

# Table des matières

<b>0 Rappels sur les polynômes et fractions algébriques</b>	<b>1</b>
0.1 Puissances . . . . .	1
0.1.1 Puissance d'un nombre réel . . . . .	1
0.1.2 Loi des exposants . . . . .	1
0.1.3 Puissance d'exposant entier négatif . . . . .	2
0.1.4 Puissance d'exposant rationnel . . . . .	2
0.1.5 Racine $n$ -ième d'un nombre réel . . . . .	3
0.1.6 Propriétés des radicaux . . . . .	3
0.1.7 Réduction du radicande . . . . .	3
0.2 Polynômes . . . . .	4
0.2.1 Monômes . . . . .	4
0.2.2 Opérations entre monômes . . . . .	4
0.2.3 Polynômes . . . . .	4
0.2.4 Somme et différence de polynômes . . . . .	5
0.2.5 Produit de polynômes . . . . .	5
0.2.6 Identités remarquables . . . . .	5
0.2.7 Quotient de polynômes . . . . .	6
0.2.8 Théorème du reste . . . . .	6
0.3 Factorisation . . . . .	6
0.3.1 Mise en évidence simple . . . . .	6
0.3.2 Mise en évidence double . . . . .	7
0.3.3 Différence de deux carrés . . . . .	7
0.3.4 Factorisation en plusieurs étapes . . . . .	7
0.3.5 Trinômes carrés parfaits . . . . .	7
0.3.6 Discriminant d'un trinôme du second degré . . . . .	8
0.3.7 Trinôme du second degré : méthode “Complétion du carré” . . . . .	8
0.3.8 Trinôme du second degré : méthode “Produit et somme” . . . . .	8
0.3.9 Trinôme du second degré : méthode du discriminant . . . . .	8
0.4 Fractions rationnelles . . . . .	8
0.4.1 Fraction rationnelle . . . . .	8
0.4.2 Addition et soustraction de fractions rationnelles . . . . .	9
0.4.3 Multiplication et division de fractions rationnelles . . . . .	9
0.4.4 Décomposition en une somme de fractions rationnelles . . . . .	10
0.5 Exercices . . . . .	10
<b>1 Trinômes du second degré</b>	<b>29</b>
1.1 Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ . . . . .	29
1.1.1 Transformation de l'équation . . . . .	29
1.1.2 Résolution de l'équation . . . . .	29
1.2 Étude du signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$ , $a \neq 0$ . . . . .	30
1.3 Application à la recherche du domaine de définition d'une fonction . . . . .	31
1.4 Remarques . . . . .	33

1.5	Tableau récapitulatif . . . . .	34
1.6	Exercices . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Sens de variation. Dérivation</b>	<b>39</b>
2.1	Introduction . . . . .	39
2.2	Notions préliminaires . . . . .	39
2.2.1	Coefficient directeur d'une droite . . . . .	39
2.2.2	Fonctions monotones . . . . .	39
2.3	Taux de variation . . . . .	41
2.3.1	Définition . . . . .	41
2.3.2	Interprétation graphique . . . . .	41
2.4	Nombre dérivé et tangente . . . . .	41
2.4.1	Nombre dérivé - Interprétation géométrique . . . . .	41
2.4.2	Exemples . . . . .	42
2.4.3	Équation de la tangente . . . . .	43
2.5	La fonction dérivée . . . . .	44
2.5.1	Définitions . . . . .	44
2.5.2	Exemple . . . . .	44
2.6	Les fonctions dérivées usuelles . . . . .	44
2.6.1	Somme et produit de deux fonctions . . . . .	44
2.6.2	Dérivées des fonctions usuelles . . . . .	45
2.6.3	Dérivées des fonctions logarithme népérien et exponentielle népérienne . . . . .	45
2.6.4	Exemples . . . . .	46
2.7	Sens de dérivation d'une fonction . . . . .	47
2.7.1	Fonction croissante sur un intervalle . . . . .	47
2.7.2	Fonction décroissante sur un intervalle . . . . .	48
2.7.3	Fonction constante sur un intervalle . . . . .	48
2.7.4	Exemple . . . . .	48
2.8	Point d'inflexion - Concavité . . . . .	49
2.8.1	Fonction dérivée seconde . . . . .	49
2.8.2	Position de la courbe et de la tangente . . . . .	49
2.9	Exercices . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Le logarithme et l'exponentielle</b>	<b>59</b>
3.1	Le logarithme népérien . . . . .	59
3.1.1	Présentation de la fonction . . . . .	59
3.1.2	Logarithme d'une fonction . . . . .	60
3.1.3	Logarithme décimal et applications . . . . .	61
3.2	L'exponentielle . . . . .	63
3.2.1	Présentation de la fonction . . . . .	63
3.2.2	Formules fondamentales . . . . .	64
3.2.3	Étude de la fonction exponentielle . . . . .	64
3.2.4	Fonctions du type $e^u$ . . . . .	65
3.2.5	Fonctions exponentielles de base $a$ . . . . .	66
3.3	Exercices . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Les fonctions économiques</b>	<b>71</b>
4.1	Les fonctions coûts . . . . .	71
4.1.1	Coût total de production . . . . .	71
4.1.2	Coût marginal de production . . . . .	72
4.1.3	Coût moyen de production . . . . .	73
4.1.4	La recette et le bénéfice total . . . . .	74
4.1.5	Exercice . . . . .	75

