

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Trinômes du second degré</b>	<b>29</b>
1.1	Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	29
1.1.1	Transformation de l'équation	29
1.1.2	Résolution de l'équation	29
1.2	Étude du signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$ , $a \neq 0$	30
1.3	Application à la recherche du domaine de définition d'une fonction	31
1.4	Remarques	33
1.5	Tableau récapitulatif	34
1.6	Exercices	34
<b>2</b>	<b>Sens de variation. Dérivation</b>	<b>39</b>
2.1	Introduction	39
2.2	Notions préliminaires	39
2.2.1	Coefficient directeur d'une droite	39
2.2.2	Fonctions monotones	39
2.3	Taux de variation	41
2.3.1	Définition	41
2.3.2	Interprétation graphique	41
2.4	Nombre dérivé et tangente	41
2.4.1	Nombre dérivé - Interprétation géométrique	41
2.4.2	Exemples	42
2.4.3	Équation de la tangente	43
2.5	La fonction dérivée	44
2.5.1	Définitions	44
2.5.2	Exemple	44
2.6	Les fonctions dérivées usuelles	44
2.6.1	Somme et produit de deux fonctions	44
2.6.2	Dérivées des fonctions usuelles	45
2.6.3	Dérivées des fonctions logarithme népérien et exponentielle népérienne	45
2.6.4	Exemples	46
2.7	Sens de dérivation d'une fonction	47
2.7.1	Fonction croissante sur un intervalle	47
2.7.2	Fonction décroissante sur un intervalle	48
2.7.3	Fonction constante sur un intervalle	48
2.7.4	Exemple	48
2.8	Point d'inflexion - Concavité	49
2.8.1	Fonction dérivée seconde	49
2.8.2	Position de la courbe et de la tangente	49
2.9	Exercices	53

<b>3</b>	<b>Le logarithme et l'exponentielle</b>	<b>59</b>
3.1	Le logarithme népérien . . . . .	59
3.1.1	Présentation de la fonction . . . . .	59
3.1.2	Logarithme d'une fonction . . . . .	60
3.1.3	Logarithme décimal et applications . . . . .	61
3.2	L'exponentielle . . . . .	63
3.2.1	Présentation de la fonction . . . . .	63
3.2.2	Formules fondamentales . . . . .	64
3.2.3	Étude de la fonction exponentielle . . . . .	64
3.2.4	Fonctions du type $e^u$ . . . . .	65
3.2.5	Fonctions exponentielles de base $a$ . . . . .	66
3.3	Exercices . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Les fonctions économiques</b>	<b>71</b>
4.1	Les fonctions coûts . . . . .	71
4.1.1	Coût total de production . . . . .	71
4.1.2	Coût marginal de production . . . . .	72
4.1.3	Coût moyen de production . . . . .	73
4.1.4	La recette et le bénéfice total . . . . .	74
4.1.5	Exercice . . . . .	75
4.2	Les fonctions d'offre et de demande . . . . .	75
4.2.1	Définitions . . . . .	75
4.2.2	La fonction élasticité . . . . .	76
4.3	Exercices . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Pourcentages et indices</b>	<b>83</b>
5.1	Pourcentage instantané . . . . .	83
5.1.1	Définitions . . . . .	83
5.2	Pourcentage d'évolution (ou taux de croissance ou taux de variation) . . . . .	84
5.2.1	Définitions . . . . .	84
5.2.2	Évolutions successives . . . . .	85
5.3	Indice et comparaison d'évolution . . . . .	87
5.3.1	Notion d'indice . . . . .	87
5.3.2	Les indices synthétiques . . . . .	88
5.4	Suites de nombres . . . . .	90
5.4.1	Origine . . . . .	90
5.4.2	Formules relatives aux suites arithmétiques et géométriques . . . . .	91
5.4.3	Exemple classique de suite arithmétique : caisse d'épargne . . . . .	91
5.5	Exercices . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Les primitives</b>	<b>97</b>
6.1	Introduction . . . . .	97
6.2	Existence des fonctions primitives . . . . .	97
6.3	Les primitives usuelles . . . . .	98
6.4	Exercices . . . . .	99
<b>7</b>	<b>Intégration</b>	<b>103</b>
7.1	Définition . . . . .	103
7.2	Intégrales et inégalités . . . . .	103
7.3	Intégrale fonction de sa borne supérieure . . . . .	104
7.4	Intégration par parties . . . . .	105
7.5	Le calcul d'aire . . . . .	107
7.5.1	L'unité d'aire . . . . .	107

