

Table des matières

0	Rappels sur les polynômes et fractions algébriques	1
0.1	Puissances	1
0.1.1	Puissance d'un nombre réel	1
0.1.2	Loi des exposants	1
0.1.3	Puissance d'exposant entier négatif	2
0.1.4	Puissance d'exposant rationnel	2
0.1.5	Racine n -ième d'un nombre réel	3
0.1.6	Propriétés des radicaux	3
0.1.7	Réduction du radicande	3
0.2	Polynômes	4
0.2.1	Monômes	4
0.2.2	Opérations entre monômes	4
0.2.3	Polynômes	4
0.2.4	Somme et différence de polynômes	5
0.2.5	Produit de polynômes	5
0.2.6	Identités remarquables	5
0.2.7	Quotient de polynômes	6
0.2.8	Théorème du reste	6
0.3	Factorisation	6
0.3.1	Mise en évidence simple	6
0.3.2	Mise en évidence double	7
0.3.3	Différence de deux carrés	7
0.3.4	Factorisation en plusieurs étapes	7
0.3.5	Trinômes carrés parfaits	7
0.3.6	Discriminant d'un trinôme du second degré	8
0.3.7	Trinôme du second degré : méthode "Complétion du carré"	8
0.3.8	Trinôme du second degré : méthode "Produit et somme"	8
0.3.9	Trinôme du second degré : méthode du discriminant	8
0.4	Fractions rationnelles	8
0.4.1	Fraction rationnelle	8
0.4.2	Addition et soustraction de fractions rationnelles	9
0.4.3	Multiplication et division de fractions rationnelles	9
0.4.4	Décomposition en une somme de fractions rationnelles	10
0.5	Exercices	10
1	Trinômes du second degré	29
1.1	Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	29
1.1.1	Transformation de l'équation	29
1.1.2	Résolution de l'équation	29
1.2	Étude du signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$	30
1.3	Application à la recherche du domaine de définition d'une fonction	31
1.4	Remarques	33

1.5	Tableau récapitulatif	34
1.6	Exercices	34
2	Sens de variation. Dérivation	39
2.1	Introduction	39
2.2	Notions préliminaires	39
2.2.1	Coefficient directeur d'une droite	39
2.2.2	Fonctions monotones	39
2.3	Taux de variation	41
2.3.1	Définition	41
2.3.2	Interprétation graphique	41
2.4	Nombre dérivé et tangente	41
2.4.1	Nombre dérivé - Interprétation géométrique	41
2.4.2	Exemples	42
2.4.3	Équation de la tangente	43
2.5	La fonction dérivée	44
2.5.1	Définitions	44
2.5.2	Exemple	44
2.6	Les fonctions dérivées usuelles	44
2.6.1	Somme et produit de deux fonctions	44
2.6.2	Dérivées des fonctions usuelles	45
2.6.3	Dérivées des fonctions logarithme népérien et exponentielle népérienne	45
2.6.4	Exemples	46
2.7	Sens de dérivation d'une fonction	47
2.7.1	Fonction croissante sur un intervalle	47
2.7.2	Fonction décroissante sur un intervalle	48
2.7.3	Fonction constante sur un intervalle	48
2.7.4	Exemple	48
2.8	Point d'inflexion - Concavité	49
2.8.1	Fonction dérivée seconde	49
2.8.2	Position de la courbe et de la tangente	49
2.9	Exercices	53
3	Le logarithme et l'exponentielle	59
3.1	Le logarithme népérien	59
3.1.1	Présentation de la fonction	59
3.1.2	Logarithme d'une fonction	60
3.1.3	Logarithme décimal et applications	61
3.2	L'exponentielle	63
3.2.1	Présentation de la fonction	63
3.2.2	Formules fondamentales	64
3.2.3	Étude de la fonction exponentielle	64
3.2.4	Fonctions du type e^u	65
3.2.5	Fonctions exponentielles de base a	66
3.3	Exercices	67
4	Les fonctions économiques	71
4.1	Les fonctions coûts	71
4.1.1	Coût total de production	71
4.1.2	Coût marginal de production	72
4.1.3	Coût moyen de production	73
4.1.4	La recette et le bénéfice total	74
4.1.5	Exercice	75

