Table des matières

Chapitre 2

Sens de variation. Dérivation

2.1 Introduction

Les économistes disposent aujourd'hui de moyens efficaces pour résoudre certains de leurs problèmes comme, par exemple, la recherche des minimums des coûts, des maximums de profit,... et en particulier la **dérivation**. Lorsque Newton et Leibniz jettent les bases du calcul différentiel, le premier pour résoudre des problèmes de vitesses et d'accélérations, ils ne se doutent pas que ce calcul servira dans des domaines autres que la physique.
Ce chapitre aborde la calcul des dérivées et l'application des dérivées à l'étude des fonctions et de leurs variations.

2.2 Notions préliminaires

2.2.1 Coefficient directeur d'une droite

Lorsque dans un repère, une droite D a pour équation

$$y = ax + b,\ a \neq 0$$

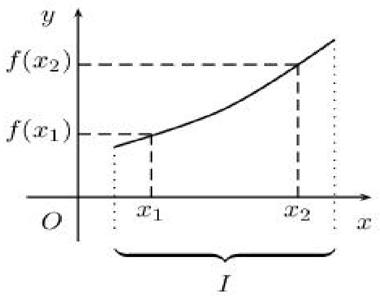
on dit que a est le **coefficient directeur** de la droite D.

Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont deux points de D tels que $x_A \neq x_B$,

$$\boxed{a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}}$$

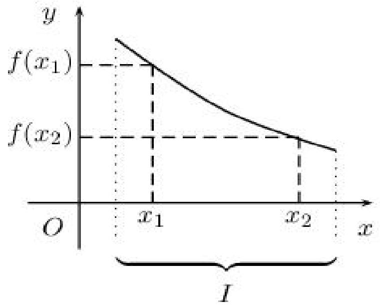
2.2.2 Fonctions monotones

1. Fonction strictement croissante, strictement décroissante.



Dire que f est **strictement croissante** sur l'intervalle I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I,

$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$



Dire que f est **strictement décroissante** sur l'intervalle I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I,

$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$$

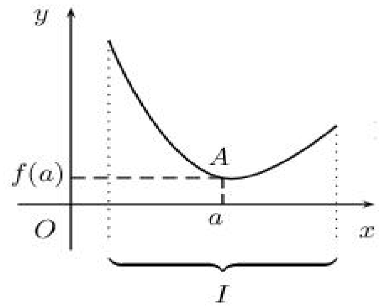
2. Fonction croissante, décroissante.
   La définition d'une fonction **croissante** sur I (respectivement **décroissante**) est analogue à la définition d'une fonction strictement croissante (respectivement strictement décroissante) :

$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)(\text{ respectivement } f(x_1) \geq f(x_2))}$$

3. Fonction monotone.
   Une fonction **strictement monotone** sur I est une fonction qui est soit strictement croissante soit strictement décroissante sur I. On définit de manière analogue une fonction **monotone**.

4. Minimum - Maximum.
   Dire que $f(a)$ est le **minimum** de f sur l'intervalle I signifie que :

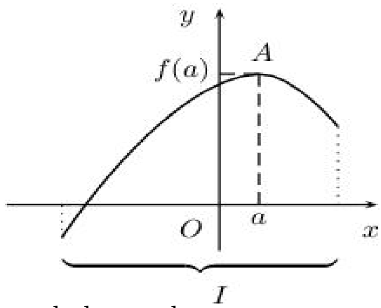
$$\boxed{\forall x \in I,\ f(a) \leq f(x)}$$



Le point $A(a, f(a))$ est le plus bas de la courbe.

Dire que $f(a)$ est le **maximum** de f sur l'intervalle I signifie que :

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(a) \geq f(x)}$$



Le point $A(a, f(a))$ est le plus haut de la courbe.

2.3 Taux de variation

Dans ce paragraphe et le suivant, f est une fonction définie au moins sur un intervalle I et a et $x = a+h$ sont deux points distincts de I ($h \neq 0$).

2.3.1 Définition

Le **taux de variation** de la fonction f entre a et x est le quotient

$$\boxed{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Avec $x = a+h$, ce quotient s'écrit également

$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

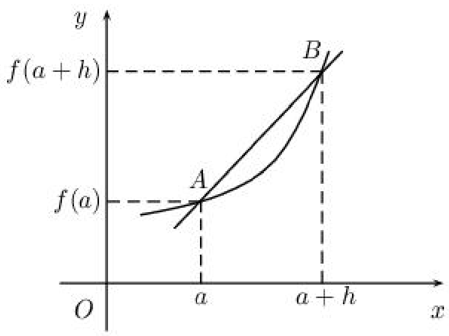
Exemple 2.3.1 Pour la fonction f définie par $f(x) = x^2$, le taux de variation entre a et $a+h$ est

$$\frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = 2a+h$$

2.3.2 Interprétation graphique

Notons A le point de coordonnées $(a, f(a))$ et B le point de coordonnées $(a+h, f(a+h))$. On sait que le coefficient directeur de la sécante (AB) est égal à $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ c'est-à-dire $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est donc égal au coefficient directeur de la sécante (AB).



