Table des matières

Chapitre 8

Les fonctions à plusieurs variables

8.1 Définitions et exemples

Définition 8.1.1 *Une fonction de deux variables est définie par*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

Exemple 8.1.1

- Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{2x+y}{x^2+y^2-1} \end{array}$$

  Le domaine de définition de f est défini par $\mathcal{D}_f = \{(x,y)/x^2+y^2-1 \neq 0\}$. Or $x^2+y^2=1$ est l'équation du cercle de centre 0 et de rayon 1 donc $\mathcal{D}_f$ est par conséquent le plan privé des points du cercle $\mathcal{C}(0,1)$.
- Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \sqrt{x+y-1} \end{array}$$

  On a dans ce cas $\mathcal{D}_f = \{(x,y)/x+y-1 \geq 0\}$. Soit D la droite d'équation $x+y-1=0$. Cette droite partage le plan en deux demi-plans (I) et (II). Alors, pour tout point $M(x,y)$ situé dans le demi-plan (I), $x+y-1>0$. Finalement, le domaine définition est le demi-plan (I) avec sa frontière, la droite D.

8.2 Graphe d'une fonction de deux variables

Une première façon de visualiser une fonction de deux variables est de se tourner vers sa représentation graphique. On rappelle que le graphique de f est une surface d'équation $z=f(x,y)$.

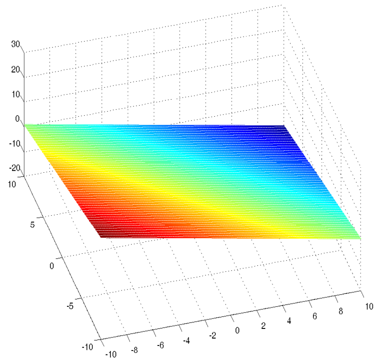
Définition 8.2.1 *Soit $f:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. Le* ***graphe*** *de cette fonction est l'ensemble des triplets $(x,y,f(x,y))$ avec $(x,y) \in \mathcal{D}_f$.*

Définition 8.2.2 *Si on considère un repère orthonormé $\mathcal{R} = (0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, la* ***surface*** *est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ dont l'équation est donnée par $z=f(x,y)$.*

Exemple 8.2.1 Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 1-x-y \end{array}$$

La surface a pour équation $z=1-x-y$ ou $x+y+z=1$. Cette surface est un plan qui rencontre les axes de coordonnées aux points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$:



Exercice 190 Tracer le graphique de $g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.
Une autre façon de visualiser des fonctions, empruntée aux cartographes, est un diagramme de courbes de niveau où des points d'élévation constante sont reliés pour former une courbe de niveau.

Définition 8.2.3 *On appelle* ***ligne (ou courbe) de niveau de côte*** c *l'ensemble des points* $M(x,y)$ *tels que* $f(x,y) = c$. *Cette ligne de niveau est notée* Γ_c. *C'est encore l'ensemble des couples* (x,y) *antécédents du réel* c *par la fonction* f.

L'exemple le plus familier de courbes de niveau est celui des cartes topographiques des régions montagneuses. Les courbes de niveau sont des courbes d'altitude constante au dessus du niveau de la mer. Un autre exemple très commun est la fonction de température. Les courbes de niveau dans ce contexte sont appelées des courbes isothermales. Elles joignent des points de même température.

Remarque 8.2.1 L'ensemble des points $N(x,y,c)$ est l'intersection de la surface S et du plan parallèle à $(0,\vec{i},\vec{j})$, d'équation $z = c$.

Exemple 8.2.2

– Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \end{array}$$

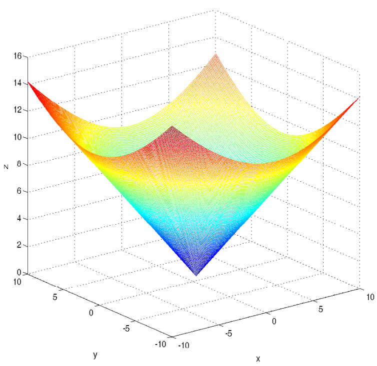
$f(x,y) = c \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = c$. On a alors les cas suivants :

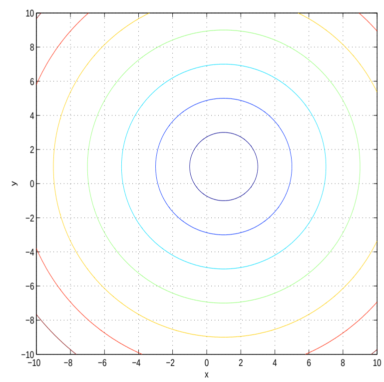
. $c < 0$, $\Gamma_c = \emptyset$, les plans d'équations $z = c$ avec $c < 0$ ne rencontrent pas la surface S.

. $c = 0$, le plan d'équation $z = 0$ (donc le plan $(0,\vec{i},\vec{j})$) rencontre la surface S en un seul point $(1,1,0)$.

. $c > 0$, $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = c \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = c^2$, qui est l'équation d'un cercle de centre $(1,1)$ et de rayon c. Le plan d'équation $z = c$ (plan parallèle à $(0,\vec{i},\vec{j})$) rencontre la surface S suivant un cercle de centre $(1,1,c)$ de rayon c.

On a les graphiques suivants :





– Soit

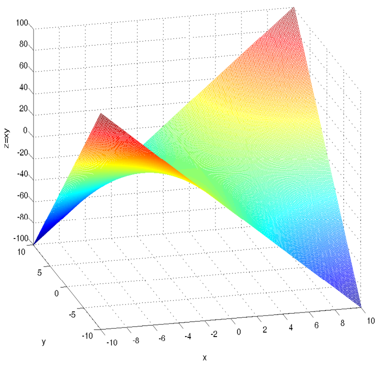
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & ax + by + d \end{array}$$

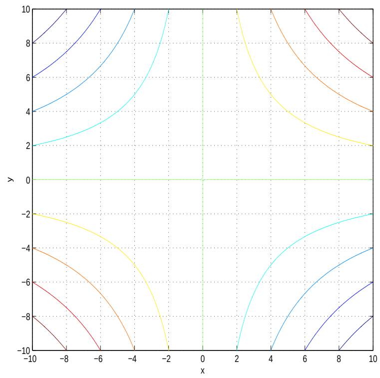
La ligne de niveau Γ_c est l'ensemble des points N tels que $ax + by + d = c$ qui est l'équation d'une droite.

– Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$$

La ligne de niveau Γ_c avec $c \neq 0$ a pour équation $xy = c$, équation d'une famille d'hyperboles.





Exercice 191 Dessiner les courbes de niveau de la fonction $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

Exercice 192 Dessiner quelques courbes de niveau de la fonction $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

Remarque 8.2.2 Une fonction de trois variables f est une règle qui assigne à chaque triplet ordonné (x, y, z) dans le domaine de définition $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^3$ un unique nombre réel, noté $f(x, y, z)$. Par exemple, comme la température en un point de la Terre dépend de la longitude x, de la latitude y du point et du moment t, on peut écrire $T = f(x, y, t)$. Il est très difficile de visualiser une fonction de trois variables par son graphique, vu que celui-ci devrait se trouver dans un espace à quatre dimensions. Néanmoins, examiner ses **surfaces de niveau** permet de comprendre un peu mieux le comportement de f. Ce sont les surfaces d'équations $f(x, y, z) = k$, où k est une constante. Tant que (x, y, z) se déplace sur une surface de niveau, la valeur de $f(x, y, z)$ reste inchangée.

8.3 Dérivées partielles

8.3.1 Définition

Soient f une fonction de deux variables admettant $\mathcal{D}_f$ pour domaine de définition et $M_0(x_0, y_0)$ un point intérieur à $\mathcal{D}$.

Définition 8.3.1 *On considère la fonction*

$$\varphi_{y_0} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi_{y_0}(x) = f(x, y_0) \end{array}.$$

Si la fonction φ_{y_0} est dérivable en x_0,

$$\varphi'_{y_0}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi_{y_0}(x_0 + h) - \varphi_{y_0}(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

*$\varphi'_{y_0}(x_0)$ est appelée **dérivée partielle de f par rapport à la variable** x en (x_0, y_0). Cette dérivée est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.*

Exemple 8.3.1 Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$. On pose $\varphi_{y_0}(x) = x^2 + y_0^2$. La dérivée partielle de f par rapport à la variable x en $(x, 1)$ est égale à la dérivée de $\varphi_1(x) = x^2 + 1$ soit $\varphi'_1(x) = 2x$.

