Table des matières

Chapitre 0

Rappels sur les polynômes et fractions algébriques

0.1 Puissances

0.1.1 Puissance d'un nombre réel

- Soit n un nombre naturel supérieur à 1. On appelle puissance n-ième d'un nombre réel a le produit de n facteurs égaux à a. La notation exponentielle de cette puissance est a^n.

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots a}_{n \text{ fois}}}$$

  a est la base de la puissance a^n, n est l'exposant.
- Pour tout nombre réel a,

$$\boxed{a^1 = a}$$

- Pour tout nombre réel a non nul,

$$\boxed{a^0 = 1}$$

  Exemple 0.1.1

  . $3^2 = 3 \times 3 = 9$

  . $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

  . $3^1 = 3$

  . $3^0 = 1$

0.1.2 Loi des exposants

- Produit de puissances de même base :

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

  Exemple 0.1.2 $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$
- Quotient de puissances de même base :

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}} \; (a \neq 0)$$

  Exemple 0.1.3 $\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3$
- Puissance d'un produit :

$$\boxed{(a \times b)^n = a^n \times b^n}$$

  Exemple 0.1.4 $(2 \times 5)^2 = 2^2 \times 5^2$
- Puissance d'un quotient :

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}} \; (b \neq 0)$$

Exemple 0.1.5 $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2}$

- Puissance d'une puissance :

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m\times n}}$$

Exemple 0.1.6 $(2^3)^2 = 2^{3\times 2} = 2^6$

0.1.3 Puissance d'exposant entier négatif

- a^{-n} désigne l'inverse de la puissance a^n.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \ (a \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

Exemple 0.1.7

. $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

. $5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$

. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{2}$

. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

- Les 5 lois des exposants précédentes s'appliquent également lorsque les exposants m et n sont négatifs et lorsque les bases sont non nulles.

Exemple 0.1.8

. $a^3 \times a^{-5} = a^{3-5} = a^{-2}$ (loi 1)
. $\frac{a^{-2}}{a^{-5}} = a^{-2-(-5)} = a^3$ (loi 2)
. $(a \times b)^{-2} = a^{-2}b^{-2}$ (loi 3)
. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{a^{-3}}{b^{-3}}$ (loi 4)
. $(a^3)^{-2} = a^{3\times(-2)} = a^{-6}$ (loi 5)

0.1.4 Puissance d'exposant rationnel

- Pour tout nombre réel a, pour tout nombre naturel n non nul et différent de 1, on a

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

Exemple 0.1.9

. $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5} = \sqrt{5}$

. $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

. $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$

La puissance $a^{\frac{1}{n}}$ n'est pas définie dans $\mathbb{R}$ quand n est pair et a est négatif.
Exemple 0.1.10 $(-16)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-16} \notin \mathbb{R}$.

- Si $a^{\frac{1}{n}}$ existe dans $\mathbb{R}$, alors pour tout entier m on a :

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m}$$

Exemple 0.1.11

. $4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt[2]{4})^3 = 2^3 = 8$

. $(-8)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{-8})^2 = (-2)^2 = 4.$

- Les 5 lois des exposants précédentes s'appliquent également dans les cas où les puissances d'exposants rationnels désignent des nombres réels.

0.1.5 Racine n-ième d'un nombre réel

- Pour tout nombre réel a positif ou nul, pour tout nombre naturel n pair ($n \geq 2$), $\sqrt[n]{a}$ est l'unique nombre réel positif ou nul dont la puissance d'exposant n est égale à a.
  Si n est pair, $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$, on a :
  $$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a}$$
  Dans l'écriture $\sqrt[n]{a}$, a est le radicande, n est l'indice, $\sqrt{\ }$ est le radical.
  Exemple 0.1.12
  . $\sqrt[4]{16} = 2$ car $2^4 = 16$
  . $\sqrt[4]{-16} = 2$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$ car -16 est négatif.

- Pour tout nombre réel a, pour tout nombre naturel n impair, $\sqrt[n]{a}$ est l'unique nombre réel dont la puissance d'exposant n est égale à a.
  Si n est impair, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on a :
  $$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a}$$
  Exemple 0.1.13
  . $\sqrt[3]{125} = 5$ car $5^3 = 125$
  . $\sqrt[3]{-125} = -5$ car $(-5)^3 = -125$

- Notons que $\sqrt[n]{a}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$ seulement lorsque le radicande a est négatif et l'indice n est pair.