2.4 Nombre dérivé et tangente

2.4.1 Nombre dérivé - Interprétation géométrique

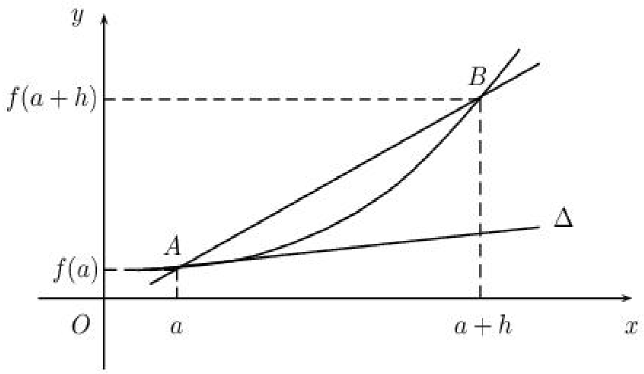
On pose $g(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ce nombre est le taux de variation de f entre a et $a+h$.
Supposons que pour les valeurs de h de plus en plus proches de 0, les nombres $g(h)$ deviennent de plus en plus proches d'un nombre l. On dira alors que

f est **dérivable** en a et l est le **nombre dérivé** de f en a.

Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$ et est défini par

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in]-\infty, +\infty[}$$

Interprétation géométrique



$g(h)$ est le coefficient directeur de la sécante (AB). Lorsque h tend vers 0, B se rapproche de A et les coefficients directeurs des sécantes (AB) tendent vers l. La droite Δ qui passe par A et dont le coefficient directeur est $l = f'(a)$ est la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$.

2.4.2 Exemples

1. Soit $f(x) = 2x^2 + x + 1$, déterminons le nombre dérivé de f en 2.

   . $T(h) = \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{2(2+h)^2 + (2+h) + 1 - 11}{h} = 2h + 9$

   . $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \lim\limits_{h \to 0}(2h + 9) = 9$

   donc f est dérivable en 2 et le nombre dérivé vaut $f'(2) = 9$.

   Interprétation géométrique : On connaît la pente de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x_0 = 2$. Déterminons son équation :

   $$y = f'(2)x + b = 9x + b$$

   Il devient très simple de déterminer b puisque la tangente passe par le point $(2, f(2))$. Ainsi

   $$f(2) = 9 \times 2 + b \Leftrightarrow 11 = 18 + b \Leftrightarrow b = -7$$

   Une équation de la tangente est par conséquent $y = 9x - 7$. Le coefficient directeur de la tangente est 9, un vecteur directeur est $\vec{v}\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

2. Soit $f(x) = x^2 + |x|$, déterminons le nombre dérivé de f en 0.

   $T(h) = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{h^2 + |h|}{h}$

   . Pour $h > 0$, $T(h) = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{h^2 + h}{h} = h + 1$

   . $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = 1$

   f a un nombre dérivé à droite en 0 qui vaut 1. On le note $f'_d(0) = 1$.

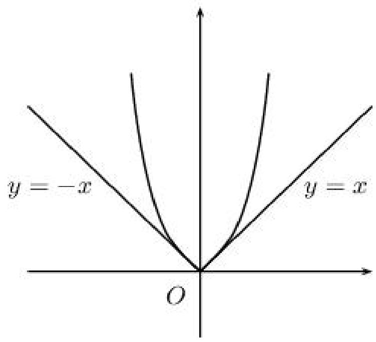
   . Pour $h < 0$, $T(h) = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{h^2 - h}{h} = h - 1$

   . $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = -1$

   f a un nombre dérivé à gauche en 0 qui vaut -1. On le note $f'_g(0) = -1$.

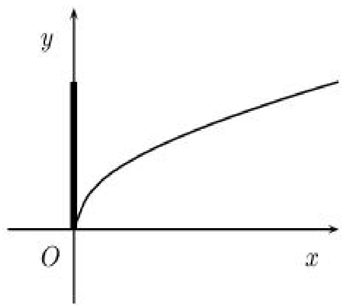
   Comme $f'_g(o) \neq f'_d(0)$, le rapport $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ n'a pas une unique limite lorsque h tend vers 0, f n'est donc pas dérivable au point 0.

Interprétation géométrique. f a un nombre dérivé à droite en $x = 0$ qui vaut 1 donc la courbe a une demi-tangente au point $O\begin{pmatrix} 0 \\ f(0) = 0 \end{pmatrix}$. Son équation est $y = f'(0)x + b$ mais cette demi-droite passe par le point O donc les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la demi-droite soit $0 = f'(0) \times 0 + b \Leftrightarrow b = 0$. Finalement la demi-droite admet pour équation $y = x$.
f admet également un nombre dérivé à gauche en 0 qui vaut -1. On montre comme précédemment que la courbe admet une demi-tangente à l'origine d'équation $y = -x$.



3. Soit $f(x) = \sqrt{x}$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$. Quel est le nombre dérivé de f à droite en 0 ?
. $T(h) = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h} - 0}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$
. $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$
$\lim\limits_{h \to 0} T(h)$ n'est pas un nombre réel, f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation géométrique. On sait que f n'est pas dérivable à droite en 0, cependant la courbe admet une demi-tangente à l'origine qui est parallèle à la droite des ordonnées.



