Table des matières

0 Rappels sur les polynômes et fractions algébriques **1**
0.1 Puissances . . . 1
0.1.1 Puissance d'un nombre réel . . . 1
0.1.2 Loi des exposants . . . 1
0.1.3 Puissance d'exposant entier négatif . . . 2
0.1.4 Puissance d'exposant rationnel . . . 2
0.1.5 Racine n-ième d'un nombre réel . . . 3
0.1.6 Propriétés des radicaux . . . 3
0.1.7 Réduction du radicande . . . 3
0.2 Polynômes . . . 4
0.2.1 Monômes . . . 4
0.2.2 Opérations entre monômes . . . 4
0.2.3 Polynômes . . . 4
0.2.4 Somme et différence de polynômes . . . 5
0.2.5 Produit de polynômes . . . 5
0.2.6 Identités remarquables . . . 5
0.2.7 Quotient de polynômes . . . 6
0.2.8 Théorème du reste . . . 6
0.3 Factorisation . . . 6
0.3.1 Mise en évidence simple . . . 6
0.3.2 Mise en évidence double . . . 7
0.3.3 Différence de deux carrés . . . 7
0.3.4 Factorisation en plusieurs étapes . . . 7
0.3.5 Trinômes carrés parfaits . . . 7
0.3.6 Discriminant d'un trinôme du second degré . . . 8
0.3.7 Trinôme du second degré : méthode "Complétion du carré" . . . 8
0.3.8 Trinôme du second degré : méthode "Produit et somme" . . . 8
0.3.9 Trinôme du second degré : méthode du discriminant . . . 8
0.4 Fractions rationnelles . . . 8
0.4.1 Fraction rationnelle . . . 8
0.4.2 Addition et soustraction de fractions rationnelles . . . 9
0.4.3 Multiplication et division de fractions rationnelles . . . 9
0.4.4 Décomposition en une somme de fractions rationnelles . . . 10
0.5 Exercices . . . 10

1 Trinômes du second degré **29**
1.1 Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ . . . 29
1.1.1 Transformation de l'équation . . . 29
1.1.2 Résolution de l'équation . . . 29
1.2 Étude du signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ . . . 30
1.3 Application à la recherche du domaine de définition d'une fonction . . . 31
1.4 Remarques . . . 33

1.5 Tableau récapitulatif . . . 34
1.6 Exercices . . . 34

2 Sens de variation. Dérivation **39**
2.1 Introduction . . . 39
2.2 Notions préliminaires . . . 39
2.2.1 Coefficient directeur d'une droite . . . 39
2.2.2 Fonctions monotones . . . 39
2.3 Taux de variation . . . 41
2.3.1 Définition . . . 41
2.3.2 Interprétation graphique . . . 41
2.4 Nombre dérivé et tangente . . . 41
2.4.1 Nombre dérivé - Interprétation géométrique . . . 41
2.4.2 Exemples . . . 42
2.4.3 Équation de la tangente . . . 43
2.5 La fonction dérivée . . . 44
2.5.1 Définitions . . . 44
2.5.2 Exemple . . . 44
2.6 Les fonctions dérivées usuelles . . . 44
2.6.1 Somme et produit de deux fonctions . . . 44
2.6.2 Dérivées des fonctions usuelles . . . 45
2.6.3 Dérivées des fonctions logarithme népérien et exponentielle népérienne . . . 45
2.6.4 Exemples . . . 46
2.7 Sens de dérivation d'une fonction . . . 47
2.7.1 Fonction croissante sur un intervalle . . . 47
2.7.2 Fonction décroissante sur un intervalle . . . 48
2.7.3 Fonction constante sur un intervalle . . . 48
2.7.4 Exemple . . . 48
2.8 Point d'inflexion - Concavité . . . 49
2.8.1 Fonction dérivée seconde . . . 49
2.8.2 Position de la courbe et de la tangente . . . 49
2.9 Exercices . . . 53