Définition 8.3.2 *On considère la fonction*

$$\begin{array}{rccl} \phi_{x_0} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \phi_{x_0}(y) = f(x_0, y) \end{array}.$$

Si la fonction ϕ_{x_0} est dérivable en y_0,

$$\phi'_{x_0}(y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{\phi_{x_0}(y_0 + k) - \phi_{x_0}(y_0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

*$\phi'_{x_0}(y_0)$ est appelée **dérivée partielle de f par rapport à la variable y en** (x_0, y_0). Cette dérivée est notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.*

Exemple 8.3.2 Soit $f(x, y) = x^3 + 2y^2$. On considère $x_0 = 2$. Alors, $\phi_2(y) = 8 + 2y^2$ et $\phi'_2(y) = 4y$. Par conséquent, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2, y) = 4y$.

8.3.2 Dans la pratique

Lorsqu'on détermine la dérivée partielle par rapport à la variable x, on suppose que x varie, l'autre variable y restant fixe donc constante.

Exemple 8.3.3 Soit $f(x, y) = e^{x^2 y}$ alors, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xye^{x^2 y}$.

Lorsqu'on détermine la dérivée partielle par rapport à la variable y, on suppose que y varie, l'autre variable x restant fixe donc constante.

Exemple 8.3.4 Soit $f(x, y) = e^{x^2 y}$ alors, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x^2 y}$.

Exercice 193 Calculer $f'_x(2, 1)$ et $f'_y(2, 1)$ si $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$.

Remarque 8.3.1 L'interprétation géométrique des dérivées partielles passe par la surface S représentative de f d'équation $z = f(x, y)$. Si $f(x_0, y_0) = z_0$ alors le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ se trouve sur S. Fixer $y = y_0$ revient à restreindre l'attention à la courbe C_x selon laquelle le plan vertical $y = y_0$ coupe S (autrement dit C_x est la trace de S dans le plan $y = y_0$). De même le plan vertical $x = x_0$ coupe S selon la courbe C_y. On remarquera que la courbe C_x n'est autre que le graphique de la fonction $\phi_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ et que la pente de la tangente T_x en M_0 est donnée par $\phi'_{y_0}(x) = f'_x(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. La courbe C_y est le graphe de la fonction $\varphi_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ et la pente de la tangente T_y en M_0 est $\varphi'_{x_0}(y) = f'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Par conséquent les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ peuvent être interprétées comme les pentes des tangentes en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ aux traces C_x et C_y de S dans les plans $y = y_0$ et $x = x_0$.

Exercice 194 Soit $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Calculer $f'_x(1, 1)$ et $f'_y(1, 1)$ et interpréter ces nombres en tant que pentes.

Remarque 8.3.2 On peut aussi définir les dérivées partielles des fonctions de trois variables ou plus. Par exemple, si $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy} \ln z$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} \ln z$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y) = \dfrac{e^{xy}}{z}$.

8.3.3 Dérivée d'ordre supérieur

Soit f une fonction de domaine de définition $\mathcal{D}$ et $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ l'ensemble des points intérieurs à $\mathcal{D}$. On suppose que f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en tout point de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$.

(a) Si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ admet une dérivée partielle par rapport à la variable x en tout point de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, on note

$$\boxed{\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$$

Exemple 8.3.5 Soit $f(x,y) = 2x^2y + 3xy^3 + y + 5$. On a $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 = \overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy + 3y^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4y.$$

(b) Si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ admet une dérivée partielle par rapport à la variable y en tout point de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, on note

$$\boxed{\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$$

Exemple 8.3.6 Soit $f(x,y) = 2x^2y + 3xy^3 + y + 5$. Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy + 3y^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4x + 9y^2.$$

(c) Si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ admet une dérivée partielle par rapport à la variable y en tout point de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, on note

$$\boxed{\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

Exemple 8.3.7 Soit $f(x,y) = 2x^2y + 3xy^3 + y + 5$. Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 9xy^2 + 1 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 18xy.$$

(d) Si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ admet une dérivée partielle par rapport à la variable x en tout point de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, on note

$$\boxed{\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}$$

Exemple 8.3.8 Soit $f(x,y) = 2x^2y + 3xy^3 + y + 5$. Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 9xy^2 + 1 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4x + 9y^2.$$

Remarque 8.3.3 On a pu noter dans l'exemple précédent que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Ce n'est pas fortuit, il s'avère que les dérivées partielles mixtes sont égales pour la plupart des fonctions que l'on rencontre couramment.

Exercice 195 Calculer les dérivées secondes partielles de $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$.

8.3.4 Théorème de Schwarz (admis)

Théorème 8.3.1 *Soit une fonction f admettant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 en tout point (x_0, y_0) de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Si les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues en (x_0, y_0) alors*

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)}.$$

Exemple 8.3.9 Soit $f(x, y) = 2x^2 + 3y + x^2 y$. On a $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 = \overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x + 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3 + x^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x.$$

8.3.5 Le plan tangent

Soit f une fonction de deux variables d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. La surface est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ avec $z = f(x, y)$. En général, cette surface admet en chacun de ses points (sauf peut-être en des points exceptionnels) un plan tangent.

Définition 8.3.3 *L'équation du plan tangent en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est donnée par :*

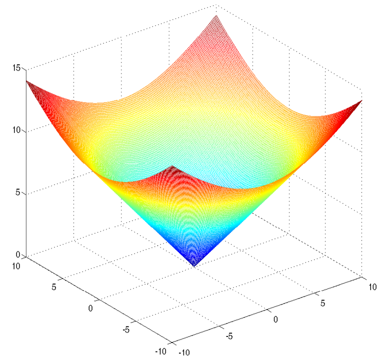
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0}$$

<u>*Rappel*</u> : $ax + by + cz + d = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$ est l'équation d'un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}(a, b, c)$.

Le plan tangent en $M_0(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ a pour vecteur normal $\vec{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$.

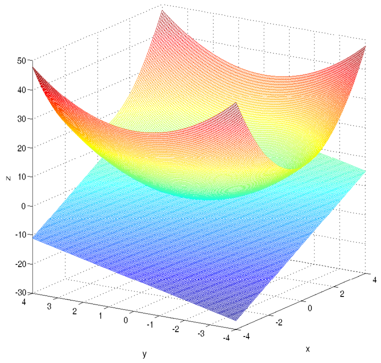
Exemple 8.3.10

- Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$, la surface a pour équation $z = x^2 + y^2$. Les dérivées partielles du premier ordre sont données par $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$. Soit $M_0(1, 2, 5)$ un point de cette surface (puisque $f(1, 2) = 5$). On obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4$. Le plan tangent en M_0 à la surface a pour équation $2(x - 1) + 4(y - 2) - (z - 5) = 0$ ou encore $2x + 4y - z - 5 = 0$.
- Soit $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$. On a $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. La surface est un cône de sommet O.



Les dérivées partielles ne sont pas définies au point $(0,0)$. On peut déterminer l'équation du plan tangent en tout point de $\mathbb{R}^2$ sauf en l'origine.

– Déterminons le plan tangent au paraboloïde elliptique $z = 2x^2 + y^2$ au point $(1,1,3)$. Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$. Par conséquent, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 4$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2$. L'équation du plan tangent en $(1,1,3)$ s'écrit alors $z = 4x + 2y - 3$. La figure ci-dessous exhibe le paraboloïde elliptique et son plan tangent en $(1,1,3)$.



8.4 Les extréma libres

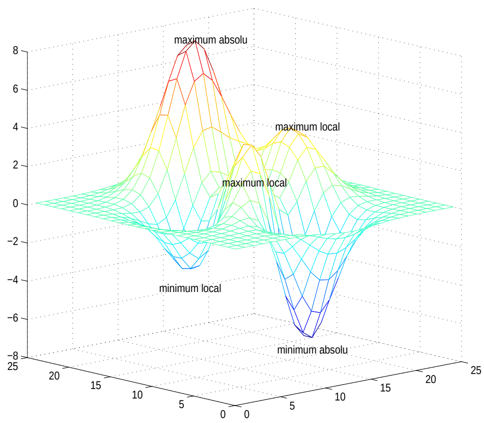
Ainsi que nous l'avons vu au premier semestre, un des principaux usages des dérivées ordinaires est de détecter des valeurs extrêmes. Dans cette section, nous allons voir comment les dérivées partielles conduisent aux valeurs maximales et minimales des fonctions de deux variables.