---

4.2	Les fonctions d'offre et de demande . . . . .	75
4.2.1	Définitions . . . . .	75
4.2.2	La fonction elasticité . . . . .	76
4.3	Exercices . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Pourcentages et indices</b>	<b>83</b>
5.1	Pourcentage instantané . . . . .	83
5.1.1	Définitions . . . . .	83
5.2	Pourcentage d'évolution (ou taux de croissance ou taux de variation) . . . . .	84
5.2.1	Définitions . . . . .	84
5.2.2	Évolutions successives . . . . .	85
5.3	Indice et comparaison d'évolution . . . . .	87
5.3.1	Notion d'indice . . . . .	87
5.3.2	Les indices synthétiques . . . . .	88
5.4	Suites de nombres . . . . .	90
5.4.1	Origine . . . . .	90
5.4.2	Formules relatives aux suites arithmétiques et géométriques . . . . .	91
5.4.3	Exemple classique de suite arithmétique : caisse d'épargne . . . . .	91
5.5	Exercices . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Les primitives</b>	<b>97</b>
6.1	Introduction . . . . .	97
6.2	Existence des fonctions primitives . . . . .	97
6.3	Les primitives usuelles . . . . .	98
6.4	Exercices . . . . .	99



# Chapitre 6

## Les primitives

### 6.1 Introduction

Soit la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = 3x^2 + x - 5.$$

Existe-t-il une fonction  $F$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $F' = f$  ?

Réponse :  $F$  est définie par

$$F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + c$$

où  $c$  est une constante réelle arbitraire.  $F$  est appelée *fonction primitive* de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### 6.2 Existence des fonctions primitives

**Définition 6.2.1** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $F$  est une fonction primitive de  $f$  sur  $I$  pour exprimer que

- $F$  est dérivable sur  $I$ ,
- $F' = f$ .

**Exemple 6.2.1** Soit la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2} + 2x^2 + x - 3$$

avec  $I = ]0; +\infty[$ . Alors les fonctions primitives de  $f$  sont définies par

$$F(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{x} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + c$$

où  $c$  est une constante réelle arbitraire.  $f$  admet une infinité de primitives puisque  $c$  peut prendre une infinité de valeurs.

**Théorème 6.2.1** Toute fonction continue sur  $I$  admet des fonctions primitives sur  $I$ .

**Théorème 6.2.2** Soit  $F$  une fonction primitive de  $f$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Toutes les fonctions primitives de  $f$  sur  $I$  sont les fonctions  $G$  définies par

$$\forall x \in I, \quad G(x) = F(x) + c$$

où  $c$  est une constante arbitraire.