3 Le logarithme et l'exponentielle **59**
3.1 Le logarithme népérien . . . 59
3.1.1 Présentation de la fonction . . . 59
3.1.2 Logarithme d'une fonction . . . 60
3.1.3 Logarithme décimal et applications . . . 61
3.2 L'exponentielle . . . 63
3.2.1 Présentation de la fonction . . . 63
3.2.2 Formules fondamentales . . . 64
3.2.3 Étude de la fonction exponentielle . . . 64
3.2.4 Fonctions du type e^u . . . 65
3.2.5 Fonctions exponentielles de base a . . . 66
3.3 Exercices . . . 67

Chapitre 3

Le logarithme et l'exponentielle

3.1 Le logarithme népérien

3.1.1 Présentation de la fonction

Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur I. Mais ce n'est pas parce qu'une fonction admet des primitives que l'on sait pour autant les écrire simplement.
Ainsi la fonction "inverse" définie sur $]0,+\infty[$ par $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet en effet des primitives mais celles-ci ne peuvent s'exprimer à l'aide de fonctions déja connues. L'une de ces primitives est la fonction *logarithme népérien* de Neper, mathématicien écossais (1550-1617), inventeur de ce logarithme.

Définition 3.1.1 *La fonction inverse* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *admet des primitives sur* $]0,+\infty[$ *qui s'écrivent :*

$$\boxed{\ln(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}}$$

La fonction logarithme népérien est caractérisée par 3 propriétés.

Proposition 3.1.1

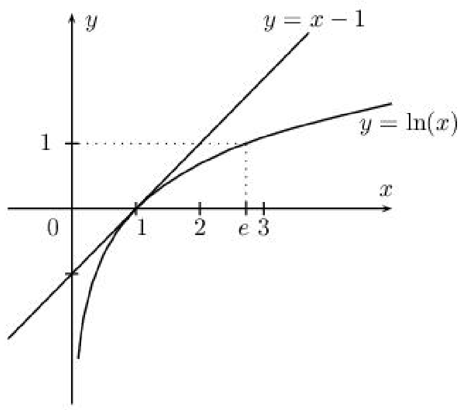
- *L'ensemble de définition de "*$\ln$*" est* $]0,+\infty[$.
- $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ (\ln(x))' = \frac{1}{x}$.
- $\ln(1) = 0$.

Pour étudier les variations de $x \mapsto \ln(x)$, il suffit d'étudier le signe de la dérivée de cette fonction c'est-à-dire le signe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est strictement positive sur $]0,+\infty[$. On a le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
signe de $\frac{1}{x}$		+	
variations de ln	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

Proposition 3.1.2

- *La fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$.
- $\lim\limits_{x \mapsto \infty} \ln x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \mapsto 0} \ln x = -\infty$



Afin de tracer cette représentation, il est à noter que

– L'axe des ordonnées est *asymptote* à la courbe, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = +\infty$

> *Rappel* : Si f admet une limite infine en a, alors la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale* à $\mathcal{C}$.
> Si f admet une limite finie l en $+\infty$ ou en $-\infty$, alors la droite d'équation $y = l$ est *asymptote horizontale* à $\mathcal{C}$.

– La tangente au point $(1, 0)$ a pour coefficient directeur 1. En effet,

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = \ln(1) + \frac{1}{(1)}(x_1) \Leftrightarrow y = x - 1$$

On déduit de la croissance stricte de la fonction ln les propriétés ci-dessous :

Propriété 3.1.1 $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+\star}$,

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$

En particulier, si $x > 1$ alors $\ln(x) > \ln(1) \Leftrightarrow \ln(x) > 0$
si $0 < x < 1$ alors $\ln(x) < \ln(1) \Leftrightarrow \ln(x) < 0$.

La fonction ln est dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. De plus,

$$\boxed{\ln(1) = 0 \text{ et } \lim_{x \to \infty} \ln(x) = +\infty}.$$

La fonction ln prend donc une fois et une seule toute valeur supérieure à 0. Donc le nombre 1 a un antécédent unique pour la fonction ln, que l'on note e :

$$\boxed{\ln(e) = 1 \text{ et } e \simeq 2,71828}$$

3.1.2 Logarithme d'une fonction

On étudie dans cette partie les fonctions

$$x \mapsto \ln[u(x)]$$

qui ne sont définies que si $u(x)$ est strictement positif.

On considère l'exemple suivant.

Exemple 3.1.1 Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$.

