Table des matières

Chapitre 7

Intégration

7.1 Définition

Définition 7.1.1 *Soient f une fonction continue sur un intervalle $I = [a;b]$ de $\mathbb{R}$ et F une fonction primitive de f sur I. On nomme intégrale de f sur $[a,b]$ le réel noté*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Exemple 7.1.1 Soit $J = \displaystyle\int_1^3 (2x+1)dx$. Si on pose $f(x) = 2x+1$, les primitives de f sont données par $F(x) = x^2 + x + c$. Alors,

$$\int_1^3 (2x+1)dx = [F(x)]_1^3 = F(3) - F(1) = (12+c) - (2+c) = 10.$$

Remarque 7.1.1

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est indépendante de la constante utilisée pour définir une fonction primitive de f.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ se lit "intégrale (ou somme) de a à b de $f(x)dx$".
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ peut encore s'écrire $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$.
- On a en particulier

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

  En effet, $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$.
- On a la relation

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

  En effet, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$.

7.2 Intégrales et inégalités

Proposition 7.2.1 *Soit une fonction f continue sur $[a,b]$ avec $a < b$. Alors, $\forall x \in [a,b]$*

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

(La réciproque est fausse.)

Exemple 7.2.1 On considère la fonction f définie par $f(x) = x$ sur $[-1, 2]$. On a le tableau de signes suivant :

x	-1	0	2
signe de $f(x)$	$-$		$+$

donc f n'a pas de signe constant sur $[-1, 2]$. Or, $\displaystyle\int_{-1}^{2} xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2} > 0$ ce qui illustre bien le fait que la réciproque est fausse.

Proposition 7.2.2 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ avec $a < b$. Alors, $\forall x \in [a, b]$*

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(La réciproque est également fausse.)

Preuve : On pose $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$. On utilise ensuite le résultat précédent soit

$$\int_a^b h(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx.$$

Ce résultat permet d'approcher une intégrale qui semble difficile à calculer, cela à l'aide d'un encadrement sur la fonction initiale.

Exemple 7.2.2 Soit $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$, déterminer un encadrement de J.

$$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq t^2 + 1 \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{t^2+1} \leq 1.$$

On intègre ensuite cette inégalité sur l'intervalle $[0, 1]$. On obtient alors

$$\int_0^1 \frac{1}{2}dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \leq \int_0^1 1.dt \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \leq 1.$$

7.3 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Proposition 7.3.1 *Soient une fonction f continue sur $[a, b]$ et c un élément de $[a, b]$. La fonction*

$$\begin{array}{rcl} G : [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & G(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)dt \end{array}$$

est la fonction primitive de f, qui s'annule en c.

Preuve : Il est simple de vérifier que G s'annule en c car $G(c) = \displaystyle\int_c^c f(t)dt = 0$. Soit ensuite F une fonction primitive de f, il est alors évident que $G(c) = [F(t)]_x^c = F(x) - F(c)$. Comme $G'(x) = F'(x) = f(x)$, G est une fonction primitive de f.

Exemple 7.3.1 Soit h la fonction définie par

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^{+\star} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}. \end{array}$$

La fonction logarithme népérien est la fonction primitive de f, définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, s'annulant en 1.

7.4 Intégration par parties

Théorème 7.4.1 *Soient deux fonctions u et v dérivables sur $[a,b]$ et les fonctions u' et v' continues sur $[a,b]$. On a alors la relation*

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx}$$

<u>*Preuve*</u> : Il suffit pour retrouver la formule précédente de dériver la fonction $f = uv$ puis d'intégrer les différents termes obtenus sur $[a,b]$. On a $f'(x) = (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ puis

$$\int_a^b f'(x)d(x) = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx$$
$$\Leftrightarrow [f(x)]_a^b = [u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(v)v'(x)dx$$