2.4.3 Équation de la tangente

On a pu voir dans les exemples précédents que la détermination de l'équation de la tangente est souvent indispensable. Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point M_0 d'abscisse x_0 étant avant tout une droite de coefficient directeur $f'(x_0)$, son équation est donnée par :

$$(T) \;:\; y = f'(x_0)x + b$$

Comme cette droite passe par le point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, on a

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b \Leftrightarrow b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

Finalement, en remplaçant b par sa valeur dans l'équation de la tangente on obtient

$$(T) \;:\; y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

formule qui est généralement utilisée sous le format suivant :

$$\boxed{(T) \;:\; y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

2.5 La fonction dérivée

2.5.1 Définitions

Soit f une fonction ayant un nombre dérivé en tout point de l'intervalle $I =]a, b[$. On dit que f est **dérivable sur** $]a, b[$.
Si de plus f est dérivable à droite en a et à gauche en b, f est alors **dérivable sur** $[a, b]$.

Soit maintenant une fonction f dérivable sur un intervalle I. On appelle **fonction dérivée de f**, la fonction notée f' définie par

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f' : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{array}}$$

2.5.2 Exemple

Soit la fonction $f(x) = 2x^2 + 1$. On veut déterminer la fonction dérivée de f.

. $T(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{2(x+h)^2 + 1 - 2x^2 - 1}{h} = \dfrac{4xh + 2h^2}{h} = 4x + 2h$

. $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \lim\limits_{h \to 0} (4x + 2h) = 4x = f'(x)$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x$.

2.6 Les fonctions dérivées usuelles

2.6.1 Somme et produit de deux fonctions

Soient deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I alors

- $f = u + v$ est dérivable sur I et
$$\boxed{f' = u' + v'}$$
- $f = ku$ avec $k \in \mathbb{R}$ est dérivable sur I et
$$\boxed{f' = ku'}$$
- $f = uv$ est dérivable sur I et
$$\boxed{f' = u'v + v'u}$$
- $f = \dfrac{u}{v}$. Supposons de plus que $\forall x \in I$, $v(x) \neq 0$ alors f est dérivable sur I et
$$\boxed{f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}}$$
- $f = u^n$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$ est dérivable sur I et
$$\boxed{f' = nu'u^{n-1}}$$
- $f = \dfrac{1}{u}$. Supposons de plus que $\forall x \in I$, $u(x) \neq 0$ alors f est dérivable sur I et
$$\boxed{f' = \dfrac{-u'}{u^2}}$$
- $f = \sqrt{u}$. Supposons de plus que $\forall x \in I$, $u(x) > 0$ alors f est dérivable sur I et
$$\boxed{f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

- $f = u^n$ avec $n \in \mathbb{Q}^\star$. Supposons de plus que $\forall x \in I$, $u(x) > 0$ alors f est dérivable sur I et

$$\boxed{f' = nu'u^{n-1}}$$

2.6.2 Dérivées des fonctions usuelles

On a le tableau suivant :

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^\star$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^\star$	$\mathbb{R}^\star$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{+\star}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Q}^\star$	$\mathbb{R}^{+\star}$	$\mathbb{R}^{+\star}$	$f'(x) = nx^{n-1}$

2.6.3 Dérivées des fonctions logarithme népérien et exponentielle népérienne

1. Soit $f(x) = \ln x$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x}}$$

2. Soit $f(x) = e^x$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{f'(x) = e^x}$$

3. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et on suppose que $\forall x \in I$, $u(x) > 0$. La fonction $f = \ln u$ est dérivable sur I et

$$\boxed{f' = \frac{u'}{u}}$$

4. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, la fonction $f = e^u$ est dérivable sur I et

$$\boxed{f' = u'e^u}$$

5. Soit $f(x) = \ln|x|$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x}}$$

6. Soit u une fonction dérivable sur I. Supposons que $\forall x \in I$, $u(x) \neq 0$ alors la fonction $f = \ln|u|$ est dérivable sur I et

$$\boxed{f' = \frac{u'}{u}}$$

2.6.4 Exemples

1. Soit $f(x) = 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 - \sqrt{2}x^2 + 1$, f est une fonction polynomiale, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 2 \times 5 \times x^{5-1} + 3 \times 4 \times x^{4-1} - 2 \times 3 \times x^{3-1} - \sqrt{2} \times 2 \times x^{2-1} + 0$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = 10x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 2\sqrt{2}x$$

2. Soit $f(x) = (2x^2 + x + 1)(x^3 + 2x^2 - 5)$, on veut déterminer la dérivée d'une fonction produit de deux polynômes. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = (2x^2 + x + 1)'(x^3 + 2x^2 - 5) + (2x^2 + x + 1)(x^3 + 2x^2 - 5)'$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = (4x + 1)(x^3 + 2x^2 - 5) + (2x^2 + x + 1)(3x^2 + 4x)$$

3. Soit $f(x) = (2x^2 + x + 1)^2$, on veut déterminer la dérivée d'une fonction polynomiale élevée au carré. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 2(2x^2 + x + 1)'(2x^2 + x + 1)^{2-1}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = 2(4x + 1)(2x^2 + x + 1)$$

4. Soit $f(x) = (3x^4 - 5x^2 + 1)^3$, on veut déterminer la dérivée d'une fonction polynomiale élevée au cube. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 3(3x^4 - 5x^2 + 1)'(3x^4 - 5x^2 + 1)^{3-1}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = 3(12x^3 - 10x)(3x^4 - 5x^2 + 1)^2$$

5. Soit $f(x) = (2x + 1)(3x^2 + x)(4x^2 + x + 2)$, on veut déterminer la dérivée d'une fonction produit de trois polynômes.