4.2	Les fonctions d'offre et de demande	75
4.2.1	Définitions	75
4.2.2	La fonction élasticité	76
4.3	Exercices	77
5	Pourcentages et indices	83
5.1	Pourcentage instantané	83
5.1.1	Définitions	83
5.2	Pourcentage d'évolution (ou taux de croissance ou taux de variation)	84
5.2.1	Définitions	84
5.2.2	Évolutions successives	85
5.3	Indice et comparaison d'évolution	87
5.3.1	Notion d'indice	87
5.3.2	Les indices synthétiques	88
5.4	Suites de nombres	90
5.4.1	Origine	90
5.4.2	Formules relatives aux suites arithmétiques et géométriques	91
5.4.3	Exemple classique de suite arithmétique : caisse d'épargne	91
5.5	Exercices	91
6	Les primitives	97
6.1	Introduction	97
6.2	Existence des fonctions primitives	97
6.3	Les primitives usuelles	98
6.4	Exercices	99

Chapitre 6

Les primitives

6.1 Introduction

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = 3x^2 + x - 5.$$

Existe-t-il une fonction F dérivable sur \mathbb{R} telle que $F' = f$?

Réponse : F est définie par

$$F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + c$$

où c est une constante réelle arbitraire. F est appelée *fonction primitive* de f sur \mathbb{R} .

6.2 Existence des fonctions primitives

Définition 6.2.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . On dit que F est une fonction primitive de f sur I pour exprimer que

- F est dérivable sur I ,
- $F' = f$.

Exemple 6.2.1 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2} + 2x^2 + x - 3$$

avec $I =]0; +\infty[$. Alors les fonctions primitives de f sont définies par

$$F(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{x} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + c$$

où c est une constante réelle arbitraire. f admet une infinité de primitives puisque c peut prendre une infinité de valeurs.

Théorème 6.2.1 Toute fonction continue sur I admet des fonctions primitives sur I .

Théorème 6.2.2 Soit F une fonction primitive de f sur un intervalle I de \mathbb{R} . Toutes les fonctions primitives de f sur I sont les fonctions G définies par

$$\forall x \in I, G(x) = F(x) + c$$

où c est une constante arbitraire.

Théorème 6.2.3 - *Primitives prenant une valeur donnée en un point donné.*

1. Soit une fonction f définie sur I , x_0 un point de I , y_0 un réel donné. Il existe une seule fonction primitive G de f sur I qui prend la valeur y_0 au point x_0 soit

$$G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$$

où F est une fonction primitive quelconque de f sur I .

2. La fonction primitive G prenant la valeur 0 en x_0 est définie par

$$G(x) = F(x) - F(x_0)$$

où F est une fonction primitive quelconque de f sur I .

Preuve : Soit F une fonction primitive de f sur I . On recherche une fonction primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

On sait que deux fonctions primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante donc G est définie par

$$G(x) = F(x) + c$$

Or $G(x_0) = y_0 = F(x_0) + c$ donc $c = y_0 - F(x_0)$ et $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ ce qui prouve 1.

Si la fonction G prend la valeur 0 en x_0 , cela signifie que $G(x_0) = y_0 = 0$ donc $G(x) = F(x) - F(x_0)$ ce qui prouve 2. ■

Exemple 6.2.2 Soit $f(x) = x^2 + 1$. Déterminer la fonction primitive de f sur \mathbb{R} qui prend la valeur 2 au point 3.

Une primitive F de f est donnée par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$. Alors on sait que $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ est la primitive recherchée en considérant $x_0 = 3$ et $y_0 = 2$. Comme $F(x_0) = F(3) = 12$, la fonction primitive de f prenant la valeur 2 au point 3 est égale à

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 12 + 2 = \frac{1}{3}x^3 + x - 10.$$

Remarque 6.2.1 On pouvait retrouver cette fonction en considérant directement les primitives de f soit $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + c$ où c est une constante réelle arbitraire. Or $G(3) = 2 = \frac{1}{3}(3)^3 + 3 + c \Leftrightarrow c = -10$. La fonction primitive de f prenant la valeur 2 au point 3 est égale à

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 10.$$

6.3 Les primitives usuelles

1. Soient deux fonctions f et g continues sur l'intervalle I , F et G des fonctions primitives de f et g sur I respectivement, α et β deux réels quelconques.

La fonction $h = \alpha f + \beta g$ a pour fonction primitive sur I

$$H = \alpha F + \beta G$$

2. Tableau de primitives usuelles

Intervalle	Fonction	Fonction primitive
$I = \mathbb{R}$	$f(x) = 0$	$F(x) = c$
$I = \mathbb{R}$	$f(x) = a$	$F(x) = ax + c$
$I = \mathbb{R}$	$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$
$I = \mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$
$I = \mathbb{R}$	$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$I =]-\infty, 0[$ ou $I =]0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$
$I =]0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$
$I =]0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + c$
$I =]-\infty; 0[$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(-x) + c$
$I = \mathbb{R}$	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$
$I =]0; +\infty[$	$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$I = \mathbb{R}$	$f(x) = (ax + b)^n$	$F(x) = \frac{1}{(n+1)a}(ax + b)^{n+1} + c$
pour $x \neq -\frac{b}{a}$	$f(x) = \frac{1}{(ax + b)^2}$	$F(x) = -\frac{1}{a(ax + b)} + c$
pour $ax + b > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax + b}}$	$F(x) = \frac{2}{a}\sqrt{ax + b} + c$
$x \neq -\frac{b}{a}$	$f(x) = \frac{1}{ax + b}$	$F(x) = \frac{1}{a} \ln ax + b + c$
$I = \mathbb{R}$	$f(x) = e^{ax+b}$	$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$