Exemple 7.4.1 Soit $I = \displaystyle\int_0^1 (2x+1)(x-1)^{10}dx$. On pose

$$\begin{array}{ll} u(x) = 2x+1 & u'(x) = 2 \\ v'(x) = (x-1)^{10} & v(x) = \dfrac{1}{11}(x-1)^{11} \end{array}$$

En appliquant la formule, on obtient

$$I = \left[\frac{(2x+1)(x-1)^{11})}{11}\right]_0^1 - \frac{2}{11}\int_0^1 (x-1)^{11}dx$$

$$\Leftrightarrow I = \left[\frac{(2x+1)(x-1)^{11})}{11}\right]_0^1 - \left[\frac{2}{11\times 12}(x-1)^{12}\right]_0^1 = \frac{5}{66}$$

Exemple 7.4.2 Soit $I = \displaystyle\int_1^e \ln x dx$. On pose

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln x & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{array}$$

En appliquant la formule, on obtient

$$I = [x\ln x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}.xdx$$

$$\Leftrightarrow I = [x\ln x]_1^e - [x]_1^e = [x\ln x - x]_1^e = (e\ln e - e) - (1\ln 1 - 1) = e - e + 1 = 1$$

Exemple 7.4.3 Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)dx$. On pose

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln(x+1) & u'(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x+1 \end{array}$$

En appliquant la formule, on obtient

$$I = [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 1dx \Leftrightarrow I = [(x+1)\ln(x+1) - x]_0^1$$

$$\Leftrightarrow I = (2\ln 2 - 1) - (1.\ln 1 - 0) = 2\ln 2 - 1$$

Exemple 7.4.4 Soit $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)dx$. On pose

$$u(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = \ln(2-x) - \ln(2+x) \quad u'(x) = -\frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x}$$
$$v'(x) = 1 \qquad v(x) = x$$

En appliquant la formule, on obtient

$$I = \left[x\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{4x}{4-x^2}dx$$

$$\Leftrightarrow I = \left[x\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) - 2\ln(4-x^2)\right]_{-1}^{1}$$

$$\Leftrightarrow I = \left(\ln\frac{1}{3} - 2\ln 3\right) - (-1\ln 3 - 2\ln 3) = \ln 3 + \ln\frac{1}{3} = \ln 3 - \ln(-3) = 0$$

Exemple 7.4.5 Soit $I = \displaystyle\int_{0}^{1} (2x+1)e^{-x}dx$. On pose

$$u(x) = 2x+1 \quad u'(x) = 2$$
$$v'(x) = -e^{-x} \quad v(x) = e^{-x}$$

En appliquant la formule, on obtient

$$I = \left[-(2x+1)e^{-x}\right]_0^1 + 2\int_0^1 e^{-x}dx$$

$$\Leftrightarrow I = \left[-(2x+1)e^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^1 = \left[-(2x+3)e^{-x}\right] = -5e^{-1} + 3 = 3 - \frac{5}{e}$$

Exemple 7.4.6 Soit $I = \displaystyle\int_{0}^{1} (x^2+x+1)e^{-x}dx$. On pose

$$u(x) = x^2+x+1 \quad u'(x) = 2x+1$$
$$v'(x) = e^{-x} \quad v(x) = -e^{-x}$$

En appliquant la formule, on obtient

$$I = \left[-(x^2+x+1)e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (2x+1)e^{-x}dx$$

or $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)e^{-x}dx$ a été calculée dans l'exercice précédent. Finalement,

$$I = \left[-(x^2+x+1)e^{-x}\right]_0^1 + (3 - \frac{5}{e}) = (-\frac{3}{e} + 1) + (3 - \frac{5}{e}) = 4 - \frac{8}{e}$$

Remarque 7.4.1 Cet exemple peut être traité d'une autre façon : on pose $f(x) = (x^2+x+1)e^{-x}$. Une primitive de f est F définie par $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$. Déterminons a, b et c. $\forall x \in [0,1]$,
$F'(x) = (2ax+b)e^{-x} - (ax^2+bx+c)e^{-x} \Leftrightarrow [-ax^2 + (2a-b)x + b - c]e^{-x} = (x^2+x+1)e^{-x}$.