8.4.1 Définitions

Définition 8.4.1 *Une fonction f de deux variables présente un* ***maximum local*** *en (x_0,y_0) si $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ lorsque (x,y) est à proximité de (x_0,y_0) (plus précisément $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ pour tous les points (x,y) dans un certain disque centré en (x_0,y_0)). Le nombre $f(x_0,y_0)$ est la valeur du maximum local.*
Une fonction f de deux variables présente un ***minimum local*** *en (x_0,y_0) si $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ lorsque (x,y) est proche de (x_0,y_0). Le nombre $f(x_0,y_0)$ est la valeur du minimum local.*

Définition 8.4.2 *Au cas où les inégalités de la définition 8.4.1 ont lieu pour tous les points (x,y) du domaine de définition de f alors f admet un* ***maximum absolu*** *(ou un* ***minimum absolu****) en (x_0,y_0).*

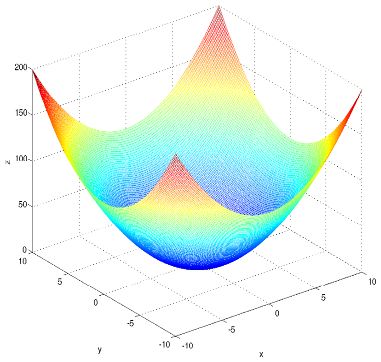
La figure ci-dessous présente le graphique d'une fonction qui a plusieurs maxima et minima. On peut imaginer les maxima locaux comme des sommets de montagnes et les minima locaux comme des fonds de vallée.



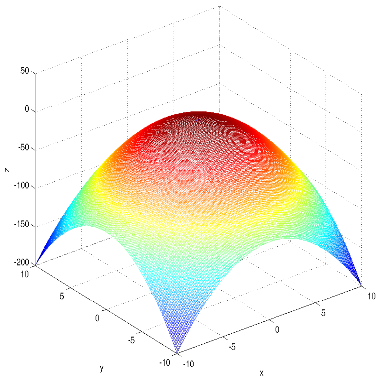
Remarque 8.4.1 Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de domaine de définition $\mathcal{D}_f$. On recherche donc les points $M_0(x_0, y_0)$ intérieurs au domaine tels que $f(M) - f(M_0)$ garde un signe constant lorsque M tend vers M_0 ou encore lorsque $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ garde un signe constant lorsque h et k tendent vers 0. M_0 est alors le point où f admet un **extrémum local**.

8.4.2 Exemples

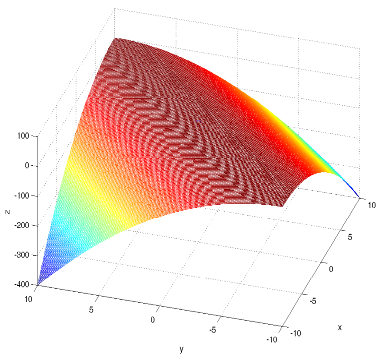
1. $f(x, y) = x^2 + y^2$. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq 0$, f admet un minimum absolu au point $(0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.



2. $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \leq 1$, f admet un maximum absolu au point $(0, 0)$ et $f(0, 0) = 1$.



3. $f(x, y) = 1 - (x - y)^2$. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \leq 1$, f admet un maximum absolu qui vaut 1. Ce maximum est atteint en une infinité de points, tous les points de la forme (x, x).



8.4.3 Les conditions nécessaires du premier ordre

Supposons que f admette des dérivées partielles premières définies et continues en tout point de $\mathcal{D}_f$.
De la même façon que pour les fonctions d'une variable, si f admet un extrémum local au point $M_0(x_0, y_0)$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

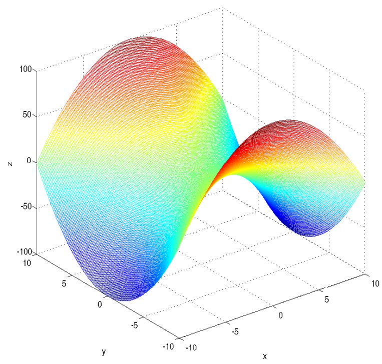
Cette condition est nécessaire mais non suffisante. Les conditions

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{array}\right.}$$

sont appelées **conditions du premier ordre**. Le point $M_0(x_0, y_0)$ est alors un **point critique** (ou **point stationnaire**).

Théorème 8.4.1 *Si f passe par un maximum ou un minimum local en (x_0, y_0) et si les dérivées partielles premières de f y existent alors (x_0, y_0) est un point critique de f.*

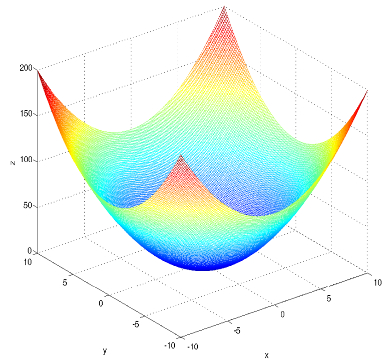
Remarque 8.4.2 Toutefois, comme dans le cas des fonctions à une variable, tous les points stationnaires ne donnent pas lieu à des maxima ou des minima. En un point stationnaire, une fonction peut avoir un maximum local ou un minimum local ou aucun des deux.
Illustrons ce dernier point en cherchant les valeurs extrêmes de $f(x, y) = y^2 - x^2$ dont le graphe figure à la page suivante :



Puisque $f'_x(x, y) = -2x$ et $f'_y(x, y) = 2y$, le seul point critique est $(0, 0)$. Or, en des points de l'axe $0x$, $y = 0$ et $f(x, 0) = -x^2 < 0$ (si $x \neq 0$) tandis qu'en des points de l'axe $0y$, $x = 0$ et $f(0, y) = y^2 > 0$ (si $y \neq 0$). N'importe quel disque centré à l'origine contient des points en lesquels f prend aussi bien des valeurs strictement positives que strictement négatives. Par conséquent, $f(0, 0) = 0$ ne peut être une valeur extrême de f et f n'a pas de valeur extrême.
Cet exemple illustre le fait qu'une fonction n'a pas nécessairement un maximum ou un minimum local en un point critique. La figure précédente permet de visualiser comment cela est possible. Le graphique de f est le paraboloïde hyperbolique qui à l'origine admet un plan tangent horizontal ($z = 0$). On observe que $f(0, 0) = 0$ est un maximum dans la direction de l'axe $0x$ mais un minimum dans la direction de l'axe $0y$. Au voisinage de l'origine, la surface représentative de f a la forme d'une selle et c'est la raison pour laquelle $(0, 0)$ est appelé un **point selle** (ou **point col**) de f.

Exemple 8.4.1

– Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$. Les dérivées partielles du premier ordre sont égales à $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$. Au point $(0, 0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. L'origine est un point critique.



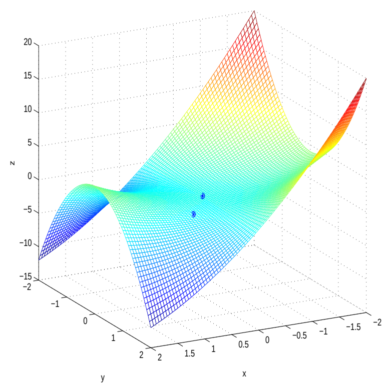
– Soit $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^3$. Les dérivées partielles du premier ordre sont égales à $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4xy + 3y^2$. On recherche les points critiques en résolvant le système

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - 2y^2 = 0 \\ -4xy + 3y^2 = 0 \end{array} \right. .$$

Par conséquent,

$$(1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y^2 \\ -4y^2y + 3y^2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y^2 \\ y^2(3-4y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y^2 \\ y = 0 \text{ ou } y = \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

d'où deux points critiques $(0,0)$ et $\left(\frac{9}{16}, \frac{3}{4}\right)$.
Illustration grâce au graphique ci-dessous :



Exemple 8.4.2

– Soit $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x - 3y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x + 2y \end{array} \right.$$

Les conditions du premier ordre sont $\left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{array} \right.$, système homogène de déterminant égal à $-1 \neq 0$ donc admettant une unique solution $(0,0)$.

