposant entier négatif

- a^{-n} désigne l'inverse de la puissance a^n.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \ (a \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

Exemple 0.1.7

. $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

. $5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$

. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{2}$

. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

- Les 5 lois des exposants précédentes s'appliquent également lorsque les exposants m et n sont négatifs et lorsque les bases sont non nulles.

Exemple 0.1.8

. $a^3 \times a^{-5} = a^{3-5} = a^{-2}$ (loi 1)
. $\frac{a^{-2}}{a^{-5}} = a^{-2-(-5)} = a^3$ (loi 2)
. $(a \times b)^{-2} = a^{-2}b^{-2}$ (loi 3)
. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{a^{-3}}{b^{-3}}$ (loi 4)
. $(a^3)^{-2} = a^{3\times(-2)} = a^{-6}$ (loi 5)

0.1.4 Puissance d'exposant rationnel

- Pour tout nombre réel a, pour tout nombre naturel n non nul et différent de 1, on a

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

Exemple 0.1.9

. $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5} = \sqrt{5}$

. $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

. $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$

La puissance $a^{\frac{1}{n}}$ n'est pas définie dans $\mathbb{R}$ quand n est pair et a est négatif.
Exemple 0.1.10 $(-16)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-16} \notin \mathbb{R}$.

- Si $a^{\frac{1}{n}}$ existe dans $\mathbb{R}$, alors pour tout entier m on a :

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m}$$

Exemple 0.1.11

. $4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt[2]{4})^3 = 2^3 = 8$

. $(-8)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{-8})^2 = (-2)^2 = 4.$

- Les 5 lois des exposants précédentes s'appliquent également dans les cas où les puissances d'exposants rationnels désignent des nombres réels.

0.1.5 Racine n-ième d'un nombre réel

- Pour tout nombre réel a positif ou nul, pour tout nombre naturel n pair ($n \geq 2$), $\sqrt[n]{a}$ est l'unique nombre réel positif ou nul dont la puissance d'exposant n est égale à a.
  Si n est pair, $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$, on a :
  $$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a}$$
  Dans l'écriture $\sqrt[n]{a}$, a est le radicande, n est l'indice, $\sqrt{\ }$ est le radical.
  Exemple 0.1.12
  . $\sqrt[4]{16} = 2$ car $2^4 = 16$
  . $\sqrt[4]{-16} = 2$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$ car -16 est négatif.

- Pour tout nombre réel a, pour tout nombre naturel n impair, $\sqrt[n]{a}$ est l'unique nombre réel dont la puissance d'exposant n est égale à a.
  Si n est impair, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on a :
  $$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a}$$
  Exemple 0.1.13
  . $\sqrt[3]{125} = 5$ car $5^3 = 125$
  . $\sqrt[3]{-125} = -5$ car $(-5)^3 = -125$

- Notons que $\sqrt[n]{a}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$ seulement lorsque le radicande a est négatif et l'indice n est pair.

0.1.6 Propriétés des radicaux

Si $a^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}$ et $b^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}$, on a :

- $$\boxed{\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}}$$
  Exemple 0.1.14 $\sqrt[3]{8 \times 125} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{125} = 2 \times 5 = 10$
- $$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}} \ (b \neq 0)$$
  Exemple 0.1.15 $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$
- $$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}}$$
  Exemple 0.1.16 $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$
- $$\boxed{(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$$
  Exemple 0.1.17 $(\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

0.1.7 Réduction du radicande

Illustrons la procédure dans les exemples suivants :

Exemple 0.1.18
$$\begin{aligned} \sqrt{80} &= \sqrt{16 \times 5} && \leftarrow \text{Le radicande est écrit sous la forme d'un produit de deux facteurs dont un facteur est un carré parfait} \\ &= \sqrt{16} \times \sqrt{5} && \leftarrow \text{On applique la propriété } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \\ &= 4 \times \sqrt{5} && \leftarrow \text{On extrait la racine carrée du facteur carré parfait} \end{aligned}$$

Exemple 0.1.19
$$\begin{aligned} \sqrt[3]{80} &= \sqrt[3]{8 \times 10} && \leftarrow \text{Le radicande est écrit sous la forme d'un produit de deux facteurs dont un facteur est un cube parfait} \\ &= \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{10} && \leftarrow \text{On applique la propriété } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \\ &= 2 \times \sqrt[3]{10} && \leftarrow \text{On extrait la racine cubique du facteur carré parfait} \end{aligned}$$

0.2 Polynômes

0.2.1 Monômes

- Un monôme en x est le produit d'un nombre réel par une puissance entière non négative de la variable x.
  Exemple 0.2.1
  . $-3x^2$ est un monôme de coefficient -3, de variable x et d'exposant 2.
  . $\frac{5}{x}$ n'est pas un monôme car $\frac{5}{x} = 5x^{-1}$, l'exposant -1 étant négatif.
  . $5\sqrt{x}$ n'est pas un monôme car $5\sqrt{x} = 5x^{\frac{1}{2}}$, l'exposant $\frac{1}{2}$ n'étant pas entier.
- Le degré d'un monôme ax^n est égal à l'exposant n de la variable x.
  Exemple 0.2.2
  . Le degré de $-3x^2$ est égal à 2.
  . Le degré du monôme 5 est égal à 0 car $5 = 5x^0$.
  . Le degré du monôme nul 0 est indéterminé car $0 = 0x^1 = 0x^2 = 0x^3 = \ldots$.
- Certains monômes ont plusieurs variables. Dans ce cas, le degré d'un monôme à plusieurs variables est égal à la somme des exposants de ces variables.
  Exemple 0.2.3 Le degré du monôme $-3x^2y^3$ est égal à 5.

0.2.2 Opérations entre monômes

- Deux monômes sont semblables lorsqu'ils sont composés des mêmes variables respectivement affectées des mêmes exposants.
  Exemple 0.2.4
  . $2x^3$ et $5x^3$ sont semblables, $3x^2$ et $3y^2$ ne sont pas semblables.
  . $3x^2y^3$ et $-5x^2y^3$ sont semblables, $4x^2y^3$ et $4x^3y^2$ ne sont pas semblables.
- La distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction permet de réduire à un seul monôme la somme ou la différence de deux monômes semblables.

$$\boxed{ax^n \pm bx^n = (a \pm b)x^n}$$

  Exemple 0.2.5
  . $3x^2 + 5x^2 = (3 + 5)x^2 = 8x^2$
  . $10x^3y^2 - 4x^3y^2 = (10 - 4)x^3y^2 = 6x^3y^2$
- La loi du produit de deux puissances de même base permet de calculer le produit de deux monômes.

$$\boxed{ax^m \times bx^n = abx^{m+n}}$$

  Exemple 0.2.6
  . $3x^2 \times 4x^3 = 12x^5$
  . $-2x^2y^3 \times 5x^3y = -10x^5y^4$
- La loi du quotient de deux puissances de même base permet de calculer le quotient d'un monôme par un monôme non nul.

$$\boxed{ax^m \div bx^n = \frac{a}{b}x^{m-n}}$$

  Exemple 0.2.7
  . $\frac{18x^5}{6x^3} = \frac{18}{6}x^{5-3} = 3x^2$
  . $\frac{12x^4y^2}{3x^2y^3} = \frac{12}{3}x^{4-2}y^{2-3} = 4x^2y^{-1}$ (qui n'est pas un monôme)

0.2.3 Polynômes

- Un polynôme en x est un monôme en x ou une somme de monômes en x.
  Exemple 0.2.8
  . $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ est un polynôme en x (il est composé de 4 monômes).

. $Q(x) = 3x^2 - \frac{5}{2}x + 4$ est un trinôme en x (il est composé de 3 monômes).
. $R(x) = 5x^2 - 2x$ est un binôme en x (il est composé de 2 monômes).

Généralement, on ordonne les monômes qui composent un polynôme selon l'ordre décroissant des puissances de la variable.