On résout le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} -a &=& 1 \\ 2a-b &=& 1 \\ b-c &=& 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -1 \\ b &=& -3 \\ c &=& -4 \end{array}\right.$$

et on obtient $F(x) = (-x^2-3x-4)e^{-x}$. Donc,

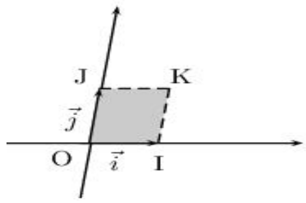
$$I = F(1) - F(0) = -8e^{-1} + 4 = 4 - \frac{8}{e}$$

7.5 Le calcul d'aire

Soient f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$.

7.5.1 L'unité d'aire

L'*unité d'aire* est l'aire du domaine plan limité par le parallélogramme OIJK.



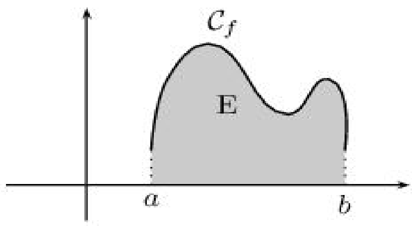
Exemple 7.5.1

- $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = 1$ cm, $\|\vec{j}\| = 2$ cm alors l'unité d'aire est 2 cm^2.
- $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm alors l'unité d'aire est 4 cm^2.

7.5.2 Cas où $f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a, b]$

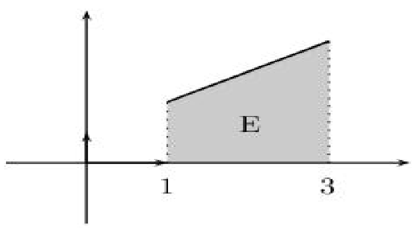
Soit E le domaine plan limité par la droite des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$, $x = b$ soit

$$E = \{M(x, y)/a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$



L'aire de E est $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$ exprimée en unités d'aire.

Exemple 7.5.2 Soit la fonction f définie par $f(x) = x + 1$ sur $[1, 3]$. Soit φ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 1$cm, l'unité d'aire est 1cm^2. L'aire de E vaut

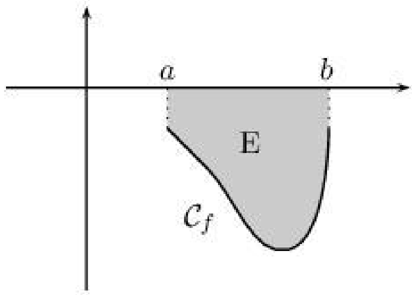


$$\mathcal{A}(E) = \int_1^3 (x+1)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^3 = 6 \text{ cm}^2.$$

7.5.3 Cas où $f(x) \leq 0,\ \forall x \in [a, b]$

Soit E le domaine plan limité par la droite des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$, $x = b$ soit

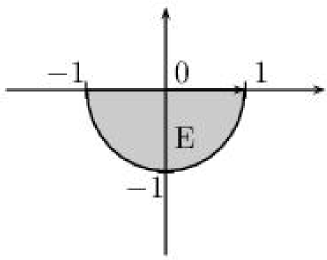
$$E = \{M(x, y)/a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$$



L'aire de E est $\boxed{-\int_a^b f(x)dx}$ exprimée en unités d'aire.