– Quand $x \to +\infty$, $1 + \dfrac{2}{x} \to 1$ or $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
– Quand $x \to 0$, $1 + \dfrac{2}{x} \to +\infty$ or $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Théorème 3.1.1 *Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. La fonction* $\ln(u)$ *est dérivable sur I et*

$$\boxed{(ln(u))' = \frac{u'}{u}}$$

Exemple 3.1.2 Soit f définie sur $\left]\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = \ln(2x-3)$. Ici, $u(x) = 2x - 3$ et $u'(x) = 2$ donc $f'(x) = \dfrac{2}{2x-3}$.

Théorème 3.1.2 *Soit une fonction u dérivable et strictement positive sur I. La fonction $f = \dfrac{u'}{u}$ admet pour primitives sur I les fonctions*

$$\boxed{x \mapsto \ln[u(x)] + k \text{ où } k \in \mathbb{R}}.$$

Théorème 3.1.3 *Pour tous réels a et b strictement positifs,*

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + ln(b)}$$

On déduit de cette formule les propriétés suivantes :

Propriété 3.1.2

- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n \ln(a)$,
  $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2} \ln(a)$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln(1) - \ln(b) = -\ln(b)$,
  $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

3.1.3 Logarithme décimal et applications

Par définition, pour tout réel $x > 0$,

$$\boxed{\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}}$$

La fonction "log", définie sur $]0, +\infty[$, est la fonction *logarithme décimal*, ou de base 10.

Exemple 3.1.3 On se donne quelques valeurs de x ainsi que les valeurs obtenues pour $\ln(x)$, $\log(x)$:

x	10^{-1}	1	10	100	10^3	10^n
$\ln(x)$	$-2,303$	0	$2,303$	$4,605$	$6,908$	$2,303n$
$\log(x)$	-1	0	1	2	3	n

Étudions maintenant les variations de la fonction log : $\forall x \in]0; +\infty[$,

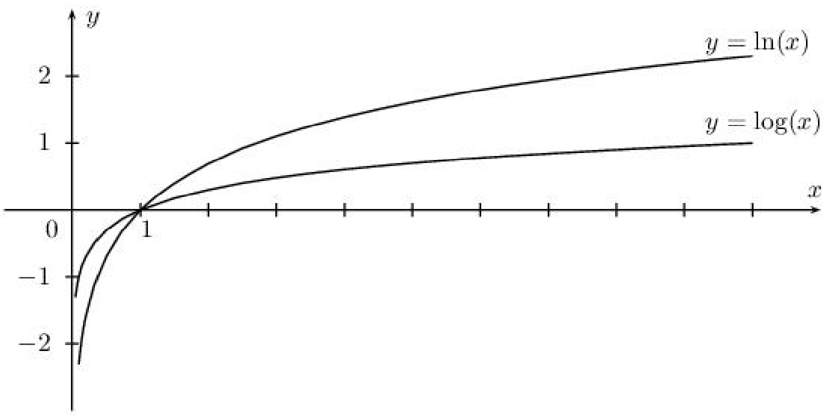
$$\log(x)' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(10)}\right)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln(10)}$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
signe de $\log(x)'$		$+$	
variations de log	$-\infty$	0	$+\infty$

Il est évident que les variations de la fonction log sont identiques à celles de ln puisque les deux fonctions sont proportionnelles, c'est-à-dire égales à un facteur multiplicatif près.

Comparons maintenant les représentations graphiques de ces deux fonctions :



Intéressons nous maintenant à la notion de repère semi-logarithmique.
Sur une feuille de papier millimétré, on trace les axes $[0, x)$ et $[0, y)$. On gradue l'axe $[0, x)$ de façon régulière. On gradue l'axe $[0, y)$ en plaçant les traits 1, 2,. . . ,10,. . . ,100,. . . ,1000,. . . tels que les distances à l'origine soient respectivement log(1), log(2),. . . ,log(10),. . . ,log(100),. . . ,log(1000),. . . (voir figure page suivante).

On dira qu'une échelle logarithmique est un axe gradué proportionnellement aux logarithmes des abscisses. Cet axe commence à la graduation 1 et non pas à 0 !