- Le degré d'un polynôme, une fois réduit, est égal au degré du monôme ayant le plus haut degré.
  Exemple 0.2.9
  . $P(x) = 3x^2 - 5x + 1$ est un polynôme de degré 2 en x.
  . $P(x, y) = 3x^2y - 2xy + 5x - 2$ est un polynôme de degré 2 en x, de degré 1 en y, et de degré total 3.
- Évaluer le polynôme $P(x)$ pour $x = x_0$ consiste à trouver la valeur numérique du polynôme quand la variable x prend la valeur x_0.
  Exemple 0.2.10 Évaluons le polynôme $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$ pour $x = -3$:
  $$P(-3) = 2(-3)^3 + (-3)^2 - 8(-3) - 4 = -54 + 9 + 24 - 4 = -25.$$
- On appelle zéro ou racine d'un polynôme toute valeur de la variable qui annule le polynôme.
  Exemple 0.2.11 2 est un zéro du polynôme $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$ car $P(2) = 0$.

0.2.4 Somme et différence de polynômes

- Les règles d'addition et de soustraction entre monômes semblables permettent d'effectuer des additions et des soustractions entre polynômes.
  Exemple 0.2.12 La somme $S(x)$ et la différence $D(x)$ des polynômes $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ et $Q(x) = 5x^2 + 3x - 4$ sont
  $S(x) = P(x) + Q(x) = (3x^2 - 2x + 1) + (5x^2 + 3x - 4) = (3 + 5)x^2 + (-2 + 3)x + (1 - 4) = 8x^2 + x - 3$
  et
  $D(x) = P(x) - Q(x) = (3x^2 - 2x + 1) - (5x^2 + 3x - 4) = (3 - 5)x^2 + (-2 - 3)x + (1 - (-4)) = -2x^2 - 5x + 5.$
- La somme et la différence de deux polynômes sont des polynômes.

0.2.5 Produit de polynômes

- La distributivité de la multiplication ou l'addition et la soustraction
  $$\boxed{a \times (b + c) = a \times b + a \times c} \text{ et } \boxed{a \times (b - c) = a \times b - a \times c}$$
  et la règle de multiplication de monômes
  $$\boxed{ax^m \times bx^n = abx^{m+n}}$$
  permettent d'effectuer les multiplications entre polynômes.
  Exemple 0.2.13 Le produit $P(x)$ des polynômes $A(x) = 2x + 3$ et $B(x) = 3x^2 + 2x - 1$ est :
  $$P(x) = (2x + 3) \times (3x^2 + 2x - 1) = 6x^3 + 4x^2 - 2x + 9x^2 + 6x - 3 = 6x^3 + 13x^2 + 4x - 3.$$
- Le produit de deux polynômes est aussi un polynôme.

0.2.6 Identités remarquables

Les égalités suivantes, vraies quels que soient a et b, sont des identités remarquables.

- Carré d'une somme .
  $$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$
  Exemple 0.2.14 $(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$
- Carré d'une différence.
  $$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$
  Exemple 0.2.15 $(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$
- Produit de la somme par la différence.
  $$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

Exemple 0.2.16 $(2x+3y)(2x-3y) = 4x^2 - 9y^2$

0.2.7 Quotient de polynômes

- Les propriétés des nombres réels

$$\boxed{(a+b) \div c = a \div c + b \div c} \qquad \boxed{(a-b) \div c = a \div c - b \div c}$$

  et la règle de la division de monômes

$$\boxed{ax^m \div bx^n = \frac{a}{b}x^{m-n}},\ b \neq 0$$

  permettent d'effectuer des divisions d'un polynôme par un monôme.
  Exemple 0.2.17 Le quotient $Q(x)$ du polynôme $A(x) = 18x^4 - 9x^3 + 12x^2$ par le monôme $B(x) = 6x^2$ est :

$$Q(x) = (18x^4 - 9x^3 + 12x^2) \div (6x^2) = \frac{18x^4}{6x^2} - \frac{9x^3}{6x^2} + \frac{12x^2}{6x^2} = 3x^2 - \frac{3}{2}x + 2$$

- Le quotient de deux polynômes n'est pas toujours un polynôme.
  Exemple 0.2.18 $(12x^3 - 6x) \div 3x^2 = 4x - \frac{2}{x}$ n'est pas un polynôme.
- Pour diviser un polynôme $A(x)$ par un polynôme $B(x)$ non nul, on ordonne le dividende $A(x)$ et le diviseur $B(x)$ selon les puissances décroissantes de la variable et on procède comme suit jusqu'à ce que l'on obtienne un reste de degré inférieur au diviseur.
  Exemple 0.2.19 Effectuons la division de $A(x) = 2x^2 - 5x - 40$ par $B(x) = x - 6$

$$\begin{array}{rrrrrr|l} & 2x^2 & - & 5x & - & 40 & x-6 \\ \cline{7-7} - & (2x^2 & - & 12x) & & & 2x+7 \\ \cline{1-6} & & & 7x & - & 40 & \\ & & - & (7x & - & 42) & \\ \cline{3-6} & & & & & 2 & \end{array}$$

  On obtient pour quotient $Q(x) = 2x + 7$ et pour reste $R(x) = 2$.
- Le dividende $A(x)$, le diviseur $B(x)$, le quotient $Q(x)$ et le reste $R(x)$ vérifient la relation euclidienne :

$$\boxed{A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)},\ (\text{degré de } R(x) < \text{degré de } B(x)).$$

  Exemple 0.2.20 À partir de la division de l'exemple précédent, on observe que

$$2x^2 - 5x - 40 = (x-6)(2x+7) + 2.$$

0.2.8 Théorème du reste

- Le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par $(x-a)$ est égal à $P(a)$.
  Exemple 0.2.21 Le reste de la division de $P(x) = 2x^2 - 5x - 40$ par $x - 6$ est égal à

$$P(6) = 2 \times (6)^2 - 5 \times (6) - 40 = 2.$$

- Un polynôme $P(x)$ est divisible par un polynôme $Q(x)$ si et seulement si le reste de la division de $P(x)$ par $Q(x)$ est égal à 0.

$$\boxed{P(x) \text{ est divisible par } (x-a) \Leftrightarrow P(a) = 0}$$

0.3 Factorisation

0.3.1 Mise en évidence simple

- Factoriser un polynôme signifie écrire ce polynôme sous la forme d'un produit de facteurs.
- La mise en évidence simple est une méthode qui permet de factoriser un polynôme composé de monômes qui contiennent tous un même facteur commun. Pour factoriser, il suffit alors d'appliquer la règle de la distributivité de la multiplication sur l'addition :

$$(\text{forme développée})\ ab + ac = a(b+c)\ (\text{forme factorisée}).$$

  Exemple 0.3.1 Factorisons $P(x) = 6x^4 + 15x^3 - 18x^2$:

$$P(x) = 3x^2 \times 2x^2 + 3x^2 \times 5x + 3x^2 \times (-6) = 3x^2(2x^2 + 5x - 6).$$

0.3.2 Mise en évidence double

La mise en évidence double est une méthode qui permet de factoriser des polynômes en regroupant les monômes qui contiennent un facteur commun. Il suffit alors d'appliquer la mise en évidence simple dans chacun des regroupements :

$$ac + ad + bc + bd = (ac + ad) + (bc + bd) = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d).$$

Exemple 0.3.2 Factorisons l'expressions suivante par la mise en évidence double :

$$\begin{array}{rcll} P(x) & = & 9x^2 - 12xy^2 + 6xy - 8y^3 & \leftarrow \text{ On regroupe les monômes ayant un facteur en commun} \\ & = & 3x(3x - 4y^2) + 2y(3x - 4y^2) & \leftarrow \text{ 1ère mise en évidence} \\ & = & (3x + 2y)(3x - 4y^2) & \leftarrow \text{ 2ème mise en évidence} \end{array}$$

0.3.3 Différence de deux carrés

- Une différence de deux carrés est une expression algébrique de la forme $a^2 - b^2$.
- Toute différence de deux carrés est factorisable. Il suffit d'appliquer l'identité remarquable
  (forme développée) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (forme factorisée).