Exemple 7.5.3 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1$ sur $[-1, 1]$. L'ensemble E est défini par

$$E = \{M(x, y)/ - 1 \leq x \leq 1, f(x) \leq y \leq 0\}$$

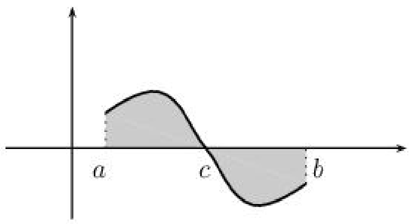


L'aire de E vaut

$$\mathcal{A}(E) = -\int_{-1}^{1}(x^2 - 1)dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3} \text{ cm}^2.$$

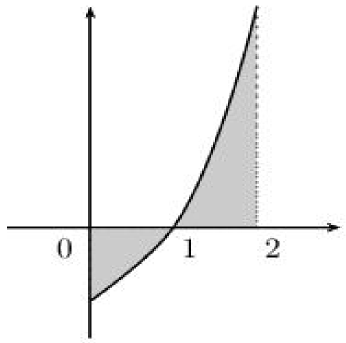
7.5.4 Cas où $f(x)$ n'a pas de signe constant sur $[a, b]$

Soit E le domaine plan limité par la droite des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$, $x = b$. L'aire de E est



$$\boxed{\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx},$$

exprimée en unités d'aire.



Exemple 7.5.4 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1$ sur $[0, 2]$. Alors l'aire de E vaut

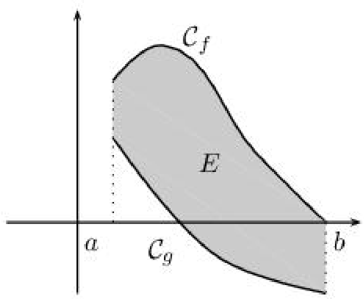
$$\mathcal{A}(E) = -\int_0^1 (x^2 - 1)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx$$

Soit F une fonction primitive de f définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, alors

$$\mathcal{A}(E) = -F(1) + F(0) + F(2) - F(1) = F(0) + F(2) - 2F(1) = 2 \text{ cm}^2.$$

7.5.5 Aire définie à partir de deux fonctions

Soient deux fonctions f et g continues sur $[a, b]$ et on suppose que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq g(x)$. E est le



domaine plan limité par les droites d'équations $x = a$, $x = b$, les courbes représentatives des fonctions f et g. L'aire de E est définie par

$$\boxed{\int_a^b (f(x) - g(x))dx}$$

Remarque 7.5.1 Dans ce cas, la position des courbes par rapport à la droite des abscisses n'a pas d'importance.

Exemple 7.5.5 Soient les fonctions f et g définies respectivement par $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = x$ sur $[-1, 2]$. On définit

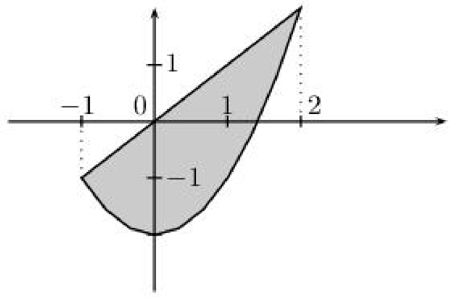
$$E = \{M(x, y) / -1 \leq x \leq 2, x^2 - 2 \leq y \leq x\}$$

L'aire de E est donnée par

$$\mathcal{A}(E) = \int_{-1}^2 [x - (x^2 - 2)]dx.$$

On pose $h(x) = x - x^2 + 2$. Une primitive de h est donnée par $H(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 2x$. Finalement,

$$\mathcal{A}(E) = H(2) - H(-1) = (2 - \frac{8}{3} + 4) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2) = 8 - 3 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \text{ cm}^2.$$



7.6 Exercices

Exercice 183

1. Calculer l'aire du domaine E en unités d'aire avec $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 1$:
   (a) $[a;b] = [-1;1]$, $f(x) = x^2 + 1$,
   (b) $[a;b] = \left[\frac{1}{3};1\right]$, $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$,
2. Calculer l'aire du domaine E en unités d'aire avec $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 1$:
   (a) $[a;b] = [-1;1]$, $f(x) = x^2 - 1$,
   (b) $[a;b] = [-4;-2]$, $f(x) = x + 2$,
3. Calculer l'aire du domaine E en unités d'aire avec $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 1$:
   (a) $[a;b] = [0;2]$, $f(x) = x^2 - 1$,
   (b) $[a;b] = [-2;2]$, $f(x) = x + 1$,

Exercice 184 Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Soit x la quantité produite en tonnes. Le coût total de production pour x unités est exprimé en milliers d'euros par :

$$C_T(x) = x^3 - 15x^2 + 76x.$$

Soit E le domaine plan limité par la courbe, la droite des abcisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 5$.