   Remarque 2.6.1 Si u, v et w sont des fonctions dérivables sur I, $f = uvw$ est dérivable sur I et $f' = u'vw + uv'w + uvw'$.

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = (2x+1)'(3x^2+x)(4x^2+x+2) + (2x+1)(3x^2+x)'(4x^2+x+2) + (2x+1)(3x^2+x)(4x^2+x+2)'$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = 2(3x^2 + x)(4x^2 + x + 2) + (2x + 1)(6x + 1)(4x^2 + x + 2) + (2x + 1)(3x^2 + x)(8x + 1)$$

6. Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-2}$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$, on veut déterminer la dérivée d'une fonction rationnelle. On a $\forall x \in \mathcal{D}_f$,
$$f'(x) = \frac{(2x+1)'(3x-2) - (2x+1)(3x-2)'}{(3x-2)^2}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2(3x-2) - 3(2x+1)}{(3x-2)^2} = \frac{-7}{(3x-2)^2}$$

7. Soit $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{2x-3}$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$. On a $\forall x \in \mathcal{D}_f$,
$$f'(x) = \frac{(x^2+x+1)'(2x-3) - (x^2+x+1)(2x-3)'}{(2x-3)^2}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{(2x+1)(2x-3) - 2(x^2+x+1)}{(2x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-5}{(2x-3)^2}$$

8. Soit $f(x) = \dfrac{(2x+1)^3}{(2x-1)^2}$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. On a $\forall x \in \mathcal{D}_f$

$$f'(x) = \frac{((2x+1)^3)'(2x-1)^2 - (2x+1)^3((2x-1)^2)'}{((2x-1)^2)^2}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{3\times 2(2x+1)^2(2x-1)^2 - 2\times 2(2x+1)^3(2x-1)}{(2x-1)^4}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2(2x+1)^2(2x-1)[3(2x-1)-2(2x+1)]}{(2x-1)^4}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2(2x+1)^2(2x-5)}{(2x-1)^3}$$

9. Soit $f(x) = \dfrac{3}{2x-1}$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. On a $\forall x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = \frac{-3(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{-6}{(2x-1)^2}$$

10. Soit $f(x) = \dfrac{5}{(4x-1)^3} = 5(4x-1)^{-3}$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.
On a $\forall x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = 5(-3)(4x-1)'(4x-1)^{-3-1} = (-15)\times 4(4x-1)^{-4} = \frac{-60}{(4x-1)^4}$$

11. Soit $f(x) = \sqrt{2x-1}$ avec $\mathcal{D}_f = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. Le domaine de dérivabilité de f' est $\mathcal{D}_{f'} = \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. On a $\forall x \in \mathcal{D}_{f'}$,

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

12. Soit $f(x) = 3\sqrt{2x^2+x+1}$. On calcule le discriminant du trinôme, $\Delta = -7 < 0$ ce qui signifie que $2x^2+x+1 > 0$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

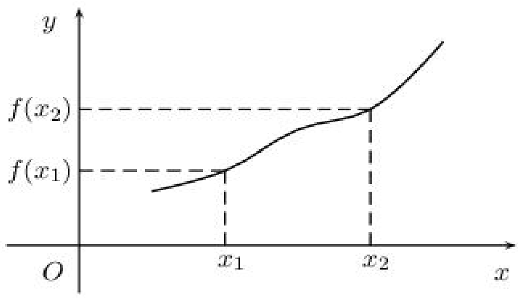
$$f'(x) = \frac{3(2x^2+x+1)'}{2\sqrt{2x^2+x+1}} = \frac{3(4x+1)}{2\sqrt{2x^2+x+1}}$$

2.7 Sens de dérivation d'une fonction

2.7.1 Fonction croissante sur un intervalle

Définition 2.7.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La fonction f est* ***strictement croissante*** *sur I si et seulement si*

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$

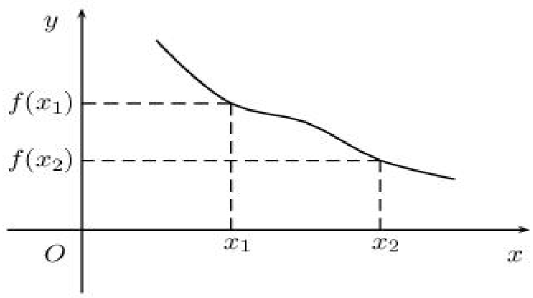


Théorème 2.7.1 *Soit f une fonction dérivable sur I. Si $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.*