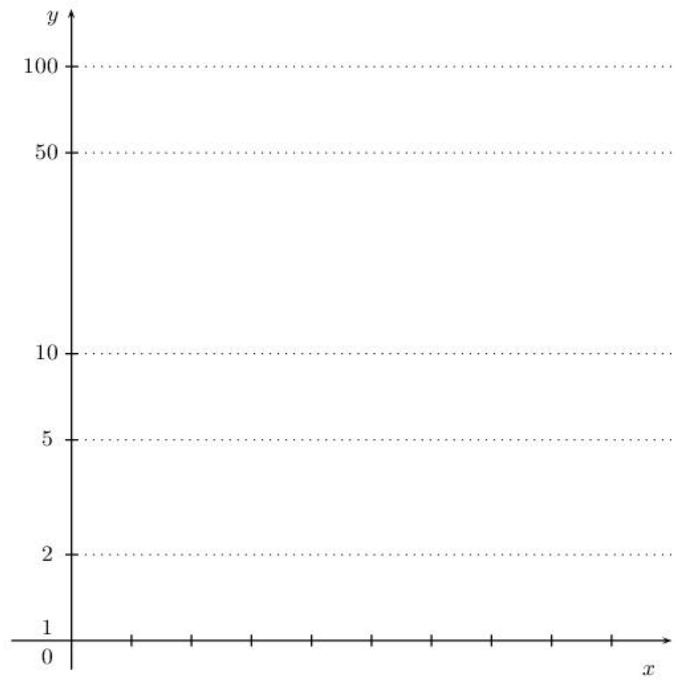
Remarque 3.1.1 Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle. Tracer la représentation graphique de $\log(f)$ dans un repère orthonormal revient à tracer celle de f dans un repère semi-logarithmique.

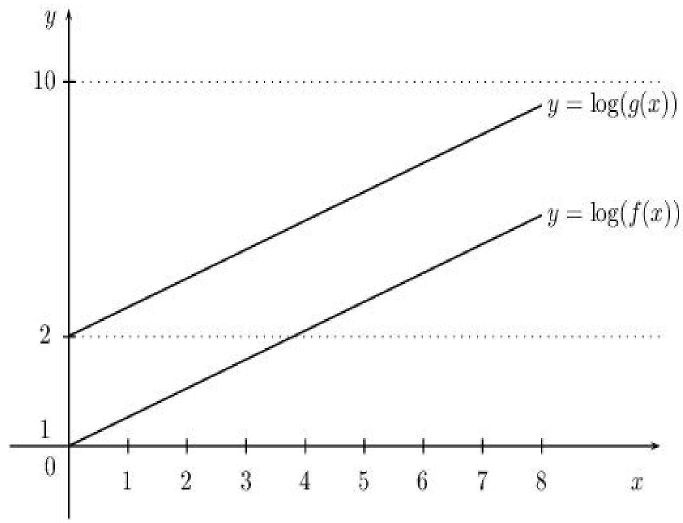
Exemple 3.1.4 Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1,2^x \text{ et } g(x) = 2 \times 1,2^x$$

On représente ces fonctions dans un repère semi-logarithmique, à l'aide d'un tableau de valeurs (à 0, 1 près) :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	1,2	1,4	1,7	2,1	2,5	3	3,6	4,3
$g(x)$	2	2,4	2,9	3,5	4,1	5	6	7,2	8,6





On constate sur le graphique que les points obtenus sont alignés sur deux droites parallèles.
D'une manière plus générale, la représentation graphique d'une fonction *exponentielle* dans un repère semi-logarithmique est une droite. En effet, si $f(x) = a^x$, $\log(f(x)) = \log(a^x) = x\log(a)$. Cela signifie que la fonction f est représentée par la droite d'équation $y = (\log(a))x$ de coefficient directeur $\log(a)$. Si $g(x) = ma^x$ (où $m > 0$) alors $\log(g(x)) = \log(ma^x) = (\log(a))x + \log(m)$. La fonction g est donc représentée graphiquement par une droite parallèle à la droite d'équation $y = x\log(a)$.

3.2 L'exponentielle

3.2.1 Présentation de la fonction

On a vu dans la partie précédente que pour tout nombre réel x, l'équation $\ln(y) = x$, d'inconnue y, admet une solution unique strictement positive. On note cette solution $\exp(x)$. On définit ainsi une fonction appelée *fonction exponentielle de base e*, notée exp, qui à tout nombre réel associe un nombre réel strictement positif.