---

7.5.2	Cas où $f(x) \geq 0$ , $\forall x \in [a, b]$ . . . . .	107
7.5.3	Cas où $f(x) \leq 0$ , $\forall x \in [a, b]$ . . . . .	108
7.5.4	Cas où $f(x)$ n'a pas de signe constant sur $[a, b]$ . . . . .	108
7.5.5	Aire définie à partir de deux fonctions . . . . .	109
7.6	Exercices . . . . .	110



# Chapitre 7

## Intégration

### 7.1 Définition

**Définition 7.1.1** Soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I = [a; b]$  de  $\mathbb{R}$  et  $F$  une fonction primitive de  $f$  sur  $I$ . On nomme *intégrale* de  $f$  sur  $[a, b]$  le réel noté

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

**Exemple 7.1.1** Soit  $J = \int_1^3 (2x + 1)dx$ . Si on pose  $f(x) = 2x + 1$ , les primitives de  $f$  sont données par  $F(x) = x^2 + x + c$ . Alors,

$$\int_1^3 (2x + 1)dx = [F(x)]_1^3 = F(3) - F(1) = (12 + c) - (2 + c) = 10.$$

#### Remarque 7.1.1

- $\int_a^b f(x)dx$  est indépendante de la constante utilisée pour définir une fonction primitive de  $f$ .
- $\int_a^b f(x)dx$  se lit "intégrale (ou somme) de  $a$  à  $b$  de  $f(x)dx$ ".
- $\int_a^b f(x)dx$  peut encore s'écrire  $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$ .
- On a en particulier

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

En effet,  $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$ .

- On a la relation

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

En effet,  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(x)dx$ .

### 7.2 Intégrales et inégalités

**Proposition 7.2.1** Soit une fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$  avec  $a < b$ . Alors,  $\forall x \in [a, b]$

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

(La réciproque est fausse.)

**Exemple 7.2.1** On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x$  sur  $[-1, 2]$ . On a le tableau de signes suivant :

$x$	-1	0	2
signe de $f(x)$	-		+

donc  $f$  n'a pas de signe constant sur  $[-1, 2]$ . Or,  $\int_{-1}^2 x dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^2 = \frac{3}{2} > 0$  ce qui illustre bien le fait que la réciproque est fausse.

**Proposition 7.2.2** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$  avec  $a < b$ . Alors,  $\forall x \in [a, b]$

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

(La réciproque est également fausse.)

Preuve : On pose  $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$ . On utilise ensuite le résultat précédent soit

$$\int_a^b h(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx.$$

Ce résultat permet d'approcher une intégrale qui semble difficile à calculer, cela à l'aide d'un encadrement sur la fonction initiale.

**Exemple 7.2.2** Soit  $J = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ , déterminer un encadrement de  $J$ .

$$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq t^2 + 1 \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{t^2 + 1} \leq 1.$$

On intègre ensuite cette inégalité sur l'intervalle  $[0, 1]$ . On obtient alors

$$\int_0^1 \frac{1}{2} dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \leq \int_0^1 1 \cdot dt \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \leq 1.$$

### 7.3 Intégrale fonction de sa borne supérieure

**Proposition 7.3.1** Soient une fonction  $f$  continue sur  $[a, b]$  et  $c$  un élément de  $[a, b]$ . La fonction

$$\begin{aligned} G : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto G(x) = \int_c^x f(t) dt \end{aligned}$$

est la fonction primitive de  $f$ , qui s'annule en  $c$ .

Preuve : Il est simple de vérifier que  $G$  s'annule en  $c$  car  $G(c) = \int_c^c f(t) dt = 0$ . Soit ensuite  $F$  une fonction primitive de  $f$ , il est alors évident que  $G(c) = [F(t)]_c^c = F(c) - F(c) = 0$ . Comme  $G'(x) = F'(x) = f(x)$ ,  $G$  est une fonction primitive de  $f$ .

**Exemple 7.3.1** Soit  $h$  la fonction définie par

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^{+*} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

La fonction logarithme népérien est la fonction primitive de  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ , s'annulant en 1.