  Exemple 0.3.3
  . $9x^2 - 4y^2 = (3x)^2 - (2y)^2 = (3x + 2y)(3x - 2y)$
  . $(2x + 1)^2 - 36 = (2x + 1)^2 - 6^2 = [(2x + 1) + 6][(2x + 1) - 6] = (2x + 7)(2x - 5)$
  . $(3x + 5)^2 - (2x + 1)^2 = [(3x + 5) + (2x + 1)][(3x + 5) - (2x + 1)] = (5x + 6)(x + 4)$
- Une somme de deux carrés n'est pas factorisable en un produit de deux binômes.

0.3.4 Factorisation en plusieurs étapes

Plusieurs étapes sont parfois nécessaires pour factoriser complètement un polynôme.

Exemple 0.3.4

$$\begin{array}{lrcll} . & 2x^3 - 18x & = & 2x(x^2 - 9) & \leftarrow \text{ Mise en évidence simple} \\ & & = & 2x(x + 3)(x - 3) & \leftarrow \text{ Différence de deux carrés} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} . & 4x(2x + 3) + 4x^2 - 9 & = & 4x(2x + 3) + (2x + 3)(2x - 3) & \leftarrow \text{ Différence de deux carrés} \\ & & = & (2x + 3)[4x + (2x - 3)] & \leftarrow \text{ Mise en évidence simple} \\ & & = & (2x + 3)(6x - 3) & \leftarrow \text{ Réduction} \\ & & = & (2x + 3)3(2x - 1) & \leftarrow \text{ Mise en évidence simple} \\ & & = & 3(2x + 3)(2x - 1) & \leftarrow \text{ Commutativité de la multiplication} \end{array}$$

0.3.5 Trinômes carrés parfaits

- Un trinôme carré parfait est une expression algébrique de la forme
  $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$.
  Un trinôme est carré parfait lorsque le terme médian est égal au double produit des racines carrées des termes extrêmes.
- Tout trinôme carré parfait est factorisable. Il suffit d'appliquer l'une des identités remarquables précédentes.

  Exemple 0.3.5

$$\begin{array}{lrcll} . \text{ Factorisons} & P(x) & = & 4x^2 + 12x + 9 & \\ & & = & (2x)^2 + 2(2x)(3) + 3^2 & \leftarrow \text{ On écrit } P \text{ sous la forme : } a^2 + 2ab + b^2 \\ & & = & (2x + 3)^2 & \leftarrow \text{ On applique l'identité remarquable} \\ . \text{ Factorisons} & P(x) & = & 4x^2 - 12x + 9 & \\ & & = & (2x)^2 - 2(2x)(3) + 3^2 & \leftarrow \text{ On écrit } P \text{ sous la forme : } a^2 - 2ab + b^2 \\ & & = & (2x - 3)^2 & \leftarrow \text{ On applique l'identité remarquable} \end{array}$$

0.3.6 Discriminant d'un trinôme du second degré

- Un trinôme du second degré est une expression algébrique de la forme $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
- L'expression $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant du trinôme.
- Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est factorisable si et seulement si le discriminant est positif ou nul

$$\boxed{ax^2 + bx + c \text{ est factorisable} \Leftrightarrow \Delta \geq 0}$$

Exemple 0.3.6

. $P(x) = x^2 + 2x + 3$ n'est pas fatorisable car le discriminant est négatif ($\Delta = -8$).
. $P(x) = 2x^2 + 7x + 6$ est factorisable car le discriminant est positif ($\Delta = 1$)

- Il existe plusieurs méthodes pour factoriser un trinôme du second degré :
  - la méthode de la complétion du carré,
  - la méthode produit et somme,
  - la méthode du discriminant.

0.3.7 Trinôme du second degré : méthode "Complétion du carré"

La méthode "complétion du carré" est illustrée ci-dessous en factorisant $P(x) = 2x^2 + 7x + 6$:

$$\begin{array}{rcll}
P(x) & = & 2x^2 + 7x + 6 & \\
& = & 2\left(x^2 + \frac{7}{2}x + 3\right) & \leftarrow \text{ On met en évidence le coefficient } a = 2 \\
& = & 2\left[\left(x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{49}{16}\right) + 3 - \frac{49}{16}\right] & \leftarrow \text{ On complète le trinôme carré parfait} \\
& = & 2\left[\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] & \leftarrow \text{ On factorise le trinôme carré parfait} \\
& = & 2\left[\left(x + \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{7}{4} - \frac{1}{4}\right)\right] & \leftarrow \text{ On factorise la différence de deux carrés} \\
& = & 2(x+2)\left(x + \frac{3}{2}\right) & \leftarrow \text{ On réduit} \\
& = & (x+2)(2x+3) & \leftarrow \text{ On écrit } P \text{ sous la forme d'un produit de deux binômes}
\end{array}$$

0.3.8 Trinôme du second degré : méthode "Produit et somme"

La méthode "Produit et somme" est illustrée ci-dessous en factorisant $P(x) = 2x^2 + 7x + 6$.

1.	On identifie les coefficients a, b, c	$a = 2$, $b = 7$, $c = 6$
2.	On recherche deux nombres entiers m et n tels que $\begin{cases} mn = ac & \text{(produit des coefficients extrêmes)} \\ m + n = b & \text{(coefficient médian)} \end{cases}$	$\begin{cases} mn = 12 \\ m + n = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = 3 \end{cases}$
3.	On écrit $ax^2 + bx + c = ax^2 + mx + nx + c$ puis on factorise par la méthode mise en évidence double	$2x^2 + 7x + 6 = 2x^2 + 4x + 3x + 6$ $= 2x(x+2) + 3(x+2) = (x+2)(2x+3)$

0.3.9 Trinôme du second degré : méthode du discriminant

On développera cette méthode dans le chapitre suivant.

0.4 Fractions rationnelles

0.4.1 Fraction rationnelle

- Une fraction rationnelle est une expression algébrique de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ est un polynôme et où $Q(x)$ est un polynôme non nul.
  Exemple 0.4.1 $\frac{5x^2}{2}$, $\frac{2x+1}{5x}$, $\frac{x^2-5x+6}{2x-1}$ sont des fractions rationnelles.
- Une fraction rationnelle est définie pour toute valeur de la variable qui n'annule pas le dénominateur.
  Exemple 0.4.2
  . $\frac{5x^2}{2}$ est définie pour tout nombre réel x car le dénominateur n'est jamais nul.
  . $\frac{2x+1}{5x}$ est définie pour tout nombre réel non nul car la valeur $x = 0$ annule le dénominateur.

. $\frac{x^2-5x+6}{2x-1}$ est définie pour tout nombre réel $x \neq \frac{1}{2}$ car la valeur $x = \frac{1}{2}$ annule le dénominateur.

- Pour simplifier (ou réduire) une fraction rationnelle, on procède comme suit :
  Exemple 0.4.3 Simplifions $\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$.

1.	On factorise le numérateur et le dénominateur	$\frac{x^2-x-2}{x^2-4} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$
2.	On divise le numérateur et le dénominateur par le facteur commun	$= \frac{x+1}{x+2}$
3.	tout en indiquant les restrictions sur la variable	si $x \neq 2$

Notons que lorsque $x = 2$, la fraction $\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$ n'est pas définie alors que la fraction $\frac{x+1}{x+2}$ est définie et vaut $\frac{3}{4}$. C'est pourquoi on écrit :

$$\frac{x^2-x-2}{x^2-4} = \frac{x+1}{x+2} \text{ si } x \neq 2.$$

0.4.2 Addition et soustraction de fractions rationnelles

On distingue deux cas :

- Les dénominateurs n'ont pas de facteur commun.

$$\boxed{\frac{A(x)}{B(x)} \pm \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)D(x) \pm B(x)C(x)}{B(x)D(x)}}$$

Exemple 0.4.4

. $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-3} = \frac{2(x+3)+3(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{2x+6+3x-3}{(x-1)(x+3)} = \frac{5x+3}{(x-1)(x+3)}$

. $\frac{2x}{x+1} - \frac{3x}{x-1} = \frac{2x(x-1)-3x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2-2x-3x^2-3x}{(x+1)(x-1)} = \frac{-x^2-5x}{(x+1)(x-1)}$