0.1.6 Propriétés des radicaux

Si $a^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}$ et $b^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}$, on a :

- $$\boxed{\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}}$$
  Exemple 0.1.14 $\sqrt[3]{8 \times 125} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{125} = 2 \times 5 = 10$
- $$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}\ (b \neq 0)$$
  Exemple 0.1.15 $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$
- $$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}}$$
  Exemple 0.1.16 $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$
- $$\boxed{(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$$
  Exemple 0.1.17 $(\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

0.1.7 Réduction du radicande

Illustrons la procédure dans les exemples suivants :

Exemple 0.1.18
$$\begin{aligned}
\sqrt{80} &= \sqrt{16 \times 5} && \leftarrow \text{Le radicande est écrit sous la forme d'un produit de deux facteurs dont un facteur est un carré parfait} \\
&= \sqrt{16} \times \sqrt{5} && \leftarrow \text{On applique la propriété } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \\
&= 4 \times \sqrt{5} && \leftarrow \text{On extrait la racine carrée du facteur carré parfait}
\end{aligned}$$

Exemple 0.1.19
$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{80} &= \sqrt[3]{8 \times 10} && \leftarrow \text{Le radicande est écrit sous la forme d'un produit de deux facteurs dont un facteur est un cube parfait} \\
&= \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{10} && \leftarrow \text{On applique la propriété } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \\
&= 2 \times \sqrt[3]{10} && \leftarrow \text{On extrait la racine cubique du facteur carré parfait}
\end{aligned}$$

0.2 Polynômes

0.2.1 Monômes

- Un monôme en x est le produit d'un nombre réel par une puissance entière non négative de la variable x.
  Exemple 0.2.1
  . $-3x^2$ est un monôme de coefficient -3, de variable x et d'exposant 2.
  . $\frac{5}{x}$ n'est pas un monôme car $\frac{5}{x} = 5x^{-1}$, l'exposant -1 étant négatif.
  . $5\sqrt{x}$ n'est pas un monôme car $5\sqrt{x} = 5x^{\frac{1}{2}}$, l'exposant $\frac{1}{2}$ n'étant pas entier.
- Le degré d'un monôme ax^n est égal à l'exposant n de la variable x.
  Exemple 0.2.2
  . Le degré de $-3x^2$ est égal à 2.
  . Le degré du monôme 5 est égal à 0 car $5 = 5x^0$.
  . Le degré du monôme nul 0 est indéterminé car $0 = 0x^1 = 0x^2 = 0x^3 = \ldots$.
- Certains monômes ont plusieurs variables. Dans ce cas, le degré d'un monôme à plusieurs variables est égal à la somme des exposants de ces variables.
  Exemple 0.2.3 Le degré du monôme $-3x^2y^3$ est égal à 5.

0.2.2 Opérations entre monômes

- Deux monômes sont semblables lorsqu'ils sont composés des mêmes variables respectivement affectées des mêmes exposants.
  Exemple 0.2.4
  . $2x^3$ et $5x^3$ sont semblables, $3x^2$ et $3y^2$ ne sont pas semblables.
  . $3x^2y^3$ et $-5x^2y^3$ sont semblables, $4x^2y^3$ et $4x^3y^2$ ne sont pas semblables.
- La distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction permet de réduire à un seul monôme la somme ou la différence de deux monômes semblables.
  $$\boxed{ax^n \pm bx^n = (a \pm b)x^n}$$
  Exemple 0.2.5
  . $3x^2 + 5x^2 = (3+5)x^2 = 8x^2$
  . $10x^3y^2 - 4x^3y^2 = (10-4)x^3y^2 = 6x^3y^2$
- La loi du produit de deux puissances de même base permet de calculer le produit de deux monômes.
  $$\boxed{ax^m \times bx^n = abx^{m+n}}$$
  Exemple 0.2.6
  . $3x^2 \times 4x^3 = 12x^5$
  . $-2x^2y^3 \times 5x^3y = -10x^5y^4$
- La loi du quotient de deux puissances de même base permet de calculer le quotient d'un monôme par un monôme non nul.
  $$\boxed{ax^m \div bx^n = \frac{a}{b}x^{m-n}}$$
  Exemple 0.2.7
  . $\frac{18x^5}{6x^3} = \frac{18}{6}x^{5-3} = 3x^2$
  . $\frac{12x^4y^2}{3x^2y^3} = \frac{12}{3}x^{4-2}y^{2-3} = 4x^2y^{-1}$ (qui n'est pas un monôme)