## 7.4 Intégration par parties

**Théorème 7.4.1** Soient deux fonctions  $u$  et  $v$  dérivables sur  $[a, b]$  et les fonctions  $u'$  et  $v'$  continues sur  $[a, b]$ . On a alors la relation

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Preuve : Il suffit pour retrouver la formule précédente de dériver la fonction  $f = uv$  puis d'intégrer les différents termes obtenus sur  $[a, b]$ . On a  $f'(x) = (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$  puis

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)dx &= \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx \\ \Leftrightarrow [f(x)]_a^b &= [u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx \end{aligned}$$

**Exemple 7.4.1** Soit  $I = \int_0^1 (2x+1)(x-1)^{10}dx$ . On pose

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x+1 & u'(x) &= 2 \\ v'(x) &= (x-1)^{10} & v(x) &= \frac{1}{11}(x-1)^{11} \end{aligned}$$

En appliquant la formule, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \left[ \frac{(2x+1)(x-1)^{11}}{11} \right]_0^1 - \frac{2}{11} \int_0^1 (x-1)^{11}dx \\ \Leftrightarrow I &= \left[ \frac{(2x+1)(x-1)^{11}}{11} \right]_0^1 - \left[ \frac{2}{11 \times 12} (x-1)^{12} \right]_0^1 = \frac{5}{66} \end{aligned}$$

**Exemple 7.4.2** Soit  $I = \int_1^e \ln x dx$ . On pose

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x & u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v'(x) &= 1 & v(x) &= x \end{aligned}$$

En appliquant la formule, on obtient

$$\begin{aligned} I &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} dx \\ \Leftrightarrow I &= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = [x \ln x - x]_1^e = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = e - e + 1 = 1 \end{aligned}$$

**Exemple 7.4.3** Soit  $I = \int_0^1 \ln(x+1)dx$ . On pose

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(x+1) & u'(x) &= \frac{1}{x+1} \\ v'(x) &= 1 & v(x) &= x+1 \end{aligned}$$

En appliquant la formule, on obtient

$$I = [(x+1) \ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 1dx \Leftrightarrow I = [(x+1) \ln(x+1) - x]_0^1$$

$$\Leftrightarrow I = (2 \ln 2 - 1) - (1 \cdot \ln 1 - 0) = 2 \ln 2 - 1$$

**Exemple 7.4.4** Soit  $I = \int_{-1}^1 \ln \left( \frac{2-x}{2+x} \right) dx$ . On pose

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln \left( \frac{2-x}{2+x} \right) = \ln(2-x) - \ln(2+x) & u'(x) &= -\frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x} \\ v'(x) &= 1 & v(x) &= x \end{aligned}$$

En appliquant la formule, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \left[ x \ln \left( \frac{2-x}{2+x} \right) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{4x}{4-x^2} dx \\ \Leftrightarrow I &= \left[ x \ln \left( \frac{2-x}{2+x} \right) - 2 \ln(4-x^2) \right]_{-1}^1 \\ \Leftrightarrow I &= \left( \ln \frac{1}{3} - 2 \ln 3 \right) - (-1 \ln 3 - 2 \ln 3) = \ln 3 + \ln \frac{1}{3} = \ln 3 - \ln(-3) = 0 \end{aligned}$$

**Exemple 7.4.5** Soit  $I = \int_0^1 (2x+1)e^{-x} dx$ . On pose

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x+1 & u'(x) &= 2 \\ v'(x) &= -e^{-x} & v(x) &= e^{-x} \end{aligned}$$

En appliquant la formule, on obtient

$$\begin{aligned} I &= [-(2x+1)e^{-x}]_0^1 + 2 \int_0^1 e^{-x} dx \\ \Leftrightarrow I &= [-(2x+1)e^{-x} - 2e^{-x}]_0^1 = [-(2x+3)e^{-x}] = -5e^{-1} + 3 = 3 - \frac{5}{e} \end{aligned}$$

**Exemple 7.4.6** Soit  $I = \int_0^1 (x^2+x+1)e^{-x} dx$ . On pose

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2+x+1 & u'(x) &= 2x+1 \\ v'(x) &= e^{-x} & v(x) &= -e^{-x} \end{aligned}$$

En appliquant la formule, on obtient

$$I = [-(x^2+x+1)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 (2x+1)e^{-x} dx$$

or  $\int_0^1 (2x+1)e^{-x} dx$  a été calculée dans l'exercice précédent. Finalement,

$$I = [-(x^2+x+1)e^{-x}]_0^1 + \left(3 - \frac{5}{e}\right) = \left(-\frac{3}{e} + 1\right) + \left(3 - \frac{5}{e}\right) = 4 - \frac{8}{e}$$