2.7.2 Fonction décroissante sur un intervalle

Définition 2.7.2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La fonction f est* ***strictement décroissante*** *sur I si et seulement si*

$$\boxed{\forall(x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$$

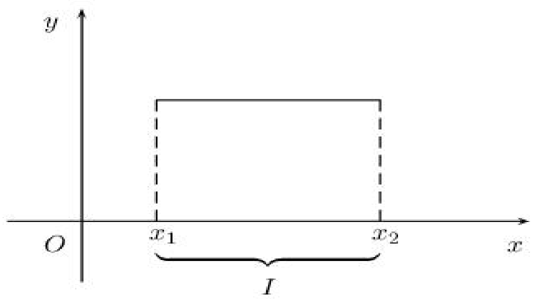


Théorème 2.7.2 *Soit f une fonction dérivable sur I. Si $\forall x \in I,\ f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.*

2.7.3 Fonction constante sur un intervalle

Définition 2.7.3 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La fonction f est* ***constante*** *sur I si et seulement si*

$$\boxed{\forall(x_1, x_2) \in I^2,\ f(x_1) = f(x_2)}$$



2.7.4 Exemple

Soit la fonction polynomiale f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 1$. On veut étudier le sens de variation de cette dernière.

Dérivons f :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

On peut en déduire ensuite, à l'aide d'un tableau de signes, le sens de variation de la fonction :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

On remarque que la dérivée f' s'annule en -1 et 1, ce qui signifie qu'aux points $(-1, f(-1))$ et $(1, f(1))$, les tangentes à la courbe représentative de f sont parallèles à l'axe des abscisses (leur coefficient directeur est nul). On parle dans ce cas de tangentes horizontales.

2.8 Point d'inflexion - Concavité

2.8.1 Fonction dérivée seconde

Définition 2.8.1 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, supposons de plus que f' soit dérivable sur I, la fonction dérivée de f' est appelée* ***fonction dérivée seconde*** *de f et notée f''.*

Exemple 2.8.1 Soit la fonction $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$. Déterminons la dérivée seconde de f, on a $\forall x \in \mathbb{R}$,

. $f'(x) = 8x^3 + 6x$

. $f''(x) = 24x^2 + 6$

2.8.2 Position de la courbe et de la tangente

On a vu précédemment qu'une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 était

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

La position de la courbe par rapport à la tangente est précisée en étudiant le signe de la fonction g définie par

$$g(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$$

Étudions le signe de cette fonction. On dérive g une première fois

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

puis une seconde

$$g''(x) = f''(x).$$

Différents cas peuvent survenir :

- On considère un intervalle centré en x_0 et on suppose que $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $f''(x) > 0$.

x	$x_0 - \alpha$		x_0		$x_0 + \alpha$
signe de $g''(x)$			$+$		
variations de g'		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

À l'aide du tableau, on peut montrer que $\forall x \in I$,

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

– La courbe est située au dessus de la tangente.

– La courbe a sa concavité tournée du côté des y positifs,

$$\boxed{f \text{ est dite } \textbf{convexe} \text{ sur }]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[}$$

- On considère le même intervalle centré en x_0 que précédemment et on suppose cette fois-ci que $\forall x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, $f''(x) < 0$.

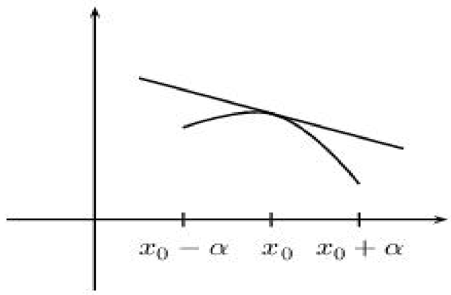
x	$x_0-\alpha$	x_0	$x_0+\alpha$
signe de $g''(x)$		$-$	
variations de g'	$\searrow$	0	$\searrow$
signe de $g'(x)$	$+$	0	$-$
variations de g	$\nearrow$	0	$\searrow$

À l'aide du tableau, on peut montrer que $\forall x \in I$,

$$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)$$

– La courbe est située en dessous de la tangente.
– La courbe a sa concavité tournée du côté des y négatifs,

$\boxed{f \text{ est dite } \textbf{concave} \text{ sur }]x_0-\alpha, x_0+\alpha[}$



- On suppose que $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en x_0, il existe alors deux cas possibles.

. 1er cas :

x	$x_0-\alpha$	x_0	$x_0+\alpha$
signe de $f''(x)$	$+$	0	$-$

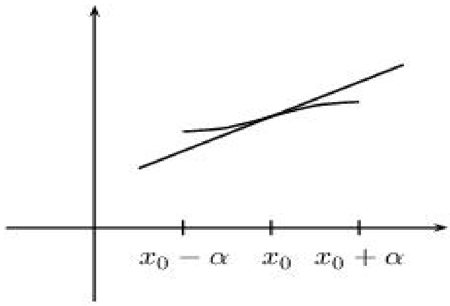
On a le tableau de signes et de variations suivant :

x	$x_0-\alpha$	x_0	$x_0+\alpha$
signe de $g''(x)$	$+$	0	$-$
variations de g'	$\nearrow$	0	$\searrow$
signe de $g'(x)$		$-$	
variations de g	$\searrow$	0	$\searrow$
signe de $g(x)$	$+$	0	$-$

On remarque donc que $g(x)$ change de signe en x_0. Par conséquent,

$$x < x_0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

– La courbe est située au dessus de la tangente.
– Au point d'abscisse x_0, la courbe traverse sa tangente, le point $(x_0, f(x_0))$ est appelé **point d'inflexion**. En x_0, la courbe change de concavité.