- Les dénominateurs ont un facteur en commun.
  Exemple 0.4.5

1.	On factorise les dénominateurs	$\frac{4}{x^2-9} - \frac{2}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)(x-3)} - \frac{2}{(x+3)^2}$
2.	On recherche le dénominateur commun composé du moins de facteurs possibles	$= \frac{4(x+3)}{(x+3)^2(x-3)} - \frac{2(x-3)}{(x+3)^2(x-3)}$
3.	On réduit au même dénominateur	$= \frac{4(x+3)-2(x-3)}{(x+3)^2(x-3)}$
4.	On complète les calculs	$= \frac{2x+18}{(x+3)^2(x-3)}$

0.4.3 Multiplication et division de fractions rationnelles

- Pour multiplier deux fractions rationnelles, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\boxed{\frac{A(x)}{B(x)} \times \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x) \times C(x)}{B(x) \times D(x)}}, \ B(x) \neq 0, \ D(x) \neq 0.$$

Exemple 0.4.6

1.	On exprime le produit par une fraction algébrique	$\frac{x-2}{x-3} \times \frac{x^2-9}{x^2-x-2} = \frac{(x-2)(x^2-9)}{(x-3)(x^2-x-2)}$
2.	On factorise le numérateur et le dénominateur	$= \frac{(x-2)(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-2)(x+1)}$
3.	On simplifie en indiquant les restrictions	$= \frac{x+3}{x+1}$ si $x \neq 2$ et $x \neq 3$.

- Pour diviser deux fractions rationnelles, on multiplie la première par l'inverse de la seconde.

$$\boxed{\frac{A(x)}{B(x)} \div \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \times \frac{D(x)}{C(x)} = \frac{A(x) \times D(x)}{B(x) \times C(x)}}, \ B(x) \neq 0, \ C(x) \neq 0, \ D(x) \neq 0.$$

Exemple 0.4.7

$$\frac{x^2-4}{x^2+7x+10} \div \frac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15} = \frac{x^2-4}{x^2+7x+10} \times \frac{x^2+2x-15}{x^2-6x+9} = \frac{(x^2-4)(x^2+2x-15)}{(x^2+7x+10)(x^2-6x+9)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)(x+5)(x-3)}{(x+2)(x+5)(x-3)^2} = \frac{(x+2)(x-2)(x+5)(x-3)}{(x+2)(x+5)(x-3)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3} \text{ si } x \neq -2, \ x \neq -5 \text{ et } x \neq 3.$$

0.4.4 Décomposition en une somme de fractions rationnelles

Illustrons dans l'exemple suivant la procédure permettant de décomposer une fraction algébrique en fractions partielles :

$$\begin{aligned}
\frac{3-4x}{x^3-5x^2+6x} &= \frac{3-4x}{x(x-3)(x-2)} && \text{En factorisant le dénominateur}\\
&= \frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-2} && \text{En décomposant en une somme de fractions rationnelles}\\
&= \frac{A(x-3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-3)}{x(x-3)(x-2)} && \text{En mettant sous le même dénominateur}
\end{aligned}$$

En égalant les numérateurs, nous obtenons

$$3-4x = A(x-3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-3),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Remplaçons successivement x dans chacun des membres de l'équation précédente par les valeurs qui annulent les facteurs du dénominateur. Ainsi,

- si $x=0$, on obtient $3=6A \Leftrightarrow A=\frac{1}{2}$,
- si $x=2$, on obtient $-5=-2C \Leftrightarrow C=\frac{5}{2}$,
- si $x=3$, on obtient $-9=3B \Leftrightarrow B=-3$.

Finalement, $\frac{3-4x}{x^3-5x^2+6x} = \frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{-3}{x-3}+\frac{\frac{5}{2}}{x-2} = \frac{1}{2x}-\frac{3}{x-3}+\frac{5}{2(x-2)}$.

0.5 Exercices

Exercice 1 Simplifier les expressions suivantes en utilisant les lois des exposants :

1. $a^3 \times a^2$
2. $\frac{a^5}{a^3}$
3. $(a \times b)^3$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^4$
5. $(a^3)^2$

Exercice 2 Simplifier les expressions suivantes en utilisant les lois des exposants :

1. $x^3 \times x^2$
2. $3a \times 2a^2$
3. $-3x^2 \times 4x^3$
4. $2x^2y^3 \times 3xy^4$
5. $8a^4b^3c^2 \times 2ab^2c^3$
6. $\frac{2}{5}a^3b^2 \times \frac{-5}{8}a^2b$

Exercice 3 Simplifier les expressions suivantes en utilisant les lois des exposants :

1. $a^5 \div a^2$
2. $12a^6 \div 4a^4$
3. $15x^5 \div -3x^5$
4. $\frac{-12a^2}{3a}$
5. $\frac{-36a^4b^3}{18a^2b^2}$
6. $\frac{16x^5y^2}{-32x^4}$

Exercice 4 Simplifier les expressions suivantes en utilisant les lois des exposants :

1. $(2a)^3$
2. $(5a^3)^2$
3. $(2a^3)^2 \times 3a$
4. $(a^2b^3)^2 \times (5a)^2$
5. $(3a^4)^2 \times (2a)^4$
6. $(2a^3b^2)^4 \times (3a^2b)^2$

Exercice 5 Simplifier les expressions suivantes en utilisant les lois des exposants :

1. $\left(\frac{2}{3}a\right)^2$
2. $\left(\frac{3a^2}{b}\right)^3$
3. $\left(\frac{-3a}{b^2}\right)^3$
4. $\left(\frac{3x^2y}{2}\right)^4$
5. $\left(\frac{-5a^2b^3}{c^4}\right)^2$
6. $\left(\frac{-a^4}{2bc^2}\right)^5$

Exercice 6 Simplifier les expressions suivantes en utilisant les lois des exposants :

1. $\left(\frac{2a^2}{3b^3}\right)^2 \times \left(\frac{3a}{b}\right)^3$
2. $\left(\frac{-3x^2}{5y}\right)^3 \times \left(\frac{x^3}{2y^2}\right)^2$
3. $\left(\frac{10a^2b^6}{3a}\right) \times \left(\frac{3a^4}{5ab^5}\right)^2$
4. $\frac{5a^3}{(b^2)^3} \times \left(\frac{b^3}{2a}\right)^2$

Exercice 7 Calculer :

1. 2^{-3}
2. $(-2)^{-3}$
3. 2^{-4}
4. $(-2)^{-4}$
5. 10^{-1}
6. $(0,01)^{-2}$
7. $(-0,1)^{-2}$
8. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$

Exercice 8 Simplifier les expressions suivantes en utilisant les lois des exposants $(a \neq 0, b \neq 0)$:

1. $2^3 \times 2^{-4} \times 2^2$
2. $(5^{-2})^3 \times 5^8$
3. $(2^{-3})^2 \times (2^{-3})^{-4}$
4. $(a^2b^{-4})^{-1} \times (a^{-3}b)^{-2}$

5. $(-2a^2b^{-1})^{-2} \times (2a^{-1}b)^2$
6. $\left(\frac{2a^{-3}}{b^{-2}}\right)^{-2}$
7. $\frac{12a^{-3}b^2}{4a^{-4}b^{-1}}$
8. $\left(\frac{-2a^{-1}b^2}{3a^{-2}b}\right)^2$
9. $\left(\frac{2a^4b^{-2}}{a^{-3}b}\right)^{-2}$

Exercice 9 Simplifier les expressions suivantes en utilisant les lois des exposants ($a \neq 0, b \neq 0$) :

1. $(2a^4b^{-2})^{-1}$
2. $(a^2b^{-4})^{-1} \times (a^{-3}b)^{-2}$
3. $\left(\frac{a}{b^{-2}}\right)^{-1}$
4. $(2ab)^{-2} \times 4a^2b^3$
5. $(-3a^2b^{-3})^2 \times (2a^{-1}b^2)^{-2}$
6. $(-a^2b^{-1})^3 \div (ab^{-2})^2$

Exercice 10 Calculer, quand c'est possible :

1. $\sqrt{25}$
2. $\sqrt{-25}$
3. $\sqrt[4]{16}$
4. $\sqrt[4]{-16}$
5. $\sqrt[3]{64}$
6. $\sqrt[3]{-64}$
7. $\sqrt[4]{256}$
8. $\sqrt{256}$

Exercice 11 Calculer à l'aide de la calculatrice (arrondir le résultat au centième près) :

1. $\sqrt{2}$
2. $\sqrt{3}$
3. $\sqrt{5}$
4. $\sqrt[3]{2}$
5. $\sqrt[3]{3}$
6. $\sqrt[3]{5}$
7. $\sqrt{10}$
8. $\sqrt[4]{10}$

Exercice 12 Pour quelles valeurs réelles de x les expressions suivantes sont-elles définies ?