**Remarque 7.4.1** Cet exemple peut être traité d'une autre façon : on pose  $f(x) = (x^2+x+1)e^{-x}$ . Une primitive de  $f$  est  $F$  définie par  $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$ . Déterminons  $a$ ,  $b$  et  $c$ .  $\forall x \in [0, 1]$ ,

$$F'(x) = (2ax+b)e^{-x} - (ax^2+bx+c)e^{-x} \Leftrightarrow [-ax^2 + (2a-b)x + b-c]e^{-x} = (x^2+x+1)e^{-x}.$$

On résout le système

$$\begin{cases} -a &= 1 \\ 2a-b &= 1 \\ b-c &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -1 \\ b &= -3 \\ c &= -4 \end{cases}$$

et on obtient  $F(x) = (-x^2-3x-4)e^{-x}$ . Donc,

$$I = F(1) - F(0) = -8e^{-1} + 4 = 4 - \frac{8}{e}$$

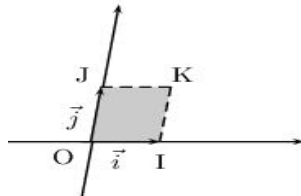


## 7.5 Le calcul d'aire

Soient  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b]$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### 7.5.1 L'unité d'aire

L'unité d'aire est l'aire du domaine plan limité par le parallélogramme OIJK.



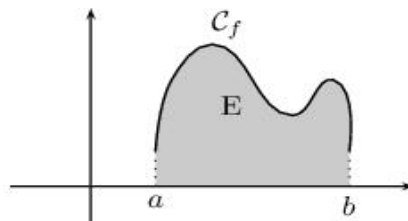
#### Exemple 7.5.1

- $\vec{i} \perp \vec{j}$  et  $\|\vec{i}\| = 1$  cm,  $\|\vec{j}\| = 2$  cm alors l'unité d'aire est  $2 \text{ cm}^2$ .
- $\vec{i} \perp \vec{j}$  et  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$  cm alors l'unité d'aire est  $4 \text{ cm}^2$ .

### 7.5.2 Cas où $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$

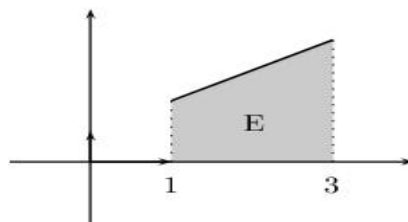
Soit  $E$  le domaine plan limité par la droite des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}_f$  et les droites d'équations  $x = a$ ,  $x = b$  soit

$$E = \{M(x, y) / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$



L'aire de  $E$  est  $\boxed{\int_a^b f(x) dx}$  exprimée en unités d'aire.

**Exemple 7.5.2** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x + 1$  sur  $[1, 3]$ . Soit  $\varphi$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé avec  $\|\vec{i}\| = 1$  cm, l'unité d'aire est  $1 \text{ cm}^2$ . L'aire de  $E$  vaut

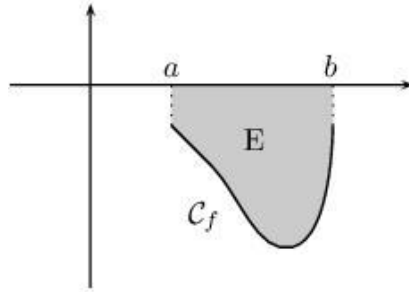


$$\mathcal{A}(E) = \int_1^3 (x+1) dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 + x \right]_1^3 = 6 \text{ cm}^2.$$

### 7.5.3 Cas où $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$

Soit  $E$  le domaine plan limité par la droite des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}_f$  et les droites d'équations  $x = a$ ,  $x = b$  soit

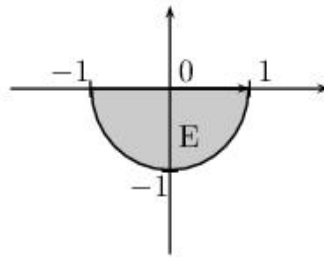
$$E = \{M(x, y) / a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$$



L'aire de  $E$  est  $\boxed{-\int_a^b f(x)dx}$  exprimée en unités d'aire.