Définition 3.2.1 *La fonction exponentielle de base e, notée* exp*, est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.*

Ainsi, on a $\ln(1) = 0 \Leftrightarrow \exp(0) = 1$ ou $\ln(e) = 1 \Leftrightarrow \exp(1) = e$.

Définition 3.2.2 *Pour tout réel x, on pose* $\exp(x) = e^x$.

En effet, on sait que pour tout entier relatif $n \in \mathbb{N}$, $\ln(e^n) = n$. D'après la définition de la fonction exponentielle, on a $e^n = \exp(n)$. Il convient alors d'étendre cette notation à tout réel x.

Exemple 3.2.1 $\exp(0) = e^0 = 1$, $\exp(1) = e^1 = e$.

Propriété 3.2.1 *Pour tout réel x et pour tout réel strictement positif y,*

- $y = e^x$ *équivaut à* $x = \ln(y)$,
- $\ln(e^x) = x$,
- $e^{\ln(y)} = y$.

3.2.2 Formules fondamentales

Les propriétés algébriques de la fonction exp se déduisent de celles de la fonction ln. On les retient en utilisant les propriétés des exposants, ce qui montre l'intérêt de la notation e^x.

Propriété 3.2.2 *Pour tous réels a et b et pour tout entier relatif p,*

- $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^p = e^{ap}$

On déduit de ces propriétés quelques résultats particuliers pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $e^x \times e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$,
- $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$,
- $(e^x)^2 = e^{2x}$.

3.2.3 Étude de la fonction exponentielle

On admet que la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on notera $\exp'$ sa dérivée. Pour tout réel x, $\ln \circ \exp(x) = x$. On dérive les deux membres de cette égalité, ce qui donne

$$(\ln \circ \exp)'(x) = 1$$

On a vu dans la partie précédente que si u est une fonction strictement positive et dérivable, on a $(\ln \circ u)' = \dfrac{u'}{u}$. On applique donc cette formule à $u = \exp$ et on obtient

$$\frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1$$

ce qui implique que $(\exp(x))' = \exp(x)$.

Propriété 3.2.3 *La fonction* exp *est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,*

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

La fonction exp *est égale à sa dérivée.*

On admettra les limites suivantes :

Propriété 3.2.4

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

La fonction exp étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $\exp(x)$	$+$
variations de $\exp$	$0 \nearrow +\infty$

Les variations de la fonction exp permettent d'écrire les propriétés :

- $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$,
- $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.

Dans un repère orthonormal, les représentations graphiques des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (voir page suivante).

3.2.4 Fonctions du type e^u

Soit u une fonction définie sur un intervalle I. Les théorèmes sur les limites d'une fonction composée permettent de calculer les limites de la fonction e^u.

Exemple 3.2.2

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2+1} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3-x} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} e^x = e^0 = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$.

Si on suppose que la fonction u est définie et dérivable sur un intervalle I, d'après le théorème sur les fonctions composées, la fonction f définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée f' est définie sur I par $f'(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$.

Théorème 3.2.1 *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et*

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

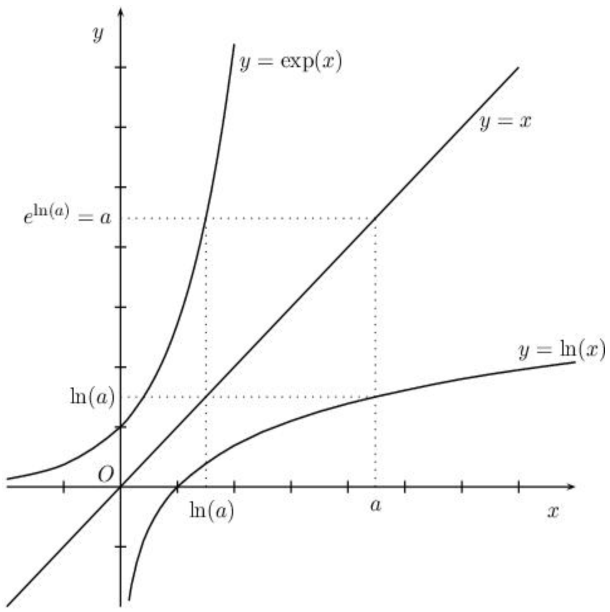
Exemple 3.2.3 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$. On pose $u(x) = x^2+1$. Cette fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 2x$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$.