1. $\sqrt{x-2}$
2. $\sqrt[3]{x-2}$
3. $\sqrt{-2x+1}$
4. $\frac{1}{\sqrt{2x-6}}$

Exercice 13 Simplifier $\sqrt{x^2}$ si :

1. x est positif,
2. x est négatif.

Exercice 14 Calculer, quand c'est possible

1. $25^{\frac{1}{2}}$
2. $(-16)^{\frac{1}{2}}$
3. $729^{\frac{1}{3}}$
4. $(-729)^{\frac{1}{3}}$
5. $(4^{\frac{1}{2}})^3$
6. $(4^3)^{\frac{1}{2}}$
7. $\left(\frac{-8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$
8. $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$
9. $(16^{-1})^{\frac{1}{4}}$

Exercice 15 Calculer, quand c'est possible

1. $16^{\frac{3}{2}}$
2. $(-27)^{\frac{2}{3}}$
3. $9^{-\frac{3}{2}}$
4. $4^{1,5}$
5. $25^{-2,5}$
6. $\left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{3}{2}}$
7. $(-9)^{\frac{3}{2}}$
8. $\left(-\frac{32}{243}\right)^{-\frac{2}{5}}$
9. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-0,5}$

Exercice 16 Soit a un nombre réel positif. Effectuer les calculs suivants :

1. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{3}}$
2. $a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}}$
3. $a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{1}{4}}$
4. $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2$
5. $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2$
6. $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 \div \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2$

Exercice 17 Soit a un nombre réel positif. Effectuer les calculs suivants :

1. $a^{-\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{3}{4}}$
2. $a^{\frac{5}{2}} \div a^{-\frac{5}{3}}$
3. $a^{-\frac{3}{2}} \times a^{\frac{5}{6}}$

4. $a^{-\frac{1}{2}} \div a^{-\frac{1}{3}}$
5. $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}$
6. $(a^{-\frac{2}{3}})^{-2} \times (a^{-\frac{1}{3}})^{-5}$

Exercice 18 Soient a et b deux nombres réels positifs. Simplifier les expressions suivantes en appliquant les lois des exposants :

1. $(a^2b^3)^{\frac{1}{6}}$
2. $(a^{-2}b^3)^{-\frac{1}{2}}$
3. $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^{\frac{1}{6}}$
4. $\left(\frac{a^3b^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{12}}$
5. $(a^{-\frac{2}{3}} \div a^{\frac{3}{4}})^{-2}$
6. $[(a^2b^{-3})^{\frac{2}{3}}]^6$

Exercice 19 Effectuer les opérations suivantes :

1. $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$
2. $\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{3}$
3. $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$
4. $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$
5. $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$
6. $\sqrt[3]{125^2}$

Exercice 20 Effectuer les calculs suivants :

1. $2\sqrt{12} \times 5\sqrt{3}$
2. $-2\sqrt[4]{2} \times 3\sqrt[4]{8}$
3. $(2\sqrt{5})^2$
4. $\frac{10\,\sqrt[3]{81}}{5\,\sqrt[3]{3}}$
5. $(2\sqrt[3]{5})^3$
6. $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{16}{9}}$

Exercice 21 Effectuer les calculs suivants :

1. $3\sqrt[3]{18} \times 2\sqrt[3]{12}$
2. $2\sqrt[3]{4} \times 3\sqrt[3]{250}$
3. $\left(\sqrt[3]{\frac{125}{8}}\right)^2$
4. $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right)^2$
5. $(2\sqrt{3})^2 \times (3\sqrt{2})^2$
6. $\frac{12\sqrt{50}}{5\sqrt{2}}$

Exercice 22 Écrire chacun des nombres suivants sous la forme $a\sqrt[n]{b}$, où b est le plus petit entier possible.

1. $\sqrt{32}$
2. $\sqrt{98}$
3. $\sqrt{180}$
4. $\sqrt{720}$
5. $3\sqrt{500}$
6. $\sqrt{40}$
7. $\sqrt[3]{250}$
8. $\sqrt[4]{80}$
9. $\frac{4}{5}\sqrt{1200}$
10. $\sqrt[3]{2000}$
11. $\frac{2}{3}\sqrt[4]{162}$
12. $-7\sqrt[4]{160}$

Exercice 23 Identifier les monômes parmi les expressions algébriques suivantes :

1. $5x$
2. $\frac{5}{x}$
3. $3x^{-2}$
4. $2x^{\frac{2}{3}}$
5. -1

Exercice 24 Exprimer par un monôme chacun des énoncés suivants :

1. Le périmètre d'un carré de côté x.
2. L'aire d'un disque de rayon r.
3. Le volume d'une sphère de rayon r.
4. L'aire latérale d'un cylindre droit de rayon r et de hauteur h.
5. Le volume d'un cylindre droit de rayon r et de hauteur h.

Exercice 25 Évaluer chacun des monômes suivants selon les valeurs indiquées des variables.

1. $-3x^2$ lorsque $x = -5$
2. $-2x^2y^3$ lorsque $x = 3$ et $y = -2$
3. $3x^2y^3$ lorsque $x = \frac{2}{3}$ et $y = -\frac{3}{2}$
4. $-\frac{2}{3}xy^2$ lorsque $x = \frac{3}{4}$ et $y = -\frac{1}{2}$

Exercice 26 Dans chacun des cas suivants, déterminer le monôme qui n'est pas semblable aux autres.

1. $3x^2, -5x^2, \pi x^2, -3x, -\frac{3}{2}x^2$
2. $2x^2y, \sqrt{2}x^2y, 5yx^2, 2\pi yx^2, 3xy^2$

Exercice 27 Réduire chacune des expressions suivantes à un seul monôme.

1. $2x^3 - 5x^3 + 7x^3$
2. $4x^2y - 6x^2y + x^2y$
3. $\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^2 - x^2$
4. $-\frac{2}{3}xy^2 + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{5}{6}xy^2$

Exercice 28 Effectuer les opérations suivantes :

1. $-3x^2 \times 4x^3$
2. $2x^2y^3 \times -3xy^2$
3. $-17x^2 \times -3x$
4. $-7x^2y \times 5x^2y^2$
5. $3x^2y \times -5xy \times -2xy^2$
6. $20x^2y^2 \times -0,5x \times -1,2y^2$
7. $\frac{3}{4}x^2y \times \frac{2}{5}xy^2 \times \frac{10}{9}x$
8. $\frac{-3}{5}x^2y^3 \times \frac{2}{3}xy \times \frac{-5}{2}xy^2$

Exercice 29 Effectuer les opérations suivantes :

1. $(3x^2y)^2$
2. $(-2xy^3)^2$
3. $(-2x^2y^3)^3$
4. $\left(-\frac{3}{4}x^2y^3\right)^2$
5. $3x^2(-2x)^3$
6. $(-2x^2)^2 \times (3x^3)^2$

Exercice 30 Effectuer les opérations suivantes, puis indiquer si le résultat est un monôme :

1. $-12x^4 \div 3x^6$
2. $18x^6 \div 12x^4$
3. $18x^6y^4 \div 9x^2y^2$
4. $-12x^2y^4 \div 6x^3y$
5. $(-5x^3)^2 \div 10x^4$
6. $(4x^2y^3)^3 \div (2xy^2)^4$

Exercice 31 Répondre aux questions tout en justifiant.