. 2ème cas :

x	$x_0 - \alpha$	x_0	$x_0 + \alpha$
signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$

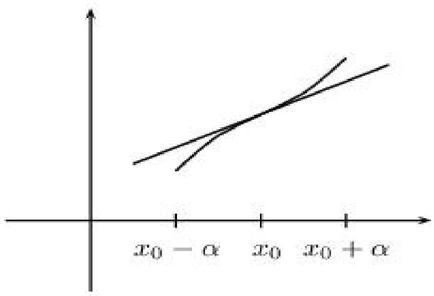
On a le tableau de signes et de variations suivant :

x	$x_0 - \alpha$	x_0	$x_0 + \alpha$
signe de $g''(x)$	$-$	0	$+$
variations de g'	$\searrow$	0	$\nearrow$
signe de $g'(x)$		$+$	
variations de g	$\nearrow$	0	$\nearrow$
signe de $g(x)$	$-$	0	$+$

On remarque donc que $g(x)$ change de signe en x_0. Par conséquent,

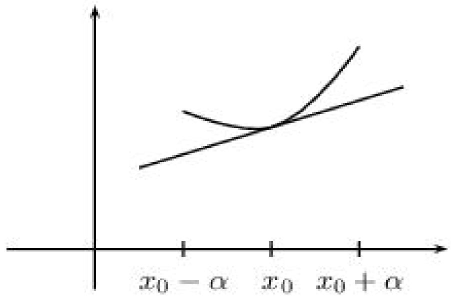
$$x < x_0 \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

– La courbe est située en dessous de la tangente.
– Au point d'abscisse x_0, la courbe traverse sa tangente, le point $(x_0, f(x_0))$ est appelé **point d'inflexion**. En x_0, la courbe change de concavité.



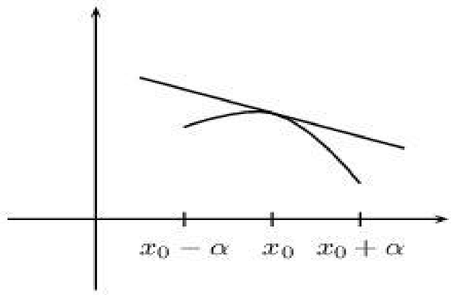
Conclusion

- $\forall x \in I,\ f''(x) > 0$



La courbe a sa concavité tournée du côté des y positifs, f est convexe sur I, la courbe est située au dessus de la tangente en chacun des points de I.

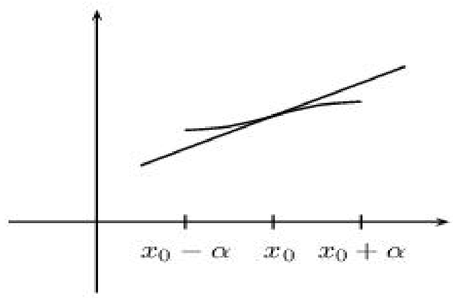
- $\forall x \in I,\ f''(x) < 0$



La courbe a sa concavité tournée du côté des y négatifs, f est concave sur I, la courbe est située en dessous de la tangente en chacun des points de I.

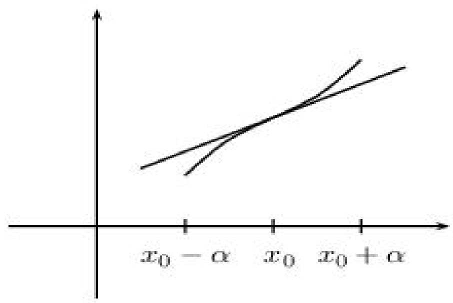
-

x	$x_0 - \alpha$	x_0	$x_0 + \alpha$
signe de $f''(x)$	$+$	0	$-$



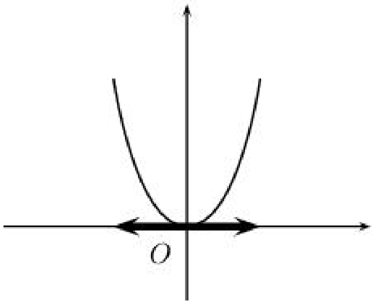
-

x	$x_0 - \alpha$	x_0	$x_0 + \alpha$
signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$



La courbe traverse sa tangente en x_0, au point $(x_0, f(x_0))$ il y a changement de concavité. Ce point $(x_0, f(x_0))$ est appelé point d'inflexion.

Remarque 2.8.1 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^4$. Les dérivées première et seconde sont respectivement $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2$. Comme $f''(0) = 0$, la dérivée seconde s'annule en $x = 0$ mais $\forall x \in \mathbb{R}^\star$, $f''(x) > 0$. $f''(x)$ ne change pas de signe en $x = 0$, l'origine n'est pas un point d'inflexion.
$\forall x \in \mathbb{R}^\star$, $f''(x) > 0$, f est convexe.