On a le résultat suivant :

Théorème 3.2.2 *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction f définie sur I par $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ admet des primitives F sur I définies par*

$$F(x) = e^{u(x)} + c \text{ où } c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.4 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{2x-3}$. On pose $u(x) = 2x-3$. Cette fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 2$. On remarque que $f(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$. Or $u'e^u$ est la dérivée de e^u donc les primitives de f sont définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^{2x-3} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.



3.2.5 Fonctions exponentielles de base a

Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout entier relatif n, on a $e^{n\ln(a)} = (e^{\ln(a)})^n = a^n$ ce qui nous conduit à poser la définition suivante :

Définition 3.2.3 *Pour tout réel a strictement positif et pour tout réel x,*

$$a^x = e^{x\ln(a)}$$

Cette définition permet ainsi d'élever a à une puissance réelle quelconque.

Exemple 3.2.5 $a^{-3{,}5} = e^{-3{,}5\ln(a)}$.

Remarque 3.2.1 $\ln(a^x) = \ln(e^{x\ln(a)}) = x\ln(a)$.

Définition 3.2.4 *Soit a un réel strictement positif. On appelle exponentielle de base a la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = a^x = e^{x\ln(a)}.$$

Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle de base a se déduisent immédiatement de celles de la fonction exp (exponentielle de base e).

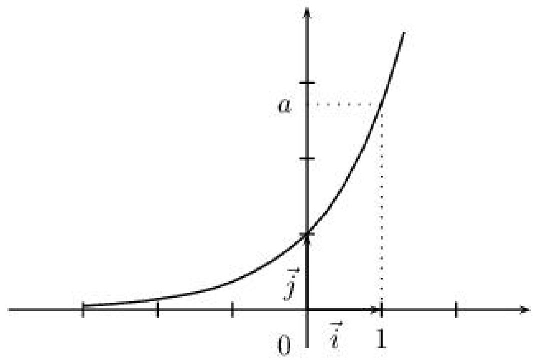
Propriété 3.2.5 *Pour $a > 0$ et pour tous réels b et c,*

- $a^b \times a^c = a^{b+c}$,
- $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$,
- $a^{b-c} = \dfrac{a^b}{a^c}$,
- $(a^b)^c = a^{bc}$

Soient a un réel strictement positif et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$. On supposera dans la suite que $a \neq 1$. On a $f(x) = e^{x\ln(a)}$ donc f est de la forme e^u avec $u(x) = x\ln(a)$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = \ln(a)$. Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \ln(a) \times e^{x\ln(a)} = \ln(a) \times a^x$. Pour tout réel x, on a $e^{x\ln(a)}$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\ln(a)$, ce qui nous conduit à examiner deux cas :

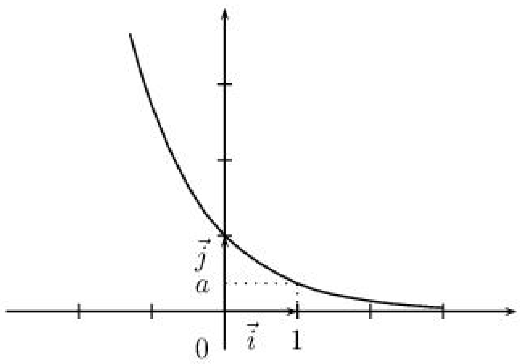
– Premier cas : $a > 1$ (ou $\ln(a) > 0$).
Pour tout réel x, $f'(x) > 0$ donc f est croissante. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(a) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x\ln(a)} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\ln(a) = -\infty$ soit $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x\ln(a)} = 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de a^x	0 $\nearrow$	$+\infty$



– Second cas : $a < 1$ (ou $\ln(a) < 0$).
Pour tout réel x, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(a) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x\ln(a)} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\ln(a) = +\infty$ soit $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x\ln(a)} = +\infty$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de a^x	$+\infty$ $\searrow$	0