Rappel : le déterminant d'un système de deux équations à deux inconnues du type

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{array} \right.$$

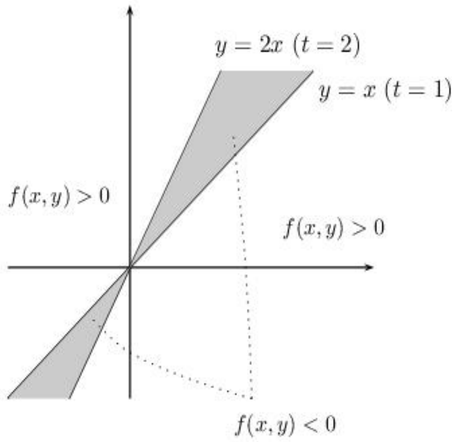
est égal à $ad - bc$. Si $ad - bc \neq 0$, le système admet une unique solution.

Si extrémum il y a, cet extrémum ne peut-être qu'au point $(0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
Étudions le signe de $f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2$, ce qui permettra de situer $f(x,y)$

par rapport à $f(0,0)$. Si $x=0$, $f(x,y)=f(0,y)=y^2\neq 0$. Pour $x\neq 0$, $f(x,y)=x^2\left[\left(\frac{y}{x}\right)-3\frac{y}{x}+2\right]$.
On pose ensuite $\frac{y}{x}=t$ et $f(x,y)=x^2[t^2-3t+2]=x^2(t-1)(t-2)$. L'intérêt de cette écriture est que le signe de $f(x,y)$ dépend des valeurs prises par t et plus précisément de la position de t par rapport à 1 et 2. On a le tableau de signes suivant :

t	$-\infty$		1		2		$+\infty$
t^2-3t+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut visualiser les différents cas à l'aide du graphique :



Au voisinage de $(0,0)$, $f(x,y)$ ne garde pas un signe constant, f n'a donc pas d'extrémum en $(0,0)$. Ce point $(0,0)$ est un point selle.

– Soit $f(x,y)=2x^2+3xy+5y^2+1$, on a

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x+3y\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x+10y\end{cases}$$

Les conditions du premier ordre sont $\begin{cases}4x+3y=0\\3x+10y=0\end{cases}$, système homogène de déterminant égal à $21\neq 0$ donc admettant une unique solution $(0,0)$.
Si extrémum il y a, cet extrémum ne peut-être qu'au point $(0,0)$ et $f(0,0)=1$.
Étudions le signe de $f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)-1=2x^2+3xy+5y^2$. Si $x=0$, $f(x,y)-1=f(0,y)-1=5y^2\geq 0\Rightarrow f(0,y)\geq 1$. Pour $x\neq 0$, $f(x,y)-1=x^2\left[5\left(\frac{y}{x}\right)^2+3\left(\frac{y}{x}\right)+2\right]$. On pose ensuite $\frac{y}{x}=t$ et $f(x,y)-1=x^2(5t^2+3t+2)$. Or, $\forall t\in\mathbb{R}$, $5t^2+3t+2>0$ $(\Delta=-31<0)$. Conclusion, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)-1\geq 0\Leftrightarrow f(x,y)\geq 1$. f admet un minimum au point $(0,0)$ qui vaut 1.

– Soit $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+d$, une fonction de degré 2 à deux variables quelconque. On a

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2ax+2by\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2bx+2cy\end{cases}$$

Les conditions du premier ordre sont $\begin{cases}ax+by=0\\bx+cy=0\end{cases}$, système homogène de déterminant égal à $D=ac-b^2$. Si $D\neq 0$, ce système admet une unique solution, en l'occurence le couple $(0,0)$.
Étudions le signe de $f(x,y)-f(0,0)=ax^2+2bxy+cy^2$. Pour $x=0$, $f(x,y)-f(0,0)=cy^2$, qui dépend du signe de c. Pour $x\neq 0$, $f(x,y)-f(0,0)=x^2\left[c\left(\frac{y}{x}\right)^2+2b\frac{y}{x}+a\right]$. On pose ensuite $t=\frac{y}{x}$ et $f(x,y)-f(0,0)=x^2[ct^2+2bt+a]$. Par conséquent, $f(x,y)-f(0,0)$ admet le signe de $P(t)=ct^2+2bt+a$, trinôme du second degré de discriminant $\Delta=4b^2-4ac$.

- si $\Delta \leq 0$, $f(x,y) - f(0,0)$ a le signe de c pour tout couple (x,y) donc f admet un extrémum au point $(0,0)$,
- si $\Delta > 0$, $f(x,y) - f(0,0)$ est du signe de c à l'intérieur des racines de P et du signe de $-c$ à l'extérieur donc f n'admet pas d'extrémum en $(0,0)$.

Proposition 8.4.1

(a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Les conditions du premier ordre sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

Soit (x_0, y_0) un couple solution. Le point $M_0(x_0, y_0)$ est appelé point critique. Si extrémum il y a, il est situé en M_0.

(b) Dans ce cas, l'équation du plan tangent à la surface au point (x_0, y_0, z_0) est $z = z_0$. Ce plan est parallèle à $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

- il y a minimum si au voisinage du point (x_0, y_0, z_0), la surface est située au dessus de ce plan tangent,

- il y a maximum si au voisinage du point (x_0, y_0, z_0), la surface est située en dessous de ce plan tangent,

- il n'y a pas d'extrémum lorsque la surface traverse le plan tangent. Le point est alors appelé point col ou point selle.

Exercice 196 Déterminer la nature des points critiques de $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

8.4.4 Les conditions du second ordre - Méthodologie

Il est nécessaire de pouvoir déterminer si une fonction a ou non une valeur extrême en un point critique. Le test que voici répond à cette demande, il utilise les conditions du second ordre.

- Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point critique alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.
- On détermine ensuite les trois quantités

$$\boxed{r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0),\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \text{ et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)}$$

puis on calcule $\Delta' = s^2 - rt$.

. Si $\Delta' > 0$, il n'y a pas d'extrémum, M_0 est un point col ou un point selle,

. Si $\Delta' < 0$ et $r < 0$, f admet un maximum local en M_0,

. Si $\Delta' < 0$ et $r > 0$, f admet un minimum local en M_0,

. Si $\Delta' = 0$, on ne peut pas conclure sur la nature de M_0.

Exemple 8.4.3 Recherchons les valeurs maximales et minimales et les points selles de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.
On localise tout d'abord les points stationnaires : on a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x$. L'égalisation à 0 de ces dérivées partielles conduit au système d'équations

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases}$$

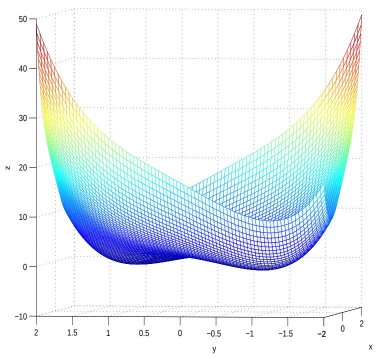
On résout ce système en substituant $y = x^3$ de la première équation dans la deuxième. Cela donne

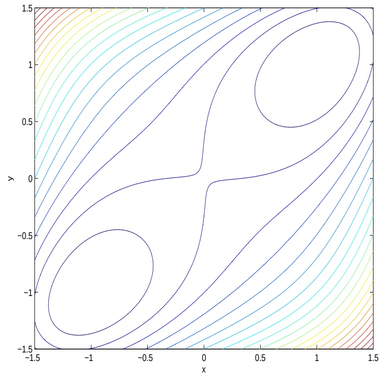
$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1).$$

Il y a donc 3 racines $x = 0, 1, -1$. Les trois points stationnaires sont $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$.
On calcule ensuite les dérivées secondes partielles et Δ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2,$$

et $\Delta(x,y) = 144x^2y^2 - 16$. Puisque $\Delta(0,0) = -16 < 0$, on peut affirmer que le point $(0,0)$ est un point selle. Puisque $\Delta(1,1) = 128 > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12 > 0$, $f(1,1) = -1$ est un minimum local. De même, $\Delta(-1,-1) = 128 > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12 > 0$ entraînent que $f(-1,-1) = -1$ est aussi un minimum local. On a les graphiques suivants :





Le diagramme des courbes de niveau de la fonction f met en évidence des courbes de niveau de forme ovale à proximité de $(1,1)$ et $(-1,-1)$. Cela indique que, quelle que soit la direction dans laquelle on s'éloigne de $(1,1)$ ou de $(-1,-1)$, les valeurs de f augmentent. Les courbes de niveau près de $(0,0)$ ont plutôt l'air d'hyperboles. Elles révèlent que quand on quitte l'origine (où f vaut 1), les valeurs de f décroissent dans certaines directions et croissent dans d'autres. Le diagramme des courbes de niveau laisse donc deviner la présence des minima et du point selle identifiés précédemment.