1. La somme de deux monômes est-elle toujours un monôme ?
2. Le produit de deux monômes est-il toujours un monôme ?
3. Le quotient de deux monômes est-il toujours un monôme ?

Exercice 32 Parmi les expressions algébriques suivantes, identifier les polynômes, ordonner les selon les puissances décroissantes de la variable et déterminer leur degré.

1. $x\sqrt{2} + 3x^2 - 1$
2. $2x^2 + 2\sqrt{x}$
3. $3y - 2y^3 + \frac{1}{2}y^4 - 4y^2 + 1$
4. $x^{-1} + 5x + x^2$

Exercice 33 Réduire les polynômes suivants puis déterminer leur degré :

1. $P(x) = 3x^2 + 2x - 5x^2 - 3x + 1$
2. $P(x, y) = 3x^3y - 2xy^2 + 4x^3y - xy^2$
3. $P(z) = 4z^3 - 5z^2 + 8z^3 - z^2 + 4z - 5 + 6z^2 - 12z^3$

4. $P(x) = \frac{3}{2}x^2 + 5x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}x$

Exercice 34 Évaluer les polynômes suivants :

1. $P(x) = 3x^2 + 5x$ pour $x = -2$
2. $P(x) = x^2 - 5x + 3$ pour $x = 0$
3. $P(x) = 3x^2 + 2x - 5$ pour $x = -1,5$
4. $P(x) = 2x^2 - 7x - 15$ pour $x = -\frac{3}{2}$

Exercice 35 Soit le polynôme $P(x, y) = 3x^2y - 2xy^2 + xy - 2$. Calculer :

1. $P(2, 3)$
2. $P(-3, 1)$
3. $P(-1, -2)$
4. $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$

Exercice 36 Soit le polynôme $P(x) = 2x^2 - x - 6$. Déterminer les zéros parmi les nombres réels suivants :

1. $x = -1$
2. $x = 2$
3. $x = 0$
4. $x = -\frac{3}{2}$

Exercice 37 Les binômes suivants sont du premier degré. Déterminer le zéro de chacun de ces binômes.

1. $P(x) = 3x - 2$
2. $P(y) = -2y + 5$
3. $P(z) = -2z$
4. $P(x) = -3x + \frac{1}{2}$
5. $P(y) = -\frac{2}{3}y + 4$
6. $P(z) = -\frac{2}{5}z + \frac{3}{4}$

Exercice 38 Du haut d'un pont, Eric jette un caillou verticalement vers le bas. La formule $d(t) = 4,9t^2+3t$ exprime la distance $d(t)$ en mètres parcourue par le caillou selon la durée t en secondes écoulée depuis le départ. Si le caillou rentre dans l'eau après 3 secondes, quelle est la hauteur du pont ?

Exercice 39 Soient $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $Q(x) = -x^2 - 3x + 2$ et $R(x) = -2x + 5$. Déterminer :

1. $P(x) + Q(x) + R(x)$
2. $P(x) - Q(x) + R(x)$
3. $P(x) - Q(x) - R(x)$
4. $-P(x) + Q(x) - R(x)$

Exercice 40 Soient $P(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$, $Q(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}$ et $R(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$. Déterminer :

1. $P(x) + Q(x) + R(x)$
2. $P(x) - Q(x) + R(x)$
3. $P(x) - Q(x) - R(x)$
4. $-P(x) + Q(x) - R(x)$

Exercice 41 Effectuer les opérations suivantes :

1. $(4x^2 - 8x + 1) - (2x^2 - 3x + 5)$
2. $(3x^2y - 2xy^2 + 3xy) + (2x^2y + 3x^2y - 5xy)$
3. $(3a^2b - 5ab^2) - (2a^2b + 3ab^2)$
4. $(3x^2y - 2xy + 4xy^2) - (-3xy^2 + 4xy) + 2x^2y$
5. $(3x^3 - 5x^2 - 4x - 1) - [(x^3 - 5x^2) - (x^2 - 4x + 1)]$

Exercice 42 Effectuer les produits suivants :

1. $3x^2(2x - 5)$
2. $-3y(y^2 - 2y)$
3. $-2x^2(3xy^2 + 5x^2y)$
4. $(2xy - 5x)(-3x^2y)$
5. $\frac{3}{4}x^2\left(\frac{2}{3}x - 8x^2\right)$
6. $(4x^2 - 8x + 12)\left(-\frac{3}{4}x\right)$

Exercice 43 Effectuer les produits suivants :

1. $(x + 3)(x - 2)$
2. $(x - 5)(3 - x)$
3. $(2a + b)(3a - 2b)$
4. $(5 - 2x)(3x - 4)$
5. $(-2x + 5)(3x - 2)$
6. $(-5x - 3)(-2x + 4)$

Exercice 44 Effectuer les opérations suivantes :

1. $5x(3x + 2y) - 3x(2x - 4y)$
2. $(2x - 3y)(3x + 2y) + (5x - y)(2x + 3y)$
3. $(3a - 2b)(2a + b) - (2a + 3b)(3a - b)$
4. $(2a + 3)(3a - 2)(2a - 5)$
5. $(2x + 3)(2x - 5)(3x - 4)$

Exercice 45 On considère les polynômes $P(x) = 3x^2$, $Q(x) = 2x + 1$, $S(x) = 5x + 4$. Déterminer

1. $P(x) \times Q(x) + P(x) \times S(x)$
2. $P(x) \times Q(x) - Q(x) \times S(x)$
3. $P(x) \times Q(x) \times S(x)$
4. $P(x) \times (Q(x) + S(x))$
5. $(P(x) - Q(x)) \times S(x)$
6. $(S(x) - Q(x)) \times P(x)$

Exercice 46 Développer les carrés de binômes suivants en utilisant l'identité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

1. $(x + 5)^2$
2. $(3x + 4)^2$
3. $(2x + 3y)^2$

4. $(2x^3 + 5x^2)^2$
5. $(3x^2y + xy^2)^2$
6. $(7x^2y + 3x^5y^2)^2$
7. $\left(\frac{1}{2}x + 7\right)^2$
8. $\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{9}y^2\right)^2$

Exercice 47 Développer les carrés de binômes suivants en utilisant l'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

1. $(x-4)^2$
2. $(2x-7)^2$
3. $(4x-y)^2$
4. $(2x^2-3x)^2$
5. $(-3x-4y)^2$
6. $(4x^2-5y)^2$
7. $\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)^2$
8. $\left(\frac{5}{6}x - 3y^2\right)^2$

Exercice 48 Développer les produits suivants en utilisant l'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

1. $(x+5)(x-5)$
2. $(2x-7)(2x+7)$
3. $(4x+3y)(4x-3y)$
4. $(2-3x)(2+3x)$
5. $(-2x+3y)(-2x-3y)$
6. $(3x^2+5)(3x^2-5)$
7. $\left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}\right)$
8. $\left(\frac{x}{6} - \frac{3}{4}y^2\right)\left(\frac{x}{6} + \frac{3}{4}y^2\right)$

Exercice 49 Développer puis réduire les expressions suivantes :

1. $(3x+2)^2 + (3x-2)^2$
2. $(2x^2+5)^2 - (2x^2-5)^2$
3. $(x+1)(x^2+1)(x-1)$
4. $3x(5x-4)^2 - 2x(3x+5)^2$

Exercice 50 Effectuer les divisions suivantes :

1. $(24x^4 + 12x^3 - 18x^2) \div 6x^2$
2. $(36x^2y^4 + 27x^3y^2 - 9x^2y^2) \div 9x^2y$
3. $(3x^2+2x)(4x+6) \div 2x$
4. $(3x+6)^2 \div 3x$
5. $(4x^2+2x)(4x^2-2x) \div 4x^2$

Exercice 51 Déterminer le quotient $Q(x)$ et le reste $R(x)$ de la division de $A(x) = 2x^2 + 5x - 3$ par $B(x) = x - 1$, puis vérifier la relation euclidienne $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$.