3. Soit u une fonction dérivable sur I .

- (a) $f = u'u^n$ a pour fonction primitive $F = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$.
- (b) $f = \frac{u'}{u^2}$ a pour fonction primitive $F = \frac{-1}{u} + c$.
- (c) $f = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ a pour fonction primitive $F = 2\sqrt{u} + c$ avec $u(x) > 0$ sur I .
- (d) $f = \frac{u'}{u}$ a pour fonction primitive $F = \ln |u| + c$ avec $u(x) \neq 0$ sur I .
- (e) $f = u'e^u$ a pour fonction primitive $F = e^u + c$.

6.4 Exercices

Exercice 174 Déterminer les fonctions primitives de

1. $f(x) = (2x + 1)^5$, $I = \mathbb{R}$.

2. $f(x) = \frac{3}{(2x+1)^2}$, $I = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.
3. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{4x+1}}$, $\mathcal{D} = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$.
4. $f(x) = \frac{5}{2x+5}$, $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$.
5. $f(x) = (2x+1)(x^2+x+3)^4$, $D = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2}$, $D = \mathbb{R}$.
7. $f(x) = xe^{x^2+1}$, $D = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+5}$, $D = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $D = \mathbb{R}^{+*}$.
10. $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$, $D = \mathbb{R}^{+*}$.
11. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $D =]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
12. $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)^2}$, $D = \left]0; \frac{1}{e}\left[\cup \right]\frac{1}{e}; +\infty\right[$.
13. $f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$, $D = \mathbb{R}$.
14. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+2}$, $D = \mathbb{R} - \{-2\}$.

Exercice 175 Dérivée et primitives.

1. Calculez la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = 3x^3 - 9x + 1$.
2. Déduisez-en deux primitives de la fonction g définie par $g(x) = 9x^2 - 9$.
3. Déterminez le sens de variation de f sur \mathbb{R} .

Exercice 176 Déterminez une primitive de f sur un intervalle contenu dans son ensemble de définition (usage des tableaux de primitives usuelles).

1. $f(x) = 2x + 1$
2. $f(x) = 10x^4 + 6x^3 - 1$
3. $f(x) = (x-1)(x+3)$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$
5. $f(x) = -\frac{4}{3x^5}$
6. $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Exercice 177 Primitive et constante.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{x^2}$.

Déterminez la primitive F de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.

Exercice 178 Trouvez la primitive F de f sur I vérifiant la condition donnée

1. $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$, $I = \mathbb{R}$, $F(1) = 0$,
2. $f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $I =]0; +\infty[$, $F(1) = 1$.

Exercice 179 Déterminez une primitive des fonctions données (forme $u'u^n$).

1. $f(x) = 3(3x + 1)^4$
2. $f(x) = 16(4x - 1)^3$
3. $f(x) = (2x + 7)^6$
4. $f(x) = (6x - 2)(3x^2 - 2x + 3)^5$
5. $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$

Exercice 180 Déterminez une primitive des fonctions données (forme $\frac{u'}{u^2}$).

1. $f(x) = \frac{4}{(1 + 4x)^2}$
2. $f(x) = \frac{6}{(2x + 1)^2}$
3. $f(x) = \frac{1}{(4x + 3)^2}$
4. $f(x) = \frac{-1}{(2 - x)^2}$
5. $f(x) = \frac{2}{(4 - 3x)^2}$
6. $f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$
7. $f(x) = \frac{4x - 10}{(x^2 - 5x + 6)^2}$

Exercice 181 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x + 4}{(x + 1)^3}$.

1. Déterminez les réels a et b tels que, pour tout $x \neq -1$, $f(x) = \frac{a}{(x + 1)^2} + \frac{b}{(x + 1)^3}$.
2. En déduire une primitive F de f sur $] -1; +\infty[$.

Exercice 182 Déterminez une primitive des fonctions données (forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$).

1. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x + 2}}$
2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - 5x}}$
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 3}}$
4. $f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$
5. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