**Théorème 6.2.3** - *Primitives prenant une valeur donnée en un point donné.*

1. Soit une fonction  $f$  définie sur  $I$ ,  $x_0$  un point de  $I$ ,  $y_0$  un réel donné. Il existe une seule fonction primitive  $G$  de  $f$  sur  $I$  qui prend la valeur  $y_0$  au point  $x_0$  soit

$$G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$$

où  $F$  est une fonction primitive quelconque de  $f$  sur  $I$ .

2. La fonction primitive  $G$  prenant la valeur 0 en  $x_0$  est définie par

$$G(x) = F(x) - F(x_0)$$

où  $F$  est une fonction primitive quelconque de  $f$  sur  $I$ .

Preuve : Soit  $F$  une fonction primitive de  $f$  sur  $I$ . On recherche une fonction primitive  $G$  de  $f$  sur  $I$  telle que  $G(x_0) = y_0$ .

On sait que deux fonctions primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante donc  $G$  est définie par

$$G(x) = F(x) + c$$

Or  $G(x_0) = y_0 = F(x_0) + c$  donc  $c = y_0 - F(x_0)$  et  $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$  ce qui prouve 1.

Si la fonction  $G$  prend la valeur 0 en  $x_0$ , cela signifie que  $G(x_0) = y_0 = 0$  donc  $G(x) = F(x) - F(x_0)$  ce qui prouve 2. ■

**Exemple 6.2.2** Soit  $f(x) = x^2 + 1$ . Déterminer la fonction primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui prend la valeur 2 au point 3.

Une primitive  $F$  de  $f$  est donnée par  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$ . Alors on sait que  $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$  est la primitive recherchée en considérant  $x_0 = 3$  et  $y_0 = 2$ . Comme  $F(x_0) = F(3) = 12$ , la fonction primitive de  $f$  prenant la valeur 2 au point 3 est égale à

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 12 + 2 = \frac{1}{3}x^3 + x - 10.$$

**Remarque 6.2.1** On pouvait retrouver cette fonction en considérant directement les primitives de  $f$  soit  $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + c$  où  $c$  est une constante réelle arbitraire. Or  $G(3) = 2 = \frac{1}{3}(3)^3 + 3 + c \Leftrightarrow c = 10$ . La fonction primitive de  $f$  prenant la valeur 2 au point 3 est égale à

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 10.$$

### 6.3 Les primitives usuelles

1. Soient deux fonctions  $f$  et  $g$  continues sur l'intervalle  $I$ ,  $F$  et  $G$  des fonctions primitives de  $f$  et  $g$  sur  $I$  respectivement,  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels quelconques.

La fonction  $h = \alpha f + \beta g$  a pour fonction primitive sur  $I$

$$H = \alpha F + \beta G$$

2. Tableau de primitives usuelles

Intervalle	Fonction	Fonction primitive
$I = \mathbb{R}$	$f(x) = 0$	$F(x) = c$
$I = \mathbb{R}$	$f(x) = a$	$F(x) = ax + c$
$I = \mathbb{R}$	$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$
$I = \mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$
$I = \mathbb{R}$	$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$I = ]-\infty, 0[$ ou $I = ]0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$
$I = ]0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$
$I = ]0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + c$
$I = ]-\infty; 0[$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(-x) + c$
$I = \mathbb{R}$	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$
$I = ]0; +\infty[$	$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$I = \mathbb{R}$	$f(x) = (ax+b)^n$	$F(x) = \frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1} + c$
pour $x \neq -\frac{b}{a}$	$f(x) = \frac{1}{(ax+b)^2}$	$F(x) = -\frac{1}{a(ax+b)} + c$
pour $ax+b > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$F(x) = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + c$
$x \neq -\frac{b}{a}$	$f(x) = \frac{1}{ax+b}$	$F(x) = \frac{1}{a} \ln  ax+b  + c$
$I = \mathbb{R}$	$f(x) = e^{ax+b}$	$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$

3. Soit  $u$  une fonction dérivable sur  $I$ .

- (a)  $f = u'u^n$  a pour fonction primitive  $F = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$ .
- (b)  $f = \frac{u'}{u^2}$  a pour fonction primitive  $F = \frac{-1}{u} + c$ .
- (c)  $f = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$  a pour fonction primitive  $F = 2\sqrt{u} + c$  avec  $u(x) > 0$  sur  $I$ .
- (d)  $f = \frac{u'}{u}$  a pour fonction primitive  $F = \ln|u| + c$  avec  $u(x) \neq 0$  sur  $I$ .
- (e)  $f = u'e^u$  a pour fonction primitive  $F = e^u + c$ .