2.9 Exercices

Exercice 105 Dériver les fonctions définies ci-dessous :

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$
3. $h(x) = \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$
4. $k(x) = \dfrac{x+5}{x^2+1}$

Exercice 106 Dériver les fonctions définies ci-dessous :

1. $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$
2. $g(x) = (2x+3)(3x-7)$
3. $h(x) = \dfrac{2x+4}{3x-1}$ pour $x \neq \dfrac{1}{3}$
4. $k(x) = (2x^2 + 3x + 1)^5$

Exercice 107 On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 1$. On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique. On considère également la fonction g définie par $g(x) = 3 - x$. On note D sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = 2$.
3. Résoudre, par calcul, l'équation $g(x) = f(x)$.
4. Préciser les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et D.
5. Tracer sur un même repère les droites T, D et la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 108 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Soit A le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A.
3. Soit B le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathcal{C}_f$ en B.

4. Tracer sur un même repère T_A, T_B et $\mathcal{C}_f$.

Exercice 109 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x,\ g(x) = x^3 - 3x.$$

1. Étude de f.
   (a) Calculer la dérivée f' de f.
   (b) Étudier le signe de la dérivée f'.
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
2. Étude de g.
   (a) Calculer la dérivée g' de g.
   (b) Étudier le signe de la dérivée g'.
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction g.
3. Comparaison des deux fonctions.
   (a) Graphiques.
      i. Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentant les fonctions f et g (on se limitera à l'intervalle $[-2; 2]$ et on prendra un pas de $0,5$).
      ii. À l'aide du graphique, déterminer le nombre de points d'intersections entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et leurs coordonnées.
   (b) Pour avoir plus de précision, on se propose de retrouver ces résultats par calcul :
      i. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
      ii. En déduire, par calcul, les coordonnées des points A et B d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 110 On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que f est une fonction impaire.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f.
3. Quel est le signe du dénominateur de $f'(x)$?
4. Résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum.
6. Tracer (soigneusement) la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-4; 4]$.

Exercice 111 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1,\ g(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

1. Étude de f.
   (a) Calculer la dérivée f' de f.
   (b) Étudier le signe de la dérivée f'.
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
2. Étude de g.
   (a) Calculer la dérivée g' de g.
   (b) Étudier le signe de la dérivée g'.
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction g.

3. Comparaison des deux fonctions.
   (a) Graphiques.
      i. Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentant les fonctions f et g (on se limitera à l'intervalle $[-3; 5]$ et on prendra un pas de $0,25$).
      ii. À l'aide du graphique, déterminer le nombre de point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Quelles sont leurs coordonnées ?
   (b) Pour avoir plus de précision, on se propose de retrouver ces résultats par calcul.
      i. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
      ii. En déduire, par calcul, les coordonnées du point d'intersection A entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 112 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.
1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Étudier le signe de la dérivée f'.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction f (on précisera les éventuels extrémums).
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f sur l'intervalle $[-1; 3]$.
5. Déterminer, par un calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

Exercice 113
1. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 114 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 3$. On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique.
1. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. Tracer T et $\mathcal{C}_f$ (dans un même repère).
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2; 3]$
6. Donner une valeur approchée de α, par défaut, à 10^{-1} près.

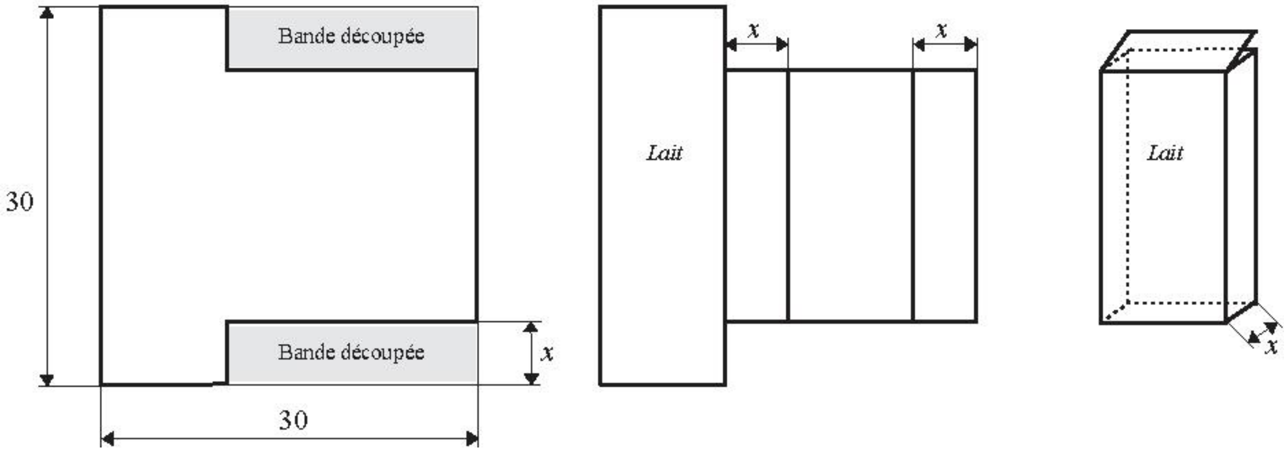
Exercice 115 On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.
1. Déterminer ses dimensions (Longueur L et largeur ℓ) sachant que son aire S est égale à $\dfrac{3}{4}$ cm^2.
2. On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.
   (a) Exprimer S en fonction de ℓ.
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2 - x)$. Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f. Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$.
   (c) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

Exercice 116
1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.
   (a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 20]$. Dresser le tableau de variations de f.
   (b) Déterminer une équation de la tangente D à la représentation graphique de f au point d'abscisse 0.