Exemple 8.4.4 Déterminer les points critiques des fonctions suivantes et préciser leur nature lorsque cela est possible.

(a) Soit $f(x,y) = xy^2 + 2x^2 + y^2$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 4x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + 2y$$

Les conditions du premier ordre fournissent le système suivant :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + y^2 = 0 \\ y(x+1) = 0 \end{array} \right.$$

Ensuite,

$$(1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y^2 = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x,y) = (0,0) \text{ ou} \\ (x,y) = (-1,2) \text{ ou} \\ (x,y) = (-1,-2) \end{array} \right.$$

d'où l'existence de trois points critiques et trois extréma eventuels. On détermine alors les dérivées d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x + 2$$

- Pour le point $(0,0)$, $r=4$, $s=0$, $t=2$ donc $\Delta'=s^2-rt=-8<0$. Par conséquent, f a un extrémum au point $(0,0)$. De plus, $r=4>0$ donc l'extrémum est un minimum. En effet, comme $r>0$, $f(M)-f(0,0)\geq 0$ et $f(M)\geq f(0,0)=0$.
- Pour le point $(-1,2)$, $r=4$, $s=4$, $t=0$ donc $\Delta'=s^2-rt=16>0$. Par conséquent, le point $(-1,2)$ est un point col.
- Pour le point $(-1,-2)$, $r=4$, $s=-4$, $t=0$ donc $\Delta'=s^2-rt=16>0$. Par conséquent, le point $(-1,-2)$ est un point col.

(b) Soit $f(x,y)=x^2-2xy^2+y^3$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-2y^2 \quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-4xy+3y^2.$$

Les conditions du premier ordre fournissent le système suivant :

$$(1)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x-y^2=0\\ y(-4x+3y)=0\end{array}\right.$$

Ensuite,

$$(1)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=y^2\\ y(-4y^2+3y)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=y^2\\ y^2(-4y+3)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=y^2\\ y=0 \text{ ou } y=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(x,y)=(0,0)\text{ ou}\\ (x,y)=\left(\dfrac{9}{16},\dfrac{3}{4}\right)\end{array}\right.$$

d'où l'existence de deux points critiques. On détermine ensuite les dérivées d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-4y \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-4x+6y.$$

- Pour le point $\left(\frac{9}{16},\frac{3}{4}\right)$, $r=2$, $s=-3$, $t=-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}=\frac{9}{4}$ donc $\Delta'=s^2-rt=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}>0$. Par conséquent, $\left(\frac{9}{16},\frac{3}{4}\right)$ est un point col.
- Pour le point $(0,0)$, $r=2$, $s=0$, $t=0$ donc $\Delta'=s^2-rt=0$ et on ne peut pas conclure. Par contre, $f(0,y)=y^3$ ce qui implique que $f(0,y)$ change de signe : pour $y>0$, $f(0,y)>0$ et pour $y<0$, $f(0,y)<0$. Comme $f(0,0)=0$, $f(x,y)-f(0,0)$ n'a pas de signe constant au voisinage du point $(0,0)$ et ce point est un point col.

Exemple 8.4.5 On souhaite fabriquer une boîte rectangulaire sans couvercle avec 12m^2 de carton. Quel est le volume maximal de cette boîte ?
On désigne par x, y et z respectivement la longueur, la largeur et la hauteur de la boîte en mètres. Le volume est alors donné par $V=xyz$. Il peut être exprimé en fonction de deux variables x et y seulement en exploitant le fait que l'aire des quatre faces et du fond totalise 12m^2 : $2xz+2yz+xy=12$. Pour cela, on résout cette équation par rapport à z : $z=\dfrac{12-xy}{2(x+y)}$ et on introduit l'expression de z dans celle de V :

$$V=xy\frac{12-xy}{2(x+y)}=\frac{12xy-x^2y^2}{2(x+y)}.$$

On calcule maintenant les dérivées partielles de V :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y)=\frac{y^2(12-2xy-x^2)}{2(x+y)^2},\ \frac{\partial V}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2(12-2xy-y^2)}{2(x+y)^2}.$$

Quand V est maximum, $\dfrac{\partial V}{\partial x}=\dfrac{\partial V}{\partial y}=0$. Mais $x=0$ ou $y=0$ conduisent à $V=0$. Donc les équations à résoudre sont

$$12 - 2xy - x^2 = 0 \text{ et } 12 - 2xy - y^2 = 0$$

Elles impliquent $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ car x et y ne peuvent être que positives. On pose $x = y$ dans l'une ou l'autre des équations et on obtient $12 - 3x^2 = 0$ ce qui donne $x = 2$, $y = 2$ et $z = \dfrac{12 - 2.2}{2.(2+2)} = 1$. On pourrait ensuite faire appel au test de la dérivée seconde pour certifier qu'il s'agit bien d'un maximum local de V mais, plus simplement, il suffit de remarquer qu'intuitivement, vu le contexte physique du problème, il ne peut y avoir qu'un maximum absolu, qui se produit en un point stationnaire de V. Il a donc lieu quand $x = 2$, $y = 2$ et $z = 1$. Dans ce cas, $V = 4$, le volume maximum est de 4m^3.

Exercice 197 Déterminer et classer les points stationnaires de la fonction $f(x,y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$. Déterminer le point le plus haut du graphique de f.

Exercice 198 Quelle est la plus courte distance du point $(1, 0, -2)$ au plan $x + 2y + z = 4$?

8.4.5 Un exemple économique

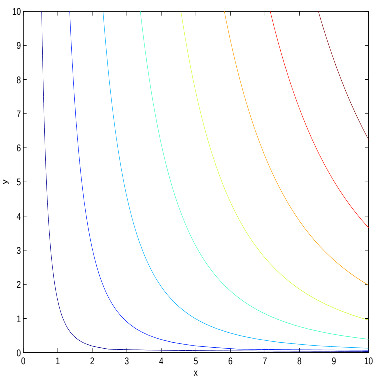
1. Généralités

Une entreprise fabrique un produit à partir de différentes combinaisons de deux matières premières X et Y, appelées **facteurs de production**. Un facteur de production peut être de la matière première, du travail, du capital, etc, en somme tout élément utile à la production. Toute combinaison d'une quantité x de X et y de Y permettra d'obtenir une quantité $Q(x,y)$ du produit, la fonction Q est appelée **fonction de production**.

Définition 8.4.3 *On appelle* ***isoquante*** *une ligne de niveau de la fonction Q définie par*

$$\boxed{\Gamma_{q_0} = \{(x,y)/Q(x,y) = q_0\}}$$

On trace ci-dessous quelques isoquantes :



On suppose que l'entreprise est assurée de vendre toute sa production Q à un produit unitaire p, sa recette sera $p \times Q$. Soient p_X et p_Y les prix unitaires des facteurs de production X et Y, C_0 les coûts fixes, le coût de production est alors

$$\boxed{xp_X + yp_Y + C_0}$$

pour x unités de X et y unités de Y utilisées. Le bénéfice de l'entreprise est

$$\boxed{B(x,y) = pQ(x,y) - (C_0 + xp_X + yp_Y)}$$

Maximisation du bénéfice : On détermine les dérivées partielles de B :

$$\frac{\partial B}{\partial x}(x,y) = p\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - p_X$$
$$\frac{\partial B}{\partial y}(x,y) = p\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) - p_Y$$

On impose alors les conditions

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial B}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{p_X}{p} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y}=\dfrac{p_Y}{p} \end{cases}$$

La fonction de production étant connue, on obtient un système qui permet de déterminer les points critiques de B.
Interprétation économique :

- $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ sont les **productivités marginales** en volume, relatives aux facteurs X et Y et représentent respectivement les productions supplémentaires obtenues par l'utilisation d'une unité supplémentaire du facteur X ou Y.
- $p\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $p\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ sont les **valeurs marginales**.