**Exemple 7.5.3** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 - 1$  sur  $[-1, 1]$ . L'ensemble  $E$  est défini par

$$E = \{M(x, y) / -1 \leq x \leq 1, f(x) \leq y \leq 0\}$$

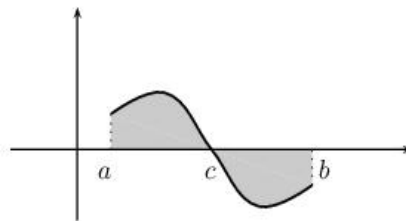


L'aire de  $E$  vaut

$$\mathcal{A}(E) = -\int_{-1}^1 (x^2 - 1)dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^1 = \frac{4}{3} \text{ cm}^2.$$

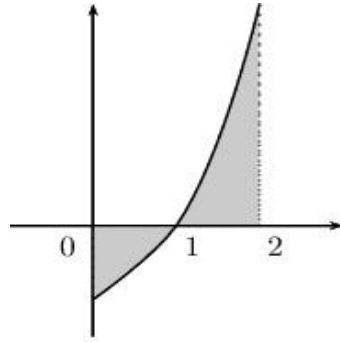
### 7.5.4 Cas où $f(x)$ n'a pas de signe constant sur $[a, b]$

Soit  $E$  le domaine plan limité par la droite des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}_f$  et les droites d'équations  $x = a$ ,  $x = b$ . L'aire de  $E$  est



$$\boxed{\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx},$$

exprimée en unités d'aire.



**Exemple 7.5.4** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 - 1$  sur  $[0, 2]$ . Alors l'aire de  $E$  vaut

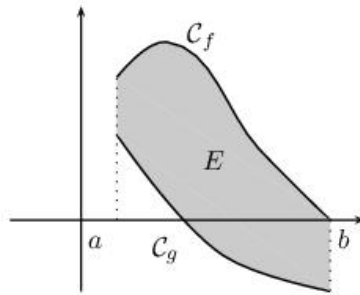
$$\mathcal{A}(E) = -\int_0^1 (x^2 - 1)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx$$

Soit  $F$  une fonction primitive de  $f$  définie par  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ , alors

$$\mathcal{A}(E) = -F(1) + F(0) + F(2) - F(1) = F(0) + F(2) - 2F(1) = 2 \text{ cm}^2.$$

### 7.5.5 Aire définie à partir de deux fonctions

Soient deux fonctions  $f$  et  $g$  continues sur  $[a, b]$  et on suppose que  $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$ .  $E$  est le



domaine plan limité par les droites d'équations  $x = a$ ,  $x = b$ , les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$ . L'aire de  $E$  est définie par

$$\boxed{\int_a^b (f(x) - g(x))dx}$$

**Remarque 7.5.1** Dans ce cas, la position des courbes par rapport à la droite des abscisses n'a pas d'importance.

**Exemple 7.5.5** Soient les fonctions  $f$  et  $g$  définies respectivement par  $f(x) = x^2 - 2$  et  $g(x) = x$  sur  $[-1, 2]$ . On définit

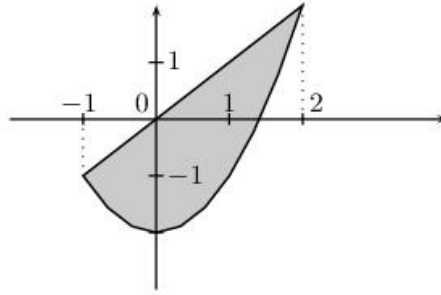
$$E = \{M(x, y) / -1 \leq x \leq 2, x^2 - 2 \leq y \leq x\}$$

L'aire de  $E$  est donnée par

$$\mathcal{A}(E) = \int_{-1}^2 [x - (x^2 - 2)]dx.$$

On pose  $h(x) = x - x^2 + 2$ . Une primitive de  $h$  est donnée par  $H(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 2x$ . Finalement,

$$\mathcal{A}(E) = H(2) - H(-1) = (2 - \frac{8}{3} + 4) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2) = 8 - 3 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \text{ cm}^2.$$



## 7.6 Exercices

### Exercice 183

- Calculer l'aire du domaine E en unités d'aire avec  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$  :
  - $[a; b] = [-1; 1]$ ,  $f(x) = x^2 + 1$ ,
  - $[a; b] = \left[\frac{1}{3}; 1\right]$ ,  $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ ,
- Calculer l'aire du domaine E en unités d'aire avec  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$  :
  - $[a; b] = [-1; 1]$ ,  $f(x) = x^2 - 1$ ,
  - $[a; b] = [-4; -2]$ ,  $f(x) = x + 2$ ,
- Calculer l'aire du domaine E en unités d'aire avec  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$  :
  - $[a; b] = [0; 2]$ ,  $f(x) = x^2 - 1$ ,
  - $[a; b] = [-2; 2]$ ,  $f(x) = x + 1$ ,

**Exercice 184** Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Soit  $x$  la quantité produite en tonnes. Le coût total de production pour  $x$  unités est exprimé en milliers d'euros par :

$$C_T(x) = x^3 - 15x^2 + 76x.$$

Soit E le domaine plan limité par la courbe, la droite des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 5$ .