3.3 Exercices

Exercice 130

1. Calculer à l'aide de la machine les logarithmes suivants :

$$\log(1270),\ \log(127),\ \log(12,7),\ \log(1,27),\ \log(0,127),\ \log(0,0127).$$

2. Que constate t-on ?
3. Par quelle propriété des logarithmes peut-on l'expliquer ?

Exercice 131 Mettre sous la forme $m\log(a) + n\log(b)$:

1. $\log(a^2b^3)$
2. $\log\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)$
3. $\log\left(\dfrac{a\sqrt{d}}{c\sqrt[3]{b}}\right)$

Exercice 132 Évaluer sans la machine :

$$\ln(e),\ \ln(1),\ \ln(e^7),\ \ln\left(\frac{1}{e}\right),\ \ln(\sqrt{e}),\ \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

Exercice 133 Résoudre les équations :

1. $\log(x+1) - \log(3) = \log(2x-3) + \log(7)$,
2. $\log_3(2x-5) + \log_3(3x+7) = 4\log_3(2)$,
3. $\ln(x^2-7) = 2\ln(x+3)$,
4. $\log(\sqrt{x+1}) + \log(\sqrt{x-1}) - \log(5) = 0$,
5. $\log(x^2+3x-1) = 2$.

Exercice 134 Résoudre :

1. $3^x + 9^x = 90$,
2. $e^{3x} = 5$,
3. $4e^{-3x} - 3e^{-x} - e^x = 0$.

(Indication pour 1. : on posera $y = 3^x$.)

Exercice 135 Résoudre

1. $2^{x^2} = 512$,
2. $7^{x^2+x} = 49$,
3. $\dfrac{1}{10^x} = 10000$.

Exercice 136 Résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} \log(x) + \log(y) &= 2 \\ x + y &= 25 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \ln(x) - \ln(y) &= 1 \\ xy &= e \end{cases}$

Exercice 137 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}$.
On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Partie A. Étude de fonctions auxiliaires.

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^x + 1$.
   Étudier le sens de variation de h et démontrer que $h(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.
   (a) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Étudier le sens de variation de g et dresser le tableau de variations de g.

(c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
On note α et β ces solutions avec $\alpha > \beta$. Prouver que $1,14 < \alpha < 1,15$.

(d) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B. Étude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathcal{C}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.
2. (a) Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.
3. (a) Établir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+1}$
   (b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A.2., déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.
4. Déterminer une équation de la tangente T à, la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
5. (a) Établir que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
$$f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1} \text{ avec } u(x) = e^x - xe^x - 1.$$
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction u. En déduire le signe de $u(x)$.
   (c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite T.
6. Tracer $\mathcal{C}$ et T. On prendra pour unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axes des ordonnées.
   On pourra admettre que $-1,85 < \beta < -1,84$ et $-1,19 < f(\beta) < -1,18$.

Exercice 138 Dans ce problème, on étudie successivement les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = xe^{-x} \text{ et } g(x) = f(x) + [f(x)]^2.$$

Partie A. Étude de la fonction f.

1. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f'.
   Étudier le sens de variation de f.
   (b) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et sa limite en $+\infty$.
   (c) Donner le tableau de variation de f.
   (On ne demande pas de construire la représentation graphique de f.)
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = -\dfrac{1}{2}$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution notée α.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   (b) Montrer de même que l'équation $f(x) = -1$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution notée β.
   Donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.

Partie B. Étude de la fonction g.

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a
$$g'(x) = f'(x)[1 + 2f(x)].$$
   Étudier le sens de variation de g.
2. Déterminer la limite de g en $-\infty$ et sa limite en $+\infty$.
3. Donner le tableau de variation de g. On calculera la valeur exacte de $g(\alpha)$.
4. (a) Établir que, pour tout réel x, on a
$$g(x) - x = xe^{-x}[1 + xe^{-x} - e^x]$$
   (b) Montrer que, pour tout réel x, on a

$$1 + xe^{-x} \leq 1 + x \leq e^x.$$

(c) Préciser la position de la courbe représentative Γ de la fonction g par rapport à sa tangente T en 0.

5. Tracer Γ (on prendra pour unité graphique 2 cm). Préciser les abscisses des points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses. Faire figurer sur la dessin la tangente T.