Conditions du second ordre : On a

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}=p\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\ ,\ \frac{\partial^2 B}{\partial x\partial y}=p\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\ \text{ et }\ \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}=p\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}$$

On obtient $\Delta' = s^2 - rt = p^2\left[\left(\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right]$. Le bénéfice est maximum pour $\Delta' < 0$ et $r < 0$ donc pour

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2} < 0 \text{ et} \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} < 0 \end{cases}$$

Remarque 8.4.3 $r = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{\partial x} < 0$. Par conséquent, la productivité marginale $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ est une fonction décroissante de la variable x.

2. La fonction de Cobb-Douglas

En 1928, Charles COBB et Paul DOUGLAS ont publié une étude dans laquelle apparaissait une modélisation de la croissance de l'économie américaine entre 1899 et 1922. Ils y avaient adopté une vue simplifiée de l'économie selon laquelle la quantité produite n'est fonction que de la quantité de travail réalisé et du montant des capitaux investis. Même si beaucoup d'autres facteurs affectent les performances économiques, leur modèle s'est avéré remarquablement précis. La fonction qu'ils ont employée pour modéliser la production était de la forme :

$$P(L,K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha},$$

où P est la production totale (la valeur monétaire de tous les biens produits en un an), L la quantité de travail (le nombre total d'heures de travail prestées en un an) et K la quantité de capital investi (la valeur monétaire de toutes les machines, équipement et bâtiments). Les données économiques sont celles de la table ci-dessous publiée par le gouvernement.

Année	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

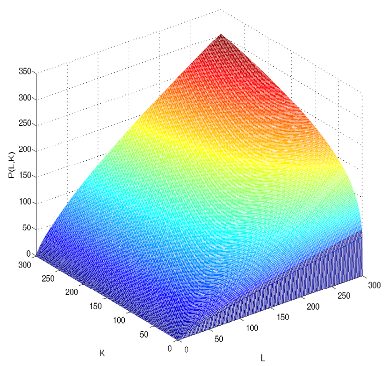
Ils prirent délibérément l'année 1899 comme base, c'est-à-dire qu'ils attribuèrent le niveau 100 à chacun des facteurs et exprimèrent les valeurs des autres années en pourcentage de cette année là. Cobb et Douglas utlisèrent le critère des moindres carrés pour ajuster leur modèle aux données de la table précédente et aboutirent à la fonction

$$P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$$

Vérifions la précision de ce modèle en calculant par exemple la production des années 1910 et 1920 :

$$P(147; 208) = 1,01(147)^{0,75}(208)^{0,25} \simeq 161,9 \ ; \ \ P(194; 407) = 1,01(194)^{0,75}(407)^{0,25} \simeq 235,8$$

Ces valeurs sont assez proches des valeurs réelles 159 et 231.
La fonction de production P a été ultérieurement utilisée dans d'autres cadres, depuis la petite unité commerciale jusqu'aux phénomènes économiques globaux. Elle est connue comme la **fonction de production de Cobb-Douglas**.
On donne ci-dessous le graphique de la fonction de production de Cobb-Douglas $P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$:



On considère des fonctions Q et B s'exprimant respectivement sous la forme

$$\boxed{Q(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta} \text{ avec } A > 0,\ \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0},$$

$$\boxed{B(x, y) = pAx^{\alpha}y^{\beta} - (c_0 + xp_X + yp_Y)}.$$

Les conditions du premier ordre donnent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial B}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha p A x^{\alpha-1} y^{\beta} = p_X \ (1) \\ \beta p A x^{\alpha} y^{\beta-1} = p_Y \ (2) \end{cases}$$

La résolution du système est réalisée en divisant (1) par (2) :

$$\frac{p_X}{p_Y} = \frac{\alpha y}{\beta x} \Leftrightarrow y = \frac{\beta}{\alpha}\frac{p_X}{p_Y} x$$

On remplace ensuite y dans l'équation (1) et on obtient :

$$p_X = \alpha p A x^{\alpha-1}\left(\frac{\beta p_x}{\alpha p_Y} x\right)^{\beta} \Leftrightarrow p_X = \frac{1}{\alpha^{\beta-1}} p A \beta^{\beta} \frac{(p_X)^{\beta}}{(p_Y)^{\beta}} x^{\alpha+\beta-1}$$
$$\Leftrightarrow x^{\alpha+\beta-1} = K \text{ une constante.}$$

Donc, pour $\alpha+\beta-1 \neq 0$, on obtient une valeur x_0 puis une valeur y_0 donc un couple (x_0, y_0) unique.

Les conditions du second ordre donnent :

- $\dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \alpha(\alpha-1) p A x^{\alpha-2} y^{\beta}$
- $\dfrac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} = \alpha\beta p A x^{\alpha-1} y^{\beta-1}$
- $\dfrac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \beta(\beta-1) p A x^{\alpha} y^{\beta-2}$

On a alors $\Delta' = p^2 A^2 x^{2\alpha-2} y^{2\beta-2} \alpha\beta(\alpha+\beta-1)$ et $\Delta' < 0 \Leftrightarrow \alpha+\beta < 1$.
Conclusion : Pour $\alpha+\beta<1$, il existe un seul point critique qui est un maximum.

Application numérique : Soit la fonction de production Q définie par

$$Q(x,y) = \sqrt{2} x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}}$$

On considère $p_X = 4000$, $p_Y = 1000$, $p = 80000$ et enfin $c_0 = 100000$.
Que vaut le bénéfice maximum et pour quelles valeurs de x et y est-il atteint ?

La fonction profit est définie par

$$B(x,y) = 80000\sqrt{2} x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} - [100000 + 4000x + 1000y]$$

Les conditions du premier ordre donnent : $\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial B}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1000[20\sqrt{2} x^{-\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{4}} - 4] = 0 \ (1) \\ 1000[20\sqrt{2} x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{3}{4}} - 1] = 0 \ (2) \end{cases}$

En combinant (1) et (2), on obtient :

$$\frac{20\sqrt{2} x^{-\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{4}}}{20\sqrt{2} x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{3}{4}}} = 4 \Leftrightarrow y = 4x.$$

On remplace ensuite cette relation dans (1) et on obtient $x = 100$ puis $y = 400$. Il existe donc un seul point critique $(100, 400)$. De plus, $\alpha+\beta = \dfrac{1}{2} < 1$. Le point critique est donc un maximum. Finalement, le bénéfice est maximum pour $x = 100$ et $y = 400$ et vaut 700000.

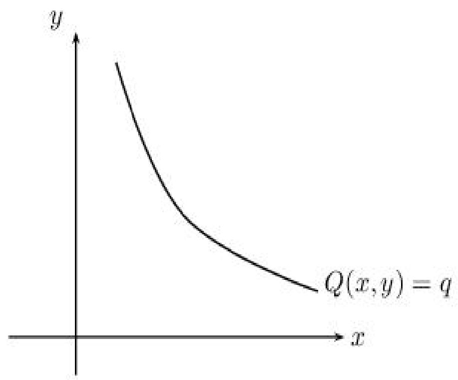
8.5 Les extréma liés

L'exemple 8.4.5 de la section 4.4 posait le problème de maximiser une fonction volume $V = xyz$ soumise à la contrainte $2xz+2yz+xy = 12$, qui traduisait une condition annexe sur la surface, à savoir mesurer 12m^2. Dans cette section, on présente la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour maximiser ou minimiser une fonction générale $f(x,y,z)$ sujette à une contrainte (ou condition annexe) de la forme $g(x,y,z) = k$.

8.5.1 Exemple de la maximisation du bénéfice à production fixée

Soit une entreprise assujettie à produire une quantité $Q(x,y)=q$ fixée. On se pose le problème de la détermination du bénéfice maximum (ou du coût minimum).