Exercice 52 Dans chacun des cas suivants, déterminer le quotient $Q(x)$ et le reste $R(x)$ de la division de

$A(x)$ par $B(x)$:

1.	$A(x) = 2x^2 - x - 6,$	$B(x) = 2x + 3$
2.	$A(x) = 3x^2 - 2x + 1,$	$B(x) = x + 1$
3.	$A(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 4,$	$B(x) = x + 1$
4.	$A(x) = x^3 - 2x + 1,$	$B(x) = x - 1$
5.	$A(x) = x^4 - 1,$	$B(x) = x + 1$
6.	$A(x) = x^3 + 27,$	$B(x) = x + 3$

Exercice 53 Soit $P(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

1. (a) Calculer $P(2)$.
   (b) Vérifier que le reste de la division de $P(x)$ par $(x - 2)$ est égal à $P(2)$.
2. (a) Calculer $P(-2)$.
   (b) Vérifier que le reste de la division de $P(x)$ par $(x + 2)$ est égal à $P(-2)$.

Exercice 54 Soit $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

1. Montrer que $P(x)$ est divisible par :
   (a) $(x + 3)$
   (b) $(x - 2)$
   (c) $(x + 1)$
2. Montrer que $P(x)$ n'est pas divisible par :
   (a) $(x - 1)$
   (b) $(x + 2)$
   (c) $(x - 3)$

Exercice 55 Soit $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 1$. Déterminer le reste de la division de $P(x)$ par :

1. $(x - 2)$
2. $(x + 2)$
3. $(x - 1)$

Exercice 56 Trouver le plus grand facteur commun aux expressions algébriques suivantes :

1. $18x^4$, $24x^3$, $12x^5$
2. $18x^3y^2z^4$, $24x^4y^3z^4$, $36x^2y^4z^3$
3. $15x^2(a + b)^3$, $18x^3(a + b)^2$
4. $24x^3y^2(a - b)^3$, $26x^2y^4(a - b)^2$

Exercice 57 Factoriser les polynômes suivants :

1. $5x - 10$
2. $18x + 24y - 12z$
3. $4x^2 + 6x$
4. $12x + x^2 - 5x^3$
5. $12a^2b + 18a^2b^2$
6. $-3x^4 + 6x^3 - 9x^2$
7. $a^2 + ab + a$
8. $x^4 - x^3y - x^2$

9. $24x^3y^2 - 16x^2y^3 + 28x^3y^4$
10. $21x^3y^2z - 14x^2y^3z^2 + 28x^2y^2z^2$

Exercice 58 Factoriser les polynômes suivants :

1. $x(x+2) + 5(x+2)$
2. $3(x-2) - x(x-2)$
3. $a(b+c) - d(b+c)$
4. $x(3-y) + y(3-y)$
5. $(x+3)(x+2) + (x+3)(x-1)$
6. $(x+y)(x-2) - (x+y)(2x-3)$
7. $(x+y)^2 + x(x+y)$
8. $(x-y)^2 + (x-y)(x+y)$
9. $2(x-1) - (x-1)^2$
10. $(2x-3)^2 + (x+1)(2x-3) + (2x-3)(x+3)$

Exercice 59 Factoriser les polynômes suivants :

1. $x(x-1) - 3(1-x)$
2. $x(x+3) + 2(-x-3)$
3. $(x-5)^2 - 2(5-x)$
4. $(2x+1)(2x-1) + (1-2x)^2$
5. $(2x+3y)(x+y) + (4x+6y)(x-y)$
6. $(x+1)(2x+6) - (x-2)(3x+9)$

Exercice 60 Factoriser les polynômes suivants :

1. $(3a+2b)^2 - (3a+2b)(2a-3b) + (3a+2b)$
2. $(x+5)^2 + x^2 + 5x$
3. $(4x+7)^2 + (5-x)(4x+7) + 4x^2 + 7x$
4. $(3x+2)^2 + (3x+2)(2x-3) - (3x+2)$
5. $(3x-4)(x+1) + 6x^2 - 8x + (3x-4)(x-3)$

Exercice 61 Factoriser les polynômes suivants :

1. $x^2 + 5xy + 3x + 15y$
2. $2x^2 + 3xy - 10x - 15y$
3. $6a^2 - 15a + 2ab - 5b$
4. $6x^2 - 8x - 9xy + 12y$
5. $10xy + 2x + 15y + 3$
6. $x^3 - x^2 + x - 1$

Exercice 62 Factoriser les polynômes suivants :

1. $2x^2y + 3x^2 + 10y + 15$
2. $15x^4y^2 + 35x^2y^2 - 9x^2 - 21$
3. $2x^3 + 4x^2y - 2x^2 - 4xy$
4. $3x^3y - 9x^3 + 6x^2y - 18x^2$

5. $30x^4y - 10x^3y^2 + 15x^3y - 5x^2y^2$
6. $2x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 6x$

Exercice 63 Factoriser les polynômes suivants :

1. $ax - ay + bx - by + cx - cy$
2. $6ax - 3ay + 10bx - 5by - 4x + 2y$
3. $a^3 - 2ab + ac^2 - a^2b + 2b^2 - bc^2 + a^2c - 2bc + c^3$
4. $ab(x^2 + y^2) - xy(a^2 + b^2)$

Exercice 64 Factoriser les différences des deux carrés suivantes :

1. $x^2 - 25$
2. $16x^2 - 9$
3. $49x^2 - 36y^2$
4. $36x^4 - 25y^6$
5. $100 - x^2$
6. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$
7. $x^2 - 3$
8. $x^2 - 1$
9. $16x^2 - \frac{1}{9}$
10. $\frac{25}{16}x^2y^4 - \frac{4}{9}z^6$

Exercice 65 Factoriser les différences des deux carrés suivantes :

1. $(3x - 1)^2 - 9$
2. $(x + 1)^2 - 4$
3. $(2x + 5)^2 - 16x^2$
4. $25x^2 - (2x - 5)^2$
5. $16x^2 - (3x + 2)^2$
6. $36x^2 - (2 - x)^2$
7. $(x + 3)^2 - (2x + 5)^2$
8. $(3x - 5y)^2 - (2x - 3y)^2$
9. $4(x + 5)^2 - 1$
10. $16x^2 - (3x + 2)^2$
11. $25(x - 3)^2 - 9(2x + 1)^2$

Exercice 66 Factoriser complètement les polynômes suivants :

1. $2x^3 - 18x$
2. $2x^3 + 3x^2 - 2xy^2 - 3y^2$
3. $25x^3 - 50x^2 - 9xy^2 + 18y^2$
4. $x^4 - 81$
5. $x^2 - 1 + (x - 1)^2$
6. $2x^2 - \frac{1}{2}$

$\boxed{\textbf{Exercice 67}}$ Factoriser les trinômes carrés parfaits suivants :

1. $x^2 + 10x + 25$
2. $x^2 - 14x + 49$
3. $4x^2 + 12xy + 9y^2$
4. $25x^2 - 20xy + 4y^2$
5. $9x^4 - 30x^2 + 25$
6. $25x^4 + 30x^2y^3 + 9y^6$
7. $x^2 - x + \frac{1}{4}$
8. $\frac{9}{16}x^2 + x + \frac{4}{9}$

$\boxed{\textbf{Exercice 68}}$ Expliquer pourquoi les trinômes suivants ne sont pas des carrés parfaits.

1. $4x^2 + 6x + 9$
2. $4x^2 + 12x - 9$
3. $-4x^2 + 12x + 9$
4. $9x^2 - 15x + 25$

$\boxed{\textbf{Exercice 69}}$ Compléter les trinômes afin d'obtenir des trinômes carrés parfaits puis les factoriser.

1. $x^2 + \ldots + 9$
2. $4x^2 - \ldots + 9$
3. $9x^2 + 30x + \ldots$
4. $\ldots + 20x + 4$
5. $4x^2 - 28x + \ldots$
6. $\ldots - 6x + 1$
7. $x^2 + \frac{2}{3}x + \ldots$
8. $x^2 - \ldots + \frac{49}{4}$

$\boxed{\textbf{Exercice 70}}$ Factoriser les polynômes suivants :

1. $4x^3 - 12x^2 + 9x$
2. $x^4 - 2x^2 + 1$
3. $-x^2 + 6x - 9$
4. $(x-1)(2x+1) + x^2 - 2x + 1$
5. $(x^2+4)^2 - 16x^2$
6. $x^2(x+1) + 2x(x+1) + (x+1)$

$\boxed{\textbf{Exercice 71}}$ Identifier les coefficients a, b, c des trinômes proposés. Calculer ensuite le discriminant puis indiquer si le trinôme est factorisable.