0.2.3 Polynômes

- Un polynôme en x est un monôme en x ou une somme de monômes en x.
  Exemple 0.2.8
  . $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ est un polynôme en x (il est composé de 4 monômes).

. $Q(x) = 3x^2 - \frac{5}{2}x + 4$ est un trinôme en x (il est composé de 3 monômes).
. $R(x) = 5x^2 - 2x$ est un binôme en x (il est composé de 2 monômes).

Généralement, on ordonne les monômes qui composent un polynôme selon l'ordre décroissant des puissances de la variable.

- Le degré d'un polynôme, une fois réduit, est égal au degré du monôme ayant le plus haut degré.
  Exemple 0.2.9
  . $P(x) = 3x^2 - 5x + 1$ est un polynôme de degré 2 en x.
  . $P(x, y) = 3x^2y - 2xy + 5x - 2$ est un polynôme de degré 2 en x, de degré 1 en y, et de degré total 3.
- Évaluer le polynôme $P(x)$ pour $x = x_0$ consiste à trouver la valeur numérique du polynôme quand la variable x prend la valeur x_0.
  Exemple 0.2.10 Évaluons le polynôme $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$ pour $x = -3$:
  $$P(-3) = 2(-3)^3 + (-3)^2 - 8(-3) - 4 = -54 + 9 + 24 - 4 = -25.$$
- On appelle zéro ou racine d'un polynôme toute valeur de la variable qui annule le polynôme.
  Exemple 0.2.11 2 est un zéro du polynôme $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$ car $P(2) = 0$.

0.2.4 Somme et différence de polynômes

- Les règles d'addition et de soustraction entre monômes semblables permettent d'effectuer des additions et des soustractions entre polynômes.
  Exemple 0.2.12 La somme $S(x)$ et la différence $D(x)$ des polynômes $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ et $Q(x) = 5x^2 + 3x - 4$ sont
  $S(x) = P(x) + Q(x) = (3x^2 - 2x + 1) + (5x^2 + 3x - 4) = (3 + 5)x^2 + (-2 + 3)x + (1 - 4) = 8x^2 + x - 3$
  et
  $D(x) = P(x) - Q(x) = (3x^2 - 2x + 1) - (5x^2 + 3x - 4) = (3 - 5)x^2 + (-2 - 3)x + (1 - (-4)) = -2x^2 - 5x + 5.$
- La somme et la différence de deux polynômes sont des polynômes.

0.2.5 Produit de polynômes

- La distributivité de la multiplication ou l'addition et la soustraction
  $$\boxed{a \times (b + c) = a \times b + a \times c} \text{ et } \boxed{a \times (b - c) = a \times b - a \times c}$$
  et la règle de multiplication de monômes
  $$\boxed{ax^m \times bx^n = abx^{m+n}}$$
  permettent d'effectuer les multiplications entre polynômes.
  Exemple 0.2.13 Le produit $P(x)$ des polynômes $A(x) = 2x + 3$ et $B(x) = 3x^2 + 2x - 1$ est :
  $$P(x) = (2x + 3) \times (3x^2 + 2x - 1) = 6x^3 + 4x^2 - 2x + 9x^2 + 6x - 3 = 6x^3 + 13x^2 + 4x - 3.$$
- Le produit de deux polynômes est aussi un polynôme.

0.2.6 Identités remarquables

Les égalités suivantes, vraies quels que soient a et b, sont des identités remarquables.