1. On considère l'égalité $Q(x,y)=q$ où q est une quantité fixée. On peut représenter graphiquement cette ligne de niveau :



On recherche par conséquent un couple (x,y) où le profit est maximum, ce couple (x,y) appartenant à la ligne de niveau. Le coût variable est

$$\boxed{xp_X+yp_Y+c_0},$$

le bénéfice est

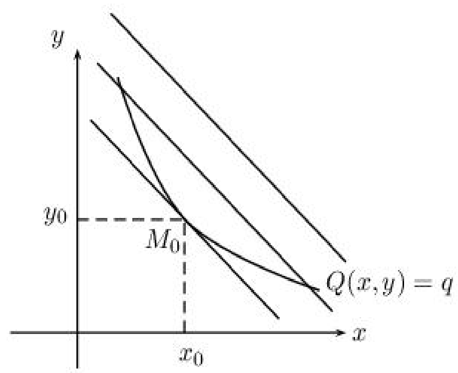
$$\boxed{B(x,y)=pq-(c_0+xp_X+p_Y)}.$$

Remarque 8.5.1 $Q(x,y)=q$ est appelée **contrainte**. On cherche donc à maximiser le profit, les deux variables étant liées par une relation $Q(x,y)=q$. C'est un problème d'**extrémum lié** par une certaine contrainte $Q(x,y)=q$.

2. Comment procède t-on ? On trace les droites de coût constant

$$xp_X+yp_Y+c_0=h.$$

Toutes ces droites sont parallèles entre-elles. Le coût est minimum lorsque l'ordonnée à l'origine est minimale. On obtient une droite de coût minimum lorsque la droite est tangente à l'isoquante.



La droite de coût a pour coefficient directeur $-\dfrac{p_X}{p_Y}$. La tangente à l'isoquante (en M_0) a pour équation

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0,$$

son coefficient directeur est $-\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)}{\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)}$.

Ces deux droites ont le même coefficient directeur d'où $-\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)}{\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)} = -\dfrac{p_X}{p_Y}$, ce qui signifie que les prix des facteurs de production sont proportionnels aux productivités marginales. On obtient un système de 3 équations à 3 inconnues x_0, y_0 et λ (le facteur de proportionnalité) :

$$\begin{cases} p_X = \lambda \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) \\ p_Y = \lambda \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \\ Q(x_0,y_0) = q \end{cases}$$

le réel λ est appelé **multiplicateur de Lagrange**.

3. Illustration dans le cas de la fonction de Cobb-Douglas.
   Soit $Q(x,y) = Ax^\alpha y^\beta$. Le système précédent s'écrit alors :

$$\begin{cases} p_X = \lambda A \alpha x^{\alpha-1} y^\beta \\ p_Y = \lambda A \beta x^\alpha y^{\beta-1} \\ Ax^\alpha y^\beta = q \end{cases}$$

En divisant la première ligne de ce système par la seconde, on obtient :

$$\frac{p_X}{p_Y} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{y}{x} \Leftrightarrow y = \frac{\beta}{\alpha}\frac{p_X}{p_Y}x.$$

On reporte ce résultat dans la troisième équation, on obtient $x^{\alpha+\beta} = k$ une constante. Pour $\alpha+\beta \neq 1$, on obtient x, y et λ.

Remarque 8.5.2 Ces trois équations sont les conditions nécessaires d'extrémum lié. Elles ne sont pas suffisantes.

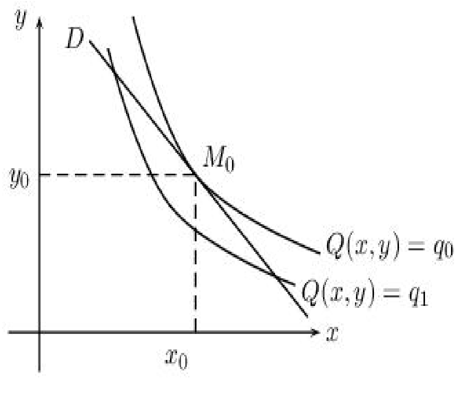
8.5.2 Exemple de la maximisation du bénéfice à coût fixé

1. Le coût est fixé soit

$$xp_X + yp_Y + c_0 = k \text{ où } k \text{ est un réel fixé.}$$

Maximiser le bénéfice est équivalent à minimiser le coût de production.

2. On trace la droite D de coût constant et les différentes isoquantes $q = Q(x,y)$, q variant.



La production est maximale lorsque la droite de coût est tangente à l'isoquante. Le point (x_0,y_0) est le point d'intersection de cette droite de coût et de l'isoquante.

3. Les équations :
   – l'équation de la droite de coût est $xp_X + yp_Y + c_0 = k$,
   – l'équation de la tangente à l'isoquante au point (x_0,y_0) est

$$(x-x_0)\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

Ces deux droites ont le même coefficient directeur d'où

$$-\frac{p_X}{p_Y} = -\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Cela implique le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = \lambda p_X \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda p_Y \\ x_0 p_X + y_0 p_Y + c_0 = k \end{cases}$$

Le réel λ est un multiplicateur de Lagrange.

4. Illustration dans le cas de la fonction de Cobb-Douglas
   On a $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = A\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = A\beta x^{\alpha} y^{\beta-1}$, ce qui implique le système

$$\begin{cases} A\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} = \lambda p_X & (1) \\ A\beta x^{\alpha} y^{\beta-1} = \lambda p_Y & (2) \\ x p_X + y p_Y + c_0 = k & (3) \end{cases}$$

   En divisant (1) par (2), on obtient

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_X}{p_Y} \Leftrightarrow y = \frac{\beta p_X}{\alpha p_Y} x$$

   On remplace ensuite y dans la troisième équation et on obtient :

$$x(p_X + p_X \frac{\beta}{\alpha}) = k - c_0$$

   d'où les valeurs de x, y puis λ.

8.5.3 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Pour déterminer les valeurs maximales et minimales de $f(x, y, z)$ soumises à la contrainte $g(x, y, z) = k$ (à supposer qu'elles existent) :

1. On cherche toutes les valeurs de x, y, z et λ telles que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ g(x, y, z) = k \end{cases}$$

2. On calcule la valeur de f en tous les points (x, y, z) repérés à l'étape précédente. La plus grande de ces valeurs est le maximum de f, la plus petite est le minimum de f.

Exemple 8.5.1 Reprenons l'exemple 8.4.5. x, y et z sont respectivement la longueur, la largeur et la hauteur de la boîte, exprimées en mètres. Il s'agit alors de maximiser $V = xyz$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$.
Selon la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on recherche les valeurs de x, y, z et λ telles que

$$\begin{cases} yz = \lambda(2z + y) & (1) \\ xz = \lambda(2z + x) & (2) \\ xy = \lambda(2x + 2y) & (3) \\ 2xz + 2yz + xy = 12 & (4) \end{cases}$$

On remarque qu'en multipliant (1) par x, (2) par y et (3) par z, les membres de gauche de ces équations deviennent identiques. On a ainsi

$$\begin{cases} xyz = \lambda(2xz + xy) & (5) \\ xyz = \lambda(2yz + xy) & (6) \\ xyz = \lambda(2xz + 2yz) & (7) \end{cases}$$

On observe que $\lambda \neq 0$ car dans le cas contraire, cela impliquerait $yz = xz = xy = 0$ en raison de (1), (2) et (3) et cela contredirait (4). Par conséquent (5) et (6) entraînent

$$2xz + xy = 2yz + xy \Leftrightarrow xz = yz.$$

Comme $z \neq 0$ (car sinon $V = 0$), cela implique $x = y$. Ensuite, (6) et (7) entraînent

$$2yz + xy = 2xz + 2yz \Leftrightarrow xy = 2xz.$$

Comme $x \neq 0$, ceci implique $y = 2z$. En substituant $x = y = 2z$ dans (4), on obtient

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12 \Leftrightarrow z^2 = 1.$$

Comme x, y et z sont positifs, cela donne finalement $z = 1$, $x = 2$ et $y = 2$.

Exemple 8.5.2 On reprend l'exemple sur la maximisation du bénéfice en début de section.