- Représenter graphiquement le domaine plan E.
- Déterminer l'aire du domaine plan E, en unités d'aire (ex : si  $\|\vec{i}\| = 1$  cm,  $\|\vec{j}\| = 2$  cm, u.a.=2cm<sup>2</sup> ; si  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$  cm, u.a.=4cm<sup>2</sup>).

**Exercice 185** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x - \frac{x}{x^2 + 1}$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité : 2 cm). La droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  à l'infini. Soit (E) le domaine limité par  $\mathcal{C}$ ,  $\Delta$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 2$ .

- Sans tracer  $\mathcal{C}$ , situer  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\Delta$  sur  $[0; 2]$ .
- Calculer, en cm<sup>2</sup>, l'aire du domaine (E). Donner une valeur approchée de l'aire (E) au mm<sup>2</sup> près.

**Exercice 186** À la rentrée scolaire, une étude statistique s'intéresse au prix des classeurs. Les fonctions  $f$  et  $g$  définies par

$$f(x) = 4 \ln \left( \frac{6}{x} \right) \text{ et } g(x) = 4 \ln(2x - 1)$$

représentent respectivement les quantités demandées et offertes, c'est-à-dire :

- pour les quantités de classeurs exprimées en milliers, que les consommateurs sont prêts à acheter en fonction du prix unitaire  $x$  du classeur exprimé en euros ;
- pour les quantités de classeurs exprimées en milliers, que les producteurs sont prêts à vendre en fonction du prix unitaire  $x$  du classeur exprimé en euros.

**Partie A.**

1. Résoudre le système :  $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ .

L'intervalle  $I$ , solution du système, est l'intervalle d'étude du modèle.

2. Étudier les variations de  $f$  et de  $g$  sur  $I$ .

Tracer les représentations graphiques respectives de  $f$  et de  $g$ , dans un plan muni d'un repère orthogonal : on prendra 2 cm pour 1 euro en abscisse et 2 cm pour 1 millier de classeurs en ordonnée.

3. Déterminer les coordonnées du point  $K$  intersection de  $f$  et  $g$  sur  $I$ . La valeur est appelée prix d'équilibre.
4. Quel est le revenu total des producteurs pour le prix d'équilibre ?

**Partie B.**

1. Soit  $F$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $F(x) = 4 \left( x \ln \left( \frac{6}{x} \right) + x \right)$ . Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
2. Les consommateurs se procurent les quantités offertes à un prix supérieur à celui d'équilibre. La somme totale alors perçue en plus par les producteurs est représentée par l'aire de la partie du plan située entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = x_0$  et  $x = 6$ , où  $x_0$  est le prix d'équilibre ; elle traduit le surplus des consommateurs. Calculer ce surplus en euros

**Exercice 187** Sachant que le coût marginal de la production d'un bien est donné par la relation

$$C_{ma}(q) = 3q^2 - 8q$$

en fonction de la quantité produite et que les coûts fixes sont évalués à  $C_T(0) = 4$ , déterminer l'expression du coût total de la production  $C_T(q)$  et du coût moyen  $C_m(q)$ .