## 6.4 Exercices

**Exercice 174** Déterminer les fonctions primitives de

1.  $f(x) = (2x+1)^5$ ,  $I = \mathbb{R}$ .

2.  $f(x) = \frac{3}{(2x+1)^2}$ ,  $I = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ .
3.  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{4x+1}}$ ,  $\mathcal{D} = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$ .
4.  $f(x) = \frac{5}{2x+5}$ ,  $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{2}\right\}$ .
5.  $f(x) = (2x+1)(x^2+x+3)^4$ ,  $D = \mathbb{R}$ .
6.  $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2}$ ,  $D = \mathbb{R}$ .
7.  $f(x) = xe^{x^2+1}$ ,  $D = \mathbb{R}$ .
8.  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+5}$ ,  $D = \mathbb{R}$ .
9.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,  $D = \mathbb{R}^{+*}$ .
10.  $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$ ,  $D = \mathbb{R}^{+*}$ .
11.  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ ,  $D = ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ .
12.  $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)^2}$ ,  $D = \left]0; \frac{1}{e}\right[ \cup \left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$ .
13.  $f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ ,  $D = \mathbb{R}$ .
14.  $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+2}$ ,  $D = \mathbb{R} - \{-2\}$ .

**Exercice 175** Dérivée et primitives.

1. Calculez la dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 3x^3 - 9x + 1$ .
2. Déduisez-en deux primitives de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = 9x^2 - 9$ .
3. Déterminez le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 176** Déterminez une primitive de  $f$  sur un intervalle contenu dans son ensemble de définition (usage des tableaux de primitives usuelles).

1.  $f(x) = 2x + 1$
2.  $f(x) = 10x^4 + 6x^3 - 1$
3.  $f(x) = (x-1)(x+3)$
4.  $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$
5.  $f(x) = -\frac{4}{3x^5}$
6.  $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$

**Exercice 177** Primitive et constante.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{x^2}$ .

Déterminez la primitive  $F$  de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  qui s'annule pour  $x = 1$ .

**Exercice 178** Trouvez la primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$  vérifiant la condition donnée

1.  $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$ ,  $I = \mathbb{R}$ ,  $F(1) = 0$ ,
2.  $f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $I = ]0; +\infty[$ ,  $F(1) = 1$ .

**Exercice 179** Déterminez une primitive des fonctions données (forme  $u'u^n$ ).

1.  $f(x) = 3(3x + 1)^4$
2.  $f(x) = 16(4x - 1)^3$
3.  $f(x) = (2x + 7)^6$
4.  $f(x) = (6x - 2)(3x^2 - 2x + 3)^5$
5.  $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$

**Exercice 180** Déterminez une primitive des fonctions données (forme  $\frac{u'}{u^2}$ ).

1.  $f(x) = \frac{4}{(1 + 4x)^2}$
2.  $f(x) = \frac{6}{(2x + 1)^2}$
3.  $f(x) = \frac{1}{(4x + 3)^2}$
4.  $f(x) = \frac{-1}{(2 - x)^2}$
5.  $f(x) = \frac{2}{(4 - 3x)^2}$
6.  $f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$
7.  $f(x) = \frac{4x - 10}{(x^2 - 5x + 6)^2}$

**Exercice 181** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{3x + 4}{(x + 1)^3}$ .

1. Déterminez les réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout  $x \neq -1$ ,  $f(x) = \frac{a}{(x + 1)^2} + \frac{b}{(x + 1)^3}$ .
2. En déduire une primitive  $F$  de  $f$  sur  $] -1; +\infty[$ .

**Exercice 182** Déterminez une primitive des fonctions données (forme  $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ ).

1.  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x + 2}}$
2.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - 5x}}$
3.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 3}}$
4.  $f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$
5.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