1. $2x^2 + 3x + 1$
2. $2x^2 - x - 6$
3. $8x^2 + 2x - 15$
4. $-3x^2 + 5x + 2$
5. $x^2 - x + 1$
6. $4x^2 - 12x + 9$

Exercice 72 Factoriser les trinômes suivants par la méthode de la complétion du carré.

1. $x^2 - 10x + 21$
2. $x^2 - 5x - 14$
3. $x^2 - 7x + 12$
4. $x^2 - 9x + 20$
5. $2x^2 + 7x + 3$
6. $3x^2 + 5x - 2$
7. $6x^2 + x - 2$
8. $10x^2 - 19x + 6$

Exercice 73 Factoriser les trinômes suivants par la méthode de la complétion du carré.

1. $x^2 + 8x + 15$
2. $x^2 - 8x + 15$
3. $x^2 + 5x - 14$
4. $x^2 - 5x - 14$
5. $6x^2 + 19x + 15$
6. $2x^2 - 7x - 15$
7. $3x^2 - x - 4$
8. $5x^2 - 17x + 6$

Exercice 74 Factoriser les trinômes suivants :

1. $4x^2 - 12x + 9$
2. $x^2 + 6xy + 8y^2$
3. $x^2 - 2x - 1$
4. $x^2 + 6x + 7$

Exercice 75 Factoriser les trinômes suivants par la méthode “Produit et somme” :

1. $2x^2 + 9x + 4$
2. $6x^2 - 19x + 10$
3. $4x^2 - 5x - 21$
4. $5x^2 - 32x - 21$
5. $12x^2 + 13x + 3$
6. $16x^2 - 26x + 3$
7. $6x^2 + 11x - 10$
8. $8x^2 + 2x - 15$
9. $x^2 + 10x + 24$
10. $x^2 - 7x + 12$

Exercice 76 Factoriser chacun des trinômes de l’exercice précédent par la méthode du discriminant.

Exercice 77 Les trinômes suivants sont de la forme x^2+bx+c (le coefficient de x^2 est égal à 1). Factoriser ces trinômes.

1. $x^2 + 7x + 12$
2. $x^2 - 7x + 10$
3. $x^2 + 2x - 15$
4. $x^2 - 5x - 14$
5. $x^2 + 14x + 48$
6. $x^2 - 15x + 36$

Exercice 78 Factoriser les expressions algébriques suivantes :

1. $2x^3 - 8x^2 + 6x$
2. $6x^4 + 9x^3 + 3x^2$
3. $9x^4 + 6x^2 + 1$
4. $x^4 - 2x^2 + 1$
5. $x^3 + 3x^2 + 2x$
6. $16x^3 + 4x^2y - 2xy^2$
7. $(2x-5)^2 - 4(x-1)^2$
8. $x^8 - y^8$

Exercice 79 Une somme de deux cubes et une différence de deux cubes peuvent se factoriser.

1. Montrer que
   (a) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
   (b) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
2. Factoriser
   (a) $x^3 + 64$
   (b) $8x^3 - 27$
   (c) $27x^3 - 8y^3$

Exercice 80 Simplifier les fractions rationnelles suivantes :

1. $\frac{5x^2}{20x^3}$
2. $\frac{12x^3y^2}{16xy^3}$
3. $\frac{5x+10y}{5x-10y}$
4. $\frac{2x^2+3x}{5x^2+10x}$
5. $\frac{6x^3+4x^2}{9x^2+6x}$
6. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}$
7. $\frac{2x^2-x-6}{2x^2+5x+3}$
8. $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$

Exercice 81 Simplifier les fractions rationnelles suivantes :

1. $\frac{x^2-5x}{x^2-25}$
2. $\frac{x^4-1}{x^3-x}$
3. $\frac{(x+2)^2-9}{x^2-25}$

4. $\frac{x^2+2x-15}{x^2-9}$
5. $\frac{2x^2+7x+3}{4x^2-1}$
6. $\frac{x^2+5x+6}{x^2+x-2}$
7. $\frac{x^2-x-6}{2x^2-5x-3}$
8. $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

Exercice 82 Simplifier les fractions rationnelles suivantes :

1. $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$
2. $\frac{x^3-x}{x^3-2x^2+x}$
3. $\frac{x^2-1}{(x+1)(2x^2-2x)}$
4. $\frac{(x+1)^2+x^2+x}{4x^2-1}$

Exercice 83 Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\frac{12x}{5} \times \frac{10}{3x^2}$
2. $\frac{2x}{x-1} \times \frac{x-1}{5}$
3. $\frac{x-5}{x+1} \times \frac{x-2}{x-5}$
4. $\frac{2x}{2x+1} \times \frac{2x+1}{3x^2}$
5. $\frac{3x-1}{2x-3} \times \frac{4x-6}{3x-1}$
6. $\frac{3x-15}{2x+10} \times \frac{4x+20}{6x-30}$

Exercice 84 Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\frac{2x-4}{x+3} \times \frac{x^2+6x+9}{x^2-4}$
2. $\frac{x^2-1}{x+3} \times \frac{x-3}{x^2-4x+3}$
3. $\frac{2x+3}{x-1} \times \frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-6}$
4. $\frac{2x^2+6x}{x+4} \times \frac{x^2+8x+16}{5x^2+15x}$
5. $\frac{x^2+x-6}{x^2-4x-5} \times \frac{x^2+3x+2}{x^2-6x+8}$
6. $\frac{2x^2-3x-2}{x^2-1} \times \frac{x-1}{2x+1}$

Exercice 85 Effectuer les divisions suivantes :

1. $\frac{x^2-1}{x+2} \div \frac{x-1}{3x+6}$
2. $\frac{x^2-x-2}{x^2-x-6} \div \frac{x+1}{x+2}$
3. $\frac{3x^2+8x-3}{x^2+x-6} \div \frac{2x+1}{x-2}$
4. $\frac{2x^2+2x}{x+5} \div \frac{2x^3-2x}{x^2+10x+25}$
5. $\frac{2x-4}{x^2+6x+9} \div \frac{x^2-4}{x^2-9}$
6. $\frac{x^4-1}{x^2+1} \div \frac{x^2-1}{x+2}$

Exercice 86 Effectuer les opérations suivantes :

1. $\frac{2}{x} + \frac{5}{y}$

2. $\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}$
3. $\frac{4x}{y^2} - \frac{4x-y}{xy}$
4. $\frac{2x+3y}{9x} + \frac{2x-3y}{6y}$

Exercice 87 Effectuer les opérations suivantes et simplifier les résultats :

1. $\frac{x}{x^2-9} - \frac{1}{2x-6}$
2. $\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-5}$
3. $\frac{1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{x-1}$
4. $\frac{2a}{3a-15} + \frac{4a}{2a-10}$

Exercice 88 Effectuer les additions et soustractions suivantes :

1. $\frac{2x+1}{2} - \frac{3x-1}{5}$
2. $\frac{5}{x-2} + \frac{3}{x+3}$
3. $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x+2}{x-1}$
4. $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3}$
5. $\frac{x+1}{x^2-4} - \frac{x-2}{x+2}$
6. $\frac{x+1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{x^2-1}$

Exercice 89 Effectuer les opérations suivantes puis simplifier les s'il y a lieu.

1. $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{x+6}{x^2-4}$
2. $\frac{5}{x^2-2x} + \frac{4}{x^2-4} - \frac{2}{x^2+2x}$

Exercice 90 Décomposer chacune des fractions algébriques suivantes en une somme de fractions partielles :

1. $\frac{1}{x^2+2x-3}$
2. $\frac{5x^2}{x^2-3x-4}$
3. $\frac{x^2+1}{x+1}$