- Carré d'une somme .
  $$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$
  Exemple 0.2.14 $(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$
- Carré d'une différence.
  $$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$
  Exemple 0.2.15 $(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$
- Produit de la somme par la différence.
  $$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

Exemple 0.2.16 $(2x+3y)(2x-3y) = 4x^2 - 9y^2$

0.2.7 Quotient de polynômes

- Les propriétés des nombres réels

$$\boxed{(a+b)\div c = a\div c + b\div c} \qquad \boxed{(a-b)\div c = a\div c - b\div c}$$

et la règle de la division de monômes

$$\boxed{ax^m \div bx^n = \frac{a}{b}x^{m-n}},\ b\neq 0$$

permettent d'effectuer des divisions d'un polynôme par un monôme.
Exemple 0.2.17 Le quotient $Q(x)$ du polynôme $A(x) = 18x^4-9x^3+12x^2$ par le monôme $B(x) = 6x^2$ est :

$$Q(x) = (18x^4-9x^3+12x^2)\div(6x^2) = \frac{18x^4}{6x^2} - \frac{9x^3}{6x^2} + \frac{12x^2}{6x^2} = 3x^2 - \frac{3}{2}x + 2$$

- Le quotient de deux polynômes n'est pas toujours un polynôme.
Exemple 0.2.18 $(12x^3-6x)\div 3x^2 = 4x - \frac{2}{x}$ n'est pas un polynôme.
- Pour diviser un polynôme $A(x)$ par un polynôme $B(x)$ non nul, on ordonne le dividende $A(x)$ et le diviseur $B(x)$ selon les puissances décroissantes de la variable et on procède comme suit jusqu'à ce que l'on obtienne un reste de degré inférieur au diviseur.
Exemple 0.2.19 Effectuons la division de $A(x) = 2x^2-5x-40$ par $B(x) = x-6$

$$\begin{array}{rrrrrr|l} & 2x^2 & - & 5x & - & 40 & x-6 \\ \cline{7-7} - & (2x^2 & - & 12x) & & & 2x+7 \\ \cline{1-6} & & & 7x & - & 40 & \\ & & - & (7x & - & 42) & \\ \cline{3-6} & & & & & 2 & \end{array}$$

On obtient pour quotient $Q(x) = 2x+7$ et pour reste $R(x) = 2$.
- Le dividende $A(x)$, le diviseur $B(x)$, le quotient $Q(x)$ et le reste $R(x)$ vérifient la relation euclidienne :

$$\boxed{A(x) = B(x)\times Q(x) + R(x)},\ (\text{degré de } R(x) < \text{degré de } B(x)).$$

Exemple 0.2.20 À partir de la division de l'exemple précédent, on observe que

$$2x^2-5x-40 = (x-6)(2x+7)+2.$$

0.2.8 Théorème du reste

- Le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par $(x-a)$ est égal à $P(a)$.
Exemple 0.2.21 Le reste de la division de $P(x) = 2x^2-5x-40$ par $x-6$ est égal à

$$P(6) = 2\times(6)^2 - 5\times(6) - 40 = 2.$$

- Un polynôme $P(x)$ est divisible par un polynôme $Q(x)$ si et seulement si le reste de la division de $P(x)$ par $Q(x)$ est égal à 0.

$$\boxed{P(x) \text{ est divisible par } (x-a) \Leftrightarrow P(a) = 0}$$

0.3 Factorisation

0.3.1 Mise en évidence simple

- Factoriser un polynôme signifie écrire ce polynôme sous la forme d'un produit de facteurs.
- La mise en évidence simple est une méthode qui permet de factoriser un polynôme composé de monômes qui contiennent tous un même facteur commun. Pour factoriser, il suffit alors d'appliquer la règle de la distributivité de la multiplication sur l'addition :

$$(\text{forme développée})\ ab+ac = a(b+c)\ (\text{forme factorisée}).$$

Exemple 0.3.1 Factorisons $P(x) = 6x^4+15x^3-18x^2$:

$$P(x) = 3x^2\times 2x^2 + 3x^2\times 5x + 3x^2\times(-6) = 3x^2(2x^2+5x-6).$$

0.3.2 Mise en évidence double

La mise en évidence double est une méthode qui permet de factoriser des polynômes en regroupant les monômes qui contiennent un facteur commun. Il suffit alors d'appliquer la mise en évidence simple dans chacun des regroupements :

$$ac + ad + bc + bd = (ac + ad) + (bc + bd) = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d).$$