(c) Déterminer, par calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

(d) Tracer D et la représentation graphique de f pour $x \in [0; 20]$.

2. Un fabriquant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée.



Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées. On suppose que $0 < x < 15$.

(a) Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

(b) Pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est-il maximal ? Préciser la valeur de ce volume maximal en litres.

Exercice 117 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - x + 2$ sur l'intervalle $[-2; 2]$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Donner (en justifiant) l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
2. Tracer (dans un même repère) $\mathcal{C}_f$ et cette tangente sur l'intervalle $[-2; 2]$.

Exercice 118 Soit $\mathcal{P}$ la parabole définie par la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ($x \in \mathbb{R}$). Calculer les coordonnées de son sommet S.

Exercice 119 Un camion doit faire un trajet de 150 km. Sa consommation de gasoil est de $6 + \dfrac{\nu^2}{300}$ litres par heure, où ν désigne sa vitesse en km/h. Le prix du gasoil est de $0,9$ euros le litre, et on paie le chauffeur 12 euros par heure.

1. Soit t la durée du trajet en heure. Exprimer t en fonction de la vitesse ν.
2. Calculer le prix de revient $P(\nu)$ du trajet en fonction de ν.
3. Quel doit être la vitesse ν du camion pour que le prix de revient $P(\nu)$ de la course soit minimal ?

Exercice 120 Le but de cet exercice est de calculer la limite suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{2005} - 1}{h}.$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^{2005}$.

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f. Puis calculer $f'(0)$.
2. Calculer l'accroissement moyen de la fonction f entre 0 et h. En déduire la limite ci-dessus.

Exercice 121 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x + 1$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Donner (en justifiant) l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
2. Tracer (dans un même repère) $\mathcal{C}_f$ et cette tangente sur l'intervalle $[-1; 1,5]$.

Exercice 122

1. Dériver les fonctions f et g définies ci-dessous :
$$f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}} \text{ sur }]0;+\infty[, \quad g(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^3 \text{ sur } \mathbb{R}\backslash\{-1\}.$$
2. Calculer $f'(16)$ et $g'(2)$.

Exercice 123 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x}$.

1. Calculer la dérivée f' puis étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sur $[-4; 0[\cup]0; 4]$.

Exercice 124 Soit C la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par :
$$f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-2},\ a, b \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Déterminer a et b tels que la droite d'équation $y = 8$ soit tangente à C au point d'abscisse 3.
3. Déterminer les limites suivantes :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to2^-} f(x),\ \lim_{x\to2^+} f(x).$$
4. Déduire de la question 3. que C admet une asymptote dont on précisera une équation.
5. Déterminer l'abscisse de l'autre point de C où la tangente est horizontale.

Exercice 125

1. Factoriser le polynôme $P(x) = x^2 + 2x - 3$.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -2x^2 + 1 \text{ et } g(x) = x^3 - 3x + 1.$$

2. Étudier la parité des fonctions f et g.
3. Étudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions f et g.
4. Calculer les dérivées f' et g'. Étudier leur signe.
5. Dresser les tableaux de variation des fonctions f et g.
6. Tracer les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g (on se limitera à l'intervalle $[-3; 3]$).
7. Résoudre, par calcul, l'inéquation $f(x) \leq g(x)$. (On pourra utiliser la question 1.)

Exercice 126 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par :
$$f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-2}.$$

1. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$, $+\infty$, 2^- et 2^+. Préciser les éventuelles asymptotes horizontales et verticales.
2. Calculer la dérivée f' et étudier son signe.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique D.
   (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que :
   $$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}.$$
   (b) En déduire que la droite D d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (c) Tracer $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

Exercice 127 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$.

1. Montrer que f est dérivable en 2.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentant f au point d'abscisse 2.

Exercice 128 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$ par $f(x) = \dfrac{-3}{x+4} + 2$ On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentant la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, -4^-, -4^+. Préciser les équations des éventuelles asymptotes.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f et préciser son signe.
3. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f (on n'oubliera pas d'y reporter les limites calculées à la question 1. ainsi que la valeur interdite).
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ avec ses éventuelles asymptotes. (Conseil : tracer d'abord les asymptotes, s'il y en a ...)

Exercice 129 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{-2}{x-1} + 3$. On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les limites de f en 1^- et en 1^+.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f. Quel est son signe ?
4. Dresser le tableau de variation (complet) de la fonction f.
5. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $x = \dfrac{1}{2}$.
6. Sur une feuille séparée, tracer T, $\mathcal{C}_f$ (Unités graphiques : au moins 2 cm par unité sur chaque axe)
7. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 1$.