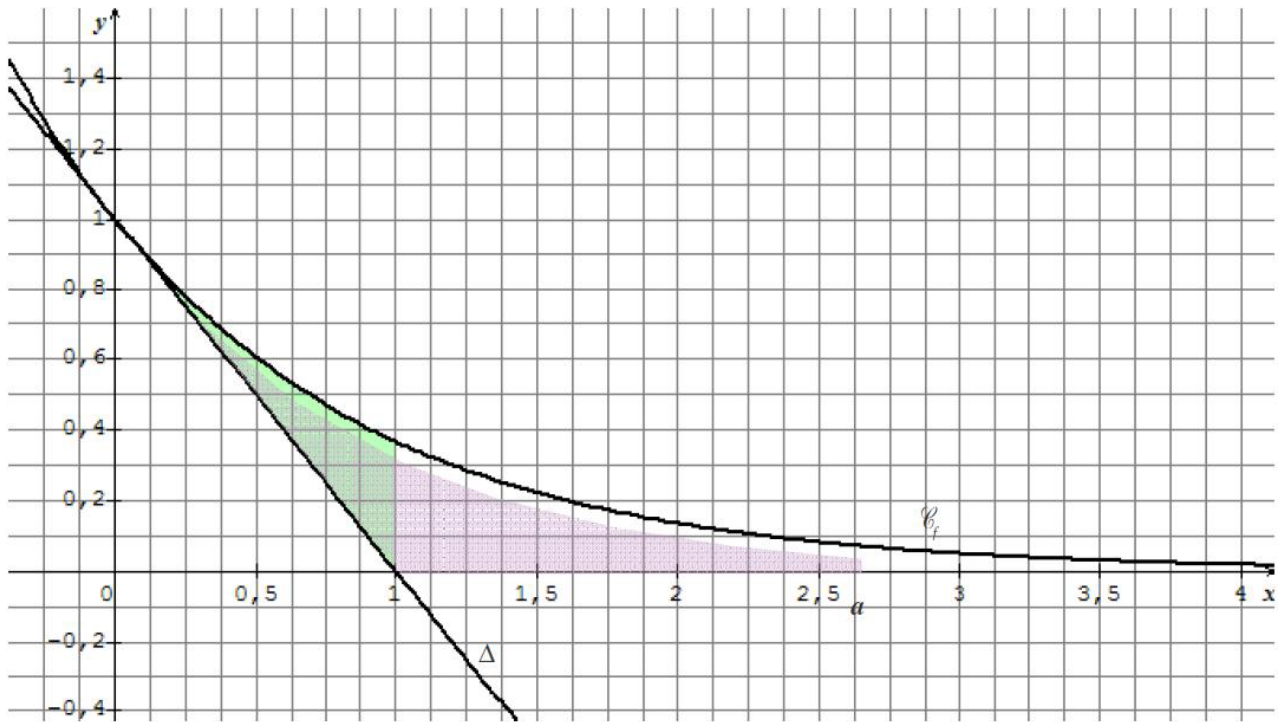
**Exercice 188** On considère les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-x}$ ,  $g(x) = -x + 1$  et  $h(x) = f(x) - g(x)$ . On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  et  $\Delta$  la droite représentant la fonction  $g$  dans un repère orthonormé du plan.

**Partie A.** Position relative de  $\mathcal{C}_f$  et de l'une de ses tangentes.

1. Vérifier, par le calcul, que la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0 est la droite  $\Delta$ .
2. (a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h'(x) = 1 - e^{-x}$ .  
(b) Étudier le signe de  $h'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .  
(c) En déduire le sens de variation de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. En utilisant les questions 1. et 2., étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  et de sa tangente au point d'abscisse 0.

**Partie B.** Calcul d'aire.

1. Montrer que  $\int_0^1 h(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$ .
2. Soit  $a$  un nombre réel vérifiant  $a > 1$ . On appelle  $D$  le domaine colorié sur le graphique en annexe. On note  $A$  l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine  $D$ .  
(a) Déterminer en fonction de  $a$  la valeur de  $A$ .  
(b) Déterminer la limite de  $A$  lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ .



**Exercice 189** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-2; 2]$  par  $f(x) = (x - 1)e^x + 2$ . On note  $f'$  sa dérivée.

1. Donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $f(-2)$ ,  $f(0)$  et  $f(2)$ .
2. Calculer  $f'(x)$ . Donner le tableau de variations de  $f$  sur  $[-2; 2]$ .
3. On considère les points  $A(1; 2)$  et  $B(0; 2 - e)$ . Démontrer que la droite  $(AB)$  est la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$ .
4. Construire avec précision la représentation graphique  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  dans un repère orthogonal (unités : 4 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).
5. On admet que la fonction  $F$  définie par  $F(x) = (x - 2)e^x + 2x$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $[-2; 2]$ . Hachurer la partie  $\mathcal{A}$  du plan délimitée par les axes du repère, la droite d'équation  $x = 2$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$ . Calculer la mesure en  $\text{cm}^2$  de l'aire  $\mathcal{A}$ .