1. Représenter graphiquement le domaine plan E.
2. Déterminer l'aire du domaine plan E, en unités d'aire (ex : si $\| \vec{i} \| = 1$ cm, $\| \vec{j} \| = 2$ cm, u.a=2cm^2 ; si $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 2$ cm, u.a=4cm^2).

Exercice 185 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \dfrac{x}{x^2+1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe reprsentative dans un repère orthonormal (unité : 2 cm). La droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ à l'infini. Soit (E) le domaine limité par $\mathcal{C}$, Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

1. Sans tracer $\mathcal{C}$, situer $\mathcal{C}$ par rapport à Δ sur $[0;2]$.
2. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine (E). Donner une valeur approchée de l'aire (E) au mm^2 près.

Exercice 186 À la rentrée scolaire, une étude statistique s'intéresse au prix des classeurs. Les fonctions f et g définies par

$$f(x) = 4\ln\left(\frac{6}{x}\right) \text{ et } g(x) = 4\ln(2x-1)$$

représentent respectivement les quantités demandées et offertes, c'est-à-dire :

– pour les quantités de classeurs exprimées en milliers, que les consommateurs sont prêts à acheter en fonction du prix unitaire x du classeur exprimé en euros ;
– pour les quantités de classeurs exprimées en milliers, que les producteurs sont prêts à vendre en fonction du prix unitaire x du classeur exprimé en euros.

Partie A.

1. Résoudre le système : $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$.
   L'intervalle I, solution du système, est l'intervalle d'étude du modèle.
2. Étudier les variations de f et de g sur I.
   Tracer les représentations graphiques respectives et de f et de g, dans un plan muni d'un repère orthogonal : on prendra 2 cm pour 1 euro en abscisse et 2 cm pour 1 millier de classeurs en ordonnée.
3. Déterminer les coordonnées du point K intersection de f et g sur I. La valeur est appelée prix d'équilibre.
4. Quel est le revenu total des producteurs pour le prix d'équilibre ?

Partie B.

1. Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = 4\left(x\ln\left(\dfrac{6}{x}\right) + x\right)$. Montrer que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.
2. Les consommateurs se procurent les quantités offertes à un prix supérieur à celui d'équilibre. La somme totale alors perçue en plus par les producteurs est représentée par l'aire de la partie du plan située entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_0$ et $x = 6$, où x_0 est le prix d'équilibre ; elle traduit le surplus des consommateurs. Calculer ce surplus en euros

Exercice 187 Sachant que le coût marginal de la production d'un bien est donné par la relation

$$C_{ma}(q) = 3q^2 - 8q$$

en fonction de la quantité produite et que les coûts fixes sont évalués à $C_T(0) = 4$, déterminer l'expression du coût total de la production $C_T(q)$ et du coût moyen $C_m(q)$.

