Table des matières

Chapitre 6

Les primitives

6.1 Introduction

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = 3x^2 + x - 5.$$

Existe-t-il une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $F' = f$?

Réponse : F est définie par

$$F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + c$$

où c est une constante réelle arbitraire. F est appelée *fonction primitive* de f sur $\mathbb{R}$.

6.2 Existence des fonctions primitives

Définition 6.2.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que F est une fonction primitive de f sur I pour exprimer que*

- *F est dérivable sur I,*
- *$F' = f$.*

Exemple 6.2.1 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2} + 2x^2 + x - 3$$

avec $I =]0; +\infty[$. Alors les fonctions primitives de f sont définies par

$$F(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{x} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + c$$

où c est une constante réelle arbitraire. f admet une infinité de primitives puisque c peut prendre une infinité de valeurs.

Théorème 6.2.1 *Toute fonction continue sur I admet des fonctions primitives sur I.*

Théorème 6.2.2 *Soit F une fonction primitive de f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Toutes les fonctions primitives de f sur I sont les fonctions G définies par*

$$\forall x \in I,\ G(x) = F(x) + c$$

où c est une constante arbitraire.

Théorème 6.2.3 - *Primitives prenant une valeur donnée en un point donné.*

1. *Soit une fonction f définie sur I, x_0 un point de I, y_0 un réel donné. Il existe une seule fonction primitive G de f sur I qui prend la valeur y_0 au point x_0 soit*

$$G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$$

   où F est une fonction primitive quelconque de f sur I.

2. *La fonction primitive G prenant la valeur 0 en x_0 est définie par*

$$G(x) = F(x) - F(x_0)$$

   où F est une fonction primitive quelconque de f sur I.

<u>Preuve</u> : Soit F une fonction primitive de f sur I. On recherche une fonction primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.
On sait que deux fonctions primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante donc G est définie par

$$G(x) = F(x) + c$$

Or $G(x_0) = y_0 = F(x_0) + c$ donc $c = y_0 - F(x_0)$ et $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ ce qui prouve 1.

Si la fonction G prend la valeur 0 en x_0, cela signifie que $G(x_0) = y_0 = 0$ donc $G(x) = F(x) - F(x_0)$ ce qui prouve 2. ■

Exemple 6.2.2 Soit $f(x) = x^2 + 1$. Déterminer la fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 2 au point 3.
Une primitive F de f est donnée par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$. Alors on sait que $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ est la primitive recherchée en considérant $x_0 = 3$ et $y_0 = 2$. Comme $F(x_0) = F(3) = 12$, la fonction primitive de f prenant la valeur 2 au point 3 est égale à

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 12 + 2 = \frac{1}{3}x^3 + x - 10.$$

Remarque 6.2.1 On pouvait retrouver cette fonction en considérant directement les primitives de f soit $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + c$ où c est une constante réelle arbitraire. Or $G(3) = 2 = \frac{1}{3}(3)^3 + 3 + c \Leftrightarrow c = 10$. La fonction primitive de f prenant la valeur 2 au point 3 est égale à

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 10.$$

6.3 Les primitives usuelles

1. Soient deux fonctions f et g continues sur l'intervalle I, F et G des fonctions primitives de f et g sur I respectivement, α et β deux réels quelconques.
   La fonction $h = \alpha f + \beta g$ a pour fonction primitive sur I

$$H = \alpha F + \beta G$$

2. Tableau de primitives usuelles

Intervalle	Fonction	Fonction primitive
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=0$	$F(x)=c$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=a$	$F(x)=ax+c$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=x$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+c$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=x^2$	$F(x)=\frac{1}{3}x^3+c$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=x^n$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$
$I=]-\infty,0[$ ou $I=]0;+\infty[$	$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}+c$
$I=]0;+\infty[$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+c$
$I=]0;+\infty[$	$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)+c$
$I=]-\infty;0[$	$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln(-x)+c$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+c$
$I=]0;+\infty[$	$f(x)=x^n$ avec $n\in\mathbb{R}-\{-1\}$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=(ax+b)^n$	$F(x)=\frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1}+c$
pour $x\neq-\frac{b}{a}$	$f(x)=\frac{1}{(ax+b)^2}$	$F(x)=-\frac{1}{a(ax+b)}+c$
pour $ax+b>0$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$F(x)=\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+c$
$x\neq-\frac{b}{a}$	$f(x)=\frac{1}{ax+b}$	$F(x)=\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+c$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=e^{ax+b}$	$F(x)=\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$