Exemple 0.3.2 Factorisons l'expressions suivante par la mise en évidence double :

$$\begin{array}{rcll} P(x) & = & 9x^2 - 12xy^2 + 6xy - 8y^3 & \leftarrow \text{ On regroupe les monômes ayant un facteur en commun} \\ & = & 3x(3x - 4y^2) + 2y(3x - 4y^2) & \leftarrow \text{ 1ère mise en évidence} \\ & = & (3x + 2y)(3x - 4y^2) & \leftarrow \text{ 2ème mise en évidence} \end{array}$$

0.3.3 Différence de deux carrés

- Une différence de deux carrés est une expression algébrique de la forme $a^2 - b^2$.
- Toute différence de deux carrés est factorisable. Il suffit d'appliquer l'identité remarquable
  (forme développée) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (forme factorisée).

  Exemple 0.3.3
  . $9x^2 - 4y^2 = (3x)^2 - (2y)^2 = (3x + 2y)(3x - 2y)$
  . $(2x + 1)^2 - 36 = (2x + 1)^2 - 6^2 = [(2x + 1) + 6][(2x + 1) - 6] = (2x + 7)(2x - 5)$
  . $(3x + 5)^2 - (2x + 1)^2 = [(3x + 5) + (2x + 1)][(3x + 5) - (2x + 1)] = (5x + 6)(x + 4)$
- Une somme de deux carrés n'est pas factorisable en un produit de deux binômes.

0.3.4 Factorisation en plusieurs étapes

Plusieurs étapes sont parfois nécessaires pour factoriser complètement un polynôme.

Exemple 0.3.4

$$\begin{array}{lrcll} . & 2x^3 - 18x & = & 2x(x^2 - 9) & \leftarrow \text{ Mise en évidence simple} \\ & & = & 2x(x + 3)(x - 3) & \leftarrow \text{ Différence de deux carrés} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} . & 4x(2x + 3) + 4x^2 - 9 & = & 4x(2x + 3) + (2x + 3)(2x - 3) & \leftarrow \text{ Différence de deux carrés} \\ & & = & (2x + 3)[4x + (2x - 3)] & \leftarrow \text{ Mise en évidence simple} \\ & & = & (2x + 3)(6x - 3) & \leftarrow \text{ Réduction} \\ & & = & (2x + 3)3(2x - 1) & \leftarrow \text{ Mise en évidence simple} \\ & & = & 3(2x + 3)(2x - 1) & \leftarrow \text{ Commutativité de la multiplication} \end{array}$$

0.3.5 Trinômes carrés parfaits

- Un trinôme carré parfait est une expression algébrique de la forme
  $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$.
  Un trinôme est carré parfait lorsque le terme médian est égal au double produit des racines carrées des termes extrêmes.
- Tout trinôme carré parfait est factorisable. Il suffit d'appliquer l'une des identités remarquables précédentes.

  Exemple 0.3.5

$$\begin{array}{lrcll} . & \text{Factorisons } P(x) & = & 4x^2 + 12x + 9 & \\ & & = & (2x)^2 + 2(2x)(3) + 3^2 & \leftarrow \text{ On écrit } P \text{ sous la forme : } a^2 + 2ab + b^2 \\ & & = & (2x + 3)^2 & \leftarrow \text{ On applique l'identité remarquable} \\ . & \text{Factorisons } P(x) & = & 4x^2 - 12x + 9 & \\ & & = & (2x)^2 - 2(2x)(3) + 3^2 & \leftarrow \text{ On écrit } P \text{ sous la forme : } a^2 - 2ab + b^2 \\ & & = & (2x - 3)^2 & \leftarrow \text{ On applique l'identité remarquable} \end{array}$$

0.3.6 Discriminant d'un trinôme du second degré

- Un trinôme du second degré est une expression algébrique de la forme $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
- L'expression $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant du trinôme.
- Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est factorisable si et seulement si le discriminant est positif ou nul

$$\boxed{ax^2 + bx + c \text{ est factorisable} \Leftrightarrow \Delta \geq 0}$$

Exemple 0.3.6

. $P(x) = x^2 + 2x + 3$ n'est pas fatorisable car le discriminant est négatif ($\Delta = -8$).
. $P(x) = 2x^2 + 7x + 6$ est factorisable car le discriminant est positif ($\Delta = 1$)

- Il existe plusieurs méthodes pour factoriser un trinôme du second degré :
  - la méthode de la complétion du carré,
  - la méthode produit et somme,
  - la méthode du discriminant.