1. Déterminer le budget mininimal nécessaire pour assurer une production de 30 unités.

   On résout le système

$$\begin{cases} \lambda \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = p_X \\ \lambda \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) = p_Y \\ Q(x_0, y_0) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\sqrt{2} x_0^{-\frac{3}{4}} y_0^{\frac{1}{4}} = 16000 \\ \lambda\sqrt{2} x_0^{\frac{1}{4}} y_0^{-\frac{3}{4}} = 4000 \\ \sqrt{2} x_0^{\frac{1}{4}} y_0^{\frac{1}{4}} = 30 \end{cases}$$

   En effectuant le rapport des deux premières équations, on obtient $\dfrac{y_0}{x_0} = 4$ soit $y_0 = 4x_0$. En remplaçant y_0 dans la troisième équation on obtient $x_0 = 225$, $y_0 = 900$ et $\lambda = 120000$ d'où possibilité d'extrémum lié par la contrainte $\sqrt{2}x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} = 30$, au point $(225, 900)$, le bénéfice étant de 500000 euros.

2. Déterminer la production maximale si on dispose d'un budget de fabrication de 1700000 euros.

   On résout le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \lambda p_X \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \lambda p_Y \\ x p_X + y p_Y + c_0 = 1700000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} x^{-\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{4}} = 16000\lambda \ (1) \\ \sqrt{2} x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{3}{4}} = 4000\lambda \ (2) \\ 4000x + 1000y = 1600000 \ (3) \end{cases}$$

   En divisant (1) par (2) on obtient $y = 4x$. On remplace y dans la troisième équation et on obtient $x = 200$ puis $y = 800$, le bénéfice est alors de 562742 euros.

Exemple 8.5.3 Déterminer les valeurs extrêmes de la fonction $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$. Il est demandé de chercher les valeurs extrêmes de f sous la contrainte $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Conformément à la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on résout les équations

$$\begin{cases} 2x = 2x\lambda & (1) \\ 4y = 2y\lambda & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

De (1) découle $x = 0$ ou $\lambda = 1$. Quand $x = 0$, alors (3) conduit à ± 1. Quand $\lambda = 1$, $y = 0$ par (2) et donc, $x = \pm 1$ grâce à (3). En résumé, f pourrait avoir des valeurs extrêmes aux points $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. Les valeurs prises par f en chacun des points sont

$$f(0,1) = 2 \;\;,\;\; f(0,-1) = 2 \;\;,\;\; f(1,0) = 1 \;\;,\;\; f(-1,0) = 1.$$

Par conséquent, le maximum de f sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$ est $f(0, \pm 1) = 2$ et le minimum $f(\pm 1, 0) = 1$.

Exercice 199 Quelles sont les valeurs extrêmes de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sur le disque $x^2 + y^2 \leq 1$?

Exercice 200 Quels sont les points de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ les plus proches et les plus éloignés du point $(3, 1, -1)$?

Exercice 201 La production totale P d'un certain produit est fonction de la main d'œuvre totale L et du capital investi K. On a vu dans les sections précédentes comment le modèle de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ découle de certaines hypothèses économiques, où b et α sont des constantes positives et $\alpha < 1$. Si m désigne le coût unitaire du travail et n celui du capital, et si la société a un budget limité à p euros, le problème se pose de produire le plus possible sous cette contrainte de budget $mL + nK = p$. Montrer que la production est maximale quand

$$L = \frac{\alpha p}{m} \text{ et } K = \frac{(1-\alpha)p}{n}.$$

Exercice 202 Dans le même cadre que celui de l'exercice 8.5.3, on suppose maintenant que la production est fixée à $bL^{\alpha}K^{1-\alpha} = Q$ où Q est une constante. Quelles sont les valeurs de L et de K qui vont diminuer le plus la fonction coût $C(L, K) = mL + nK$?

8.5.4 Problème d'optimisation à deux contraintes

On veut maintenant déterminer les valeurs maximales et minimales de $f(x, y, z)$ lorsque (x, y, z) est soumis à deux contraintes $g(x, y, z) = k$ et $h(x, y, z) = c$. Géométriquement, cela revient à chercher les valeurs extrêmes de f lorsque (x, y, z) se trouve sur la courbe intersection des surfaces de niveau $g(x, y, z) = k$ et $h(x, y, z) = c$. La méthode des multiplicateurs de Lagrange consiste dans ce cas à chercher les valeurs extrêmes de f en résolvant un système de 5 équations à 5 inconnues x, y, z, λ et μ soit :

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial h}{\partial x} \\
\dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial h}{\partial y} \\
\dfrac{\partial f}{\partial z} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z} + \mu \dfrac{\partial h}{\partial z} \\
g(x, y, z) = k \\
h(x, y, z) = c
\end{array}\right.$$

Exemple 8.5.4 Déterminer le valeur maximale de $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sur la courbe d'intersection du plan $x - y + z = 1$ et du cylindre $x^2 + y^2 = 1$.
Il s'agit de chercher le maximum de la fonction $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sous les contraintes $g(x, y, z) = x - y + z = 1$ et $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. On a donc à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{ll}
1 = \lambda + 2x\mu & (1) \\
2 = -\lambda + 2y\mu & (2) \\
3 = \lambda & (3) \\
x - y + z = 1 & (4) \\
x^2 + y^2 = 1 & (5)
\end{array}\right.$$

En injectant $\lambda = 3$ dans (1), on a $2x\mu = -2$, ou $x = \dfrac{-1}{\mu}$. De même, (2) donne $y = \dfrac{5}{2\mu}$. La substitution de ces expressions de x et y dans (5) conduit à

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1,$$

de sorte que $\mu^2 = \frac{29}{4}$ soit $\mu = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$. Ensuite, $x = \mp\frac{2}{\sqrt{29}}$, $y = \pm\frac{5}{\sqrt{29}}$ et, de (4), $z = 1 - x + y = 1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}$. Les valeurs correspondantes de f sont

$$\mp\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm\frac{5}{29}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}.$$

Le maximum de f sur la courbe donnée est finalement $3 + \sqrt{29}$.

8.6 Exercices

Exercice 203 Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{2x+y}{x^2+y^2-1} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x+y-1} \end{array}$$

Exercice 204 Représenter le graphe de la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 1-x-y \end{array}$$

Exercice 205 Déterminer les lignes de niveau Γ_c des fonctions :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & ax+by+d \end{array}$
3. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$

Exercice 206 Déterminer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions :

1. $f(x,y) = 2x^2y + 3xy^3 + y + 5$
2. $f(x,y) = 2x^2 + 3y + x^2y$

Dans les deux cas, vérifier que le lemme de Schwarz s'applique.

Exercice 207 Calculer les dérivée partielles à l'ordre 1 et 2 des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = 4x^2y + 2x^3 - 3xy + 2x + 1$,
2. $g(x,y,z) = \ln(x+y) - 2x$,
3. $h(u,v,w) = \sqrt{u+v} - 3w^\alpha$.

Exercice 208

1. Déterminer l'équation du plan tangent au point $M(1,2,5)$ à la surface de la fonction f définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$.
2. Peut-on déterminer l'équation du plan tangent en tout point de la surface de la fonction g définie par $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$?

Exercice 209 On se donne la fonction à deux variables suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy^2 + 2x^2 + y^2 \end{array}$$

1. Déterminer les dérivees partielles du premier ordre de f.
2. Résoudre le système $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$ et déterminer ainsi le(s) point(s) critique(s) de f.
3. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
4. Vérifier le théorème de Schwarz.
5. Préciser la nature du ou des points critiques.

Exercice 210 Étudier les points critiques des fonctions définies par :

1. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^3$,
2. $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^4$,
3. $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + 2x - 2y - 4z + 5$.

Exercice 211 Étudier les extréma des fonctions définies par

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ avec la contrainte $x + 2y = 2$,
2. $g(x,y) = x^2 - y^2$ avec la contrainte $x + 2y = 2$.
3. $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ avec la contrainte $x + y + z = 1$.

Exercice 212 On considère la fonction f définie par $f(x,y) = x^2y^2(1 + x + y)$.

1. Étudier, suivant la position du point $M = (x,y)$ dans le plan, le signe de f.
2. Rechercher les extréma locaux de f.
3. On suppose dans cette question que x et y sont assujettis à vérifier la relation $xy = a^2$ ($a > 0$ donné). Étudier les extréma de f.