3. Soit u une fonction dérivable sur I.
   (a) $f=u'u^n$ a pour fonction primitive $F=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$.
   (b) $f=\frac{u'}{u^2}$ a pour fonction primitive $F=\frac{-1}{u}+c$.
   (c) $f=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ a pour fonction primitive $F=2\sqrt{u}+c$ avec $u(x)>0$ sur I.
   (d) $f=\frac{u'}{u}$ a pour fonction primitive $F=\ln|u|+c$ avec $u(x)\neq0$ sur I.
   (e) $f=u'e^u$ a pour fonction primitive $F=e^u+c$.

6.4 Exercices

Exercice 174 Déterminer les fonctions primitives de

1. $f(x)=(2x+1)^5$, $I=\mathbb{R}$.

2. $f(x)=\dfrac{3}{(2x+1)^2}$, $I=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.
3. $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{4x+1}}$, $\mathcal{D}=\left[-\dfrac{1}{4},+\infty\right[$.
4. $f(x)=\dfrac{5}{2x+5}$, $\mathcal{D}=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$.
5. $f(x)=(2x+1)(x^2+x+3)^4$, $D=\mathbb{R}$.
6. $f(x)=\dfrac{x+1}{(x^2+2x+5)^2}$, $D=\mathbb{R}$.
7. $f(x)=xe^{x^2+1}$, $D=\mathbb{R}$.
8. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+5}$, $D=\mathbb{R}$.
9. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $D=\mathbb{R}^{+*}$.
10. $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$, $D=\mathbb{R}^{+*}$.
11. $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$, $D=]0;1[\cup]1;+\infty[$.
12. $f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln x)^2}$, $D=\left]0;\dfrac{1}{e}\right[\cup\left]\dfrac{1}{e};+\infty\right[$.
13. $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$, $D=\mathbb{R}$.
14. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+2}$, $D=\mathbb{R}-\{-2\}$.

Exercice 175 Dérivée et primitives.

1. Calculez la dérivée de la fonction f définie par $f(x)=3x^3-9x+1$.
2. Déduisez-en deux primitives de la fonction g définie par $g(x)=9x^2-9$.
3. Déterminez le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 176 Déterminez une primitive de f sur un intervalle contenu dans son ensemble de définition (usage des tableaux de primitives usuelles).

1. $f(x)=2x+1$
2. $f(x)=10x^4+6x^3-1$
3. $f(x)=(x-1)(x+3)$
4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-x^2$
5. $f(x)=-\dfrac{4}{3x^5}$
6. $f(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Exercice 177 Primitive et constante.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=3x-1+\dfrac{2}{x^2}$.
Déterminez la primitive F de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule pour $x=1$.

Exercice 178 Trouvez la primitive F de f sur I vérifiant la condition donnée

1. $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$, $I = \mathbb{R}$, $F(1) = 0$,
2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I =]0; +\infty[$, $F(1) = 1$.

Exercice 179 Déterminez une primitive des fonctions données (forme $u'u^n$).

1. $f(x) = 3(3x+1)^4$
2. $f(x) = 16(4x-1)^3$
3. $f(x) = (2x+7)^6$
4. $f(x) = (6x-2)(3x^2-2x+3)^5$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^4$

Exercice 180 Déterminez une primitive des fonctions données (forme $\dfrac{u'}{u^2}$).

1. $f(x) = \dfrac{4}{(1+4x)^2}$
2. $f(x) = \dfrac{6}{(2x+1)^2}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{(4x+3)^2}$
4. $f(x) = \dfrac{-1}{(2-x)^2}$
5. $f(x) = \dfrac{2}{(4-3x)^2}$
6. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$
7. $f(x) = \dfrac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}$

Exercice 181 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x+4}{(x+1)^3}$.

1. Déterminez les réels a et b tels que, pour tout $x \neq -1$, $f(x) = \dfrac{a}{(x+1)^2} + \dfrac{b}{(x+1)^3}$.
2. En déduire une primitive F de f sur $]-1; +\infty[$.

Exercice 182 Déterminez une primitive des fonctions données (forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$).

1. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+2}}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-5x}}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$
4. $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$
5. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$