0.3.7 Trinôme du second degré : méthode "Complétion du carré"

La méthode "complétion du carré" est illustrée ci-dessous en factorisant $P(x) = 2x^2 + 7x + 6$:

$$\begin{array}{rcll}
P(x) & = & 2x^2 + 7x + 6 & \\
& = & 2\left(x^2 + \frac{7}{2}x + 3\right) & \leftarrow \text{ On met en évidence le coefficient } a = 2 \\
& = & 2\left[\left(x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{49}{16}\right) + 3 - \frac{49}{16}\right] & \leftarrow \text{ On complète le trinôme carré parfait} \\
& = & 2\left[\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] & \leftarrow \text{ On factorise le trinôme carré parfait} \\
& = & 2\left[\left(x + \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{7}{4} - \frac{1}{4}\right)\right] & \leftarrow \text{ On factorise la différence de deux carrés} \\
& = & 2(x+2)\left(x + \frac{3}{2}\right) & \leftarrow \text{ On réduit} \\
& = & (x+2)(2x+3) & \leftarrow \text{ On écrit } P \text{ sous la forme d'un produit de deux binômes}
\end{array}$$

0.3.8 Trinôme du second degré : méthode "Produit et somme"

La méthode "Produit et somme" est illustrée ci-dessous en factorisant $P(x) = 2x^2 + 7x + 6$.

1.	On identifie les coefficients a, b, c	$a = 2,\ b = 7,\ c = 6$
2.	On recherche deux nombres entiers m et n tels que $\begin{cases} mn = ac & \text{(produit des coefficients extrêmes)} \\ m + n = b & \text{(coefficient médian)} \end{cases}$	$\begin{cases} mn = 12 \\ m + n = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = 3 \end{cases}$
3.	On écrit $ax^2 + bx + c = ax^2 + mx + nx + c$ puis on factorise par la méthode mise en évidence double	$2x^2 + 7x + 6 = 2x^2 + 4x + 3x + 6$ $= 2x(x+2) + 3(x+2) = (x+2)(2x+3)$

0.3.9 Trinôme du second degré : méthode du discriminant

On développera cette méthode dans le chapitre suivant.

0.4 Fractions rationnelles

0.4.1 Fraction rationnelle

- Une fraction rationnelle est une expression algébrique de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ est un polynôme et où $Q(x)$ est un polynôme non nul.
  Exemple 0.4.1 $\frac{5x^2}{2}$, $\frac{2x+1}{5x}$, $\frac{x^2-5x+6}{2x-1}$ sont des fractions rationnelles.
- Une fraction rationnelle est définie pour toute valeur de la variable qui n'annule pas le dénominateur.
  Exemple 0.4.2
  . $\frac{5x^2}{2}$ est définie pour tout nombre réel x car le dénominateur n'est jamais nul.
  . $\frac{2x+1}{5x}$ est définie pour tout nombre réel non nul car la valeur $x = 0$ annule le dénominateur.

. $\frac{x^2-5x+6}{2x-1}$ est définie pour tout nombre réel $x \neq \frac{1}{2}$ car la valeur $x = \frac{1}{2}$ annule le dénominateur.

- Pour simplifier (ou réduire) une fraction rationnelle, on procède comme suit :
  Exemple 0.4.3 Simplifions $\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$.