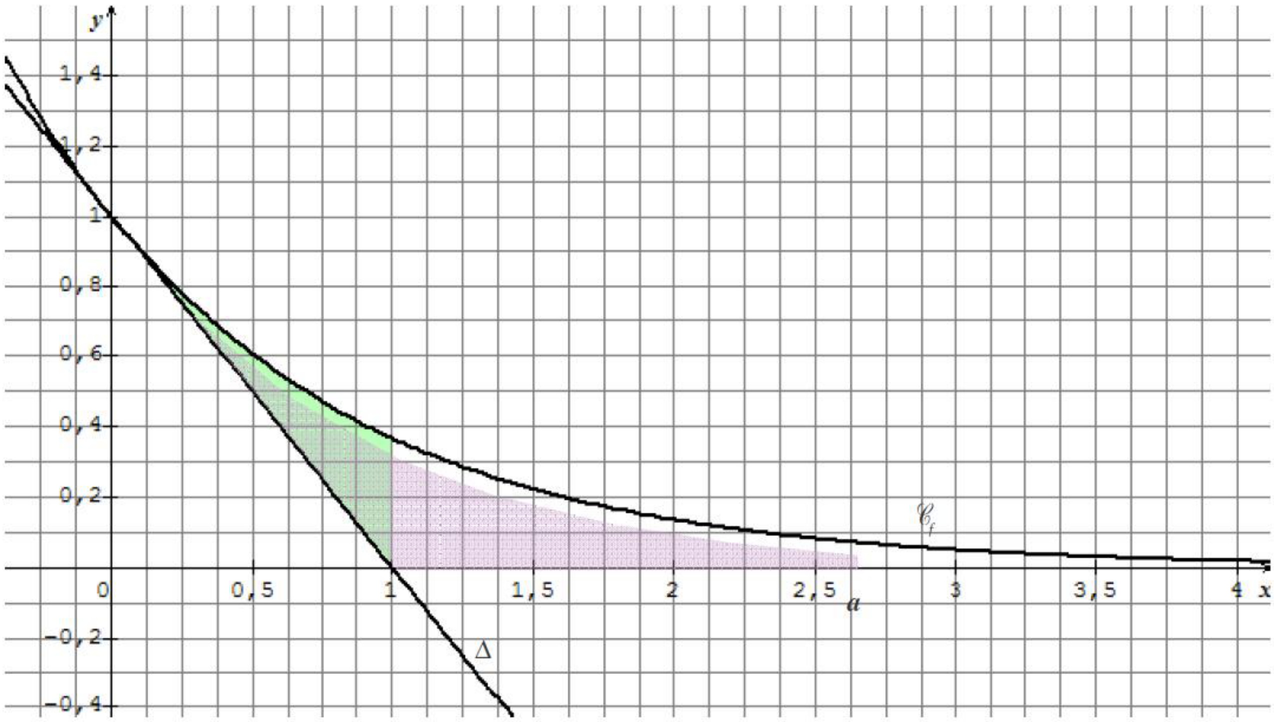
Exercice 188 On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = -x + 1$ et $h(x) = f(x) - g(x)$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et Δ la droite représentant la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Partie A. Position relative de $\mathcal{C}_f$ et de l'une de ses tangentes.

1. Vérifier, par le calcul, que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite Δ.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 1 - e^{-x}$.
   (b) Étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.
   (c) En déduire le sens de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
3. En utilisant les questions 1. et 2., étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B. Calcul d'aire.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$.
2. Soit a un nombre réel vérifiant $a > 1$. On appelle D le domaine colorié sur le graphique en annexe. On note A l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine D.
   (a) Déterminer en fonction de a la valeur de A.
   (b) Déterminer la limite de A lorsque a tend vers $+\infty$.



Exercice 189 On considère la fonction f définie sur $[-2;2]$ par $f(x) = (x-1)e^x + 2$. On note f' sa dérivée.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $f(-2)$, $f(0)$ et $f(2)$.
2. Calculer $f'(x)$. Donner le tableau de variations de f sur $[-2;2]$.
3. On considère les points $A(1;2)$ et $B(0;2-e)$. Démontrer que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.
4. Construire avec précision la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de f dans un repère orthogonal (unités : 4 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).
5. On admet que la fonction F définie par $F(x) = (x-2)e^x + 2x$ est une primitive de la fonction f sur $[-2;2]$. Hachurer la partie $\mathcal{A}$ du plan délimitée par les axes du repère, la droite d'équation $x = 2$ et la courbe $\mathcal{C}_f$. Calculer la mesure en cm^2 de l'aire $\mathcal{A}$.