1.	On factorise le numérateur et le dénominateur	$\frac{x^2-x-2}{x^2-4} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$
2.	On divise le numérateur et le dénominateur par le facteur commun	$= \frac{x+1}{x+2}$
3.	tout en indiquant les restrictions sur la variable	si $x \neq 2$

  Notons que lorsque $x = 2$, la fraction $\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$ n'est pas définie alors que la fraction $\frac{x+1}{x+2}$ est définie et vaut $\frac{3}{4}$. C'est pourquoi on écrit :
$$\frac{x^2-x-2}{x^2-4} = \frac{x+1}{x+2} \text{ si } x \neq 2.$$

0.4.2 Addition et soustraction de fractions rationnelles

On distingue deux cas :

- Les dénominateurs n'ont pas de facteur commun.
$$\boxed{\frac{A(x)}{B(x)} \pm \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)D(x) \pm B(x)C(x)}{B(x)D(x)}}$$
  Exemple 0.4.4
  . $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-3} = \frac{2(x+3)+3(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{2x+6+3x-3}{(x-1)(x+3)} = \frac{5x+3}{(x-1)(x+3)}$
  . $\frac{2x}{x+1} - \frac{3x}{x-1} = \frac{2x(x-1)-3x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2-2x-3x^2-3x}{(x+1)(x-1)} = \frac{-x^2-5x}{(x+1)(x-1)}$
- Les dénominateurs ont un facteur en commun.
  Exemple 0.4.5

1.	On factorise les dénominateurs	$\frac{4}{x^2-9} - \frac{2}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)(x-3)} - \frac{2}{(x+3)^2}$
2.	On recherche le dénominateur commun composé du moins de facteurs possibles	$= \frac{4(x+3)}{(x+3)^2(x-3)} - \frac{2(x-3)}{(x+3)^2(x-3)}$
3.	On réduit au même dénominateur	$= \frac{4(x+3)-2(x-3)}{(x+3)^2(x-3)}$
4.	On complète les calculs	$= \frac{2x+18}{(x+3)^2(x-3)}$

0.4.3 Multiplication et division de fractions rationnelles

- Pour multiplier deux fractions rationnelles, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
$$\boxed{\frac{A(x)}{B(x)} \times \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x) \times C(x)}{B(x) \times D(x)}},\ B(x) \neq 0,\ D(x) \neq 0.$$
  Exemple 0.4.6

1.	On exprime le produit par une fraction algébrique	$\frac{x-2}{x-3} \times \frac{x^2-9}{x^2-x-2} = \frac{(x-2)(x^2-9)}{(x-3)(x^2-x-2)}$
2.	On factorise le numérateur et le dénominateur	$= \frac{(x-2)(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-2)(x+1)}$
3.	On simplifie en indiquant les restrictions	$= \frac{x+3}{x+1}$ si $x \neq 2$ et $x \neq 3$.

- Pour diviser deux fractions rationnelles, on multiplie la première par l'inverse de la seconde.
$$\boxed{\frac{A(x)}{B(x)} \div \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \times \frac{D(x)}{C(x)} = \frac{A(x) \times D(x)}{B(x) \times C(x)}},\ B(x) \neq 0,\ C(x) \neq 0,\ D(x) \neq 0.$$
  Exemple 0.4.7
$$\frac{x^2-4}{x^2+7x+10} \div \frac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15} = \frac{x^2-4}{x^2+7x+10} \times \frac{x^2+2x-15}{x^2-6x+9} = \frac{(x^2-4)(x^2+2x-15)}{(x^2+7x+10)(x^2-6x+9)}$$
$$= \frac{(x+2)(x-2)(x+5)(x-3)}{(x+2)(x+5)(x-3)^2} = \frac{(x+2)(x-2)(x+5)(x-3)}{(x+2)(x+5)(x-3)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3} \text{ si } x \neq -2,\ x \neq -5 \text{ et } x \neq 3.$$

0.4.4 Décomposition en une somme de fractions rationnelles

Illustrons dans l'exemple suivant la procédure permettant de décomposer une fraction algébrique en fractions partielles :

$$\begin{array}{rcll} \frac{3-4x}{x^3-5x^2+6x} & = & \frac{3-4x}{x(x-3)(x-2)} & \text{En factorisant le dénominateur} \\ & = & \frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-2} & \text{En décomposant en une somme de fractions rationnelles} \\ & = & \frac{A(x-3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-3)}{x(x-3)(x-2)} & \text{En mettant sous le même dénominateur} \end{array}$$

En égalant les numérateurs, nous obtenons

$$3-4x = A(x-3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-3),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Remplaçons successivement x dans chacun des membres de l'équation précédente par les valeurs qui annulent les facteurs du dénominateur. Ainsi,

- si $x = 0$, on obtient $3 = 6A \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$,
- si $x = 2$, on obtient $-5 = -2C \Leftrightarrow C = \frac{5}{2}$,
- si $x = 3$, on obtient $-9 = 3B \Leftrightarrow B = -3$.

Finalement, $\frac{3-4x}{x^3-5x^2+6x} = \frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{-3}{x-3}+\frac{\frac{5}{2}}{x-2} = \frac{1}{2x}-\frac{3}{x-3}+\frac{5}{2(x-2)}$.

0.5 Exercices

Exercice 1 Simplifier les expressions suivantes en utilisant les lois des exposants :

1. $a^3 \times a^2$
2. $\frac{a^5}{a^3}$
3. $(a \times b)^3$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^4$
5. $(a^3)^2$

Exercice 2 Simplifier les expressions suivantes en utilisant les lois des exposants :

1. $x^3 \times x^2$
2. $3a \times 2a^2$
3. $-3x^2 \times 4x^3$
4. $2x^2y^3 \times 3xy^4$
5. $8a^4b^3c^2 \times 2ab^2c^3$
6. $\frac{2}{5}a^3b^2 \times \frac{-5}{8}a^2b$

Exercice 3 Simplifier les expressions suivantes en utilisant les lois des exposants :

1. $a^5 \div a^2$
2. $12a^6 \div 4a^4$
3. $15x^5 \div -3x^5$
4. $\frac{-12a^2}{3a}$
5. $\frac{-36a^4b^3}{18a^2b^2}$
6. $\frac{16x^5y^2}{-32x^4}$

Exercice 4 Simplifier les expressions suivantes en utilisant les lois des exposants :

1. $(2a)^3$
2. $(5a^3)^2$
3. $(2a^3)^2 \times 3a$
4. $(a^2b^3)^2 \times (5a)^2$
5. $(3a^4)^2 \times (2a)^4$
6. $(2a^3b^2)^4 \times (3a^2b)^2$

Exercice 5 Simplifier les expressions suivantes en utilisant les lois des exposants :

1. $\left(\frac{2}{3}a\right)^2$
2. $\left(\frac{3a^2}{b}\right)^3$
3. $\left(\frac{-3a}{b^2}\right)^3$
4. $\left(\frac{3x^2y}{2}\right)^4$
5. $\left(\frac{-5a^2b^3}{c^4}\right)^2$
6. $\left(\frac{-a^4}{2bc^2}\right)^5$

Exercice 6 Simplifier les expressions suivantes en utilisant les lois des exposants :

1. $\left(\frac{2a^2}{3b^3}\right)^2 \times \left(\frac{3a}{b}\right)^3$
2. $\left(\frac{-3x^2}{5y}\right)^3 \times \left(\frac{x^3}{2y^2}\right)^2$
3. $\left(\frac{10a^2b^6}{3a}\right) \times \left(\frac{3a^4}{5ab^5}\right)^2$
4. $\frac{5a^3}{(b^2)^3} \times \left(\frac{b^3}{2a}\right)^2$

Exercice 7 Calculer :

1. 2^{-3}
2. $(-2)^{-3}$
3. 2^{-4}
4. $(-2)^{-4}$
5. 10^{-1}
6. $(0,01)^{-2}$
7. $(-0,1)^{-2}$
8. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$

Exercice 8 Simplifier les expressions suivantes en utilisant les lois des exposants $(a \neq 0, b \neq 0)$:

1. $2^3 \times 2^{-4} \times 2^2$
2. $(5^{-2})^3 \times 5^8$
3. $(2^{-3})^2 \times (2^{-3})^{-4}$
4. $(a^2b^{-4})^{-1} \times (a^{-3}b)^{-2}$

5. $(-2a^2b^{-1})^{-2} \times (2a^{-1}b)^2$
6. $\left(\frac{2a^{-3}}{b^{-2}}\right)^{-2}$
7. $\frac{12a^{-3}b^2}{4a^{-4}b^{-1}}$
8. $\left(\frac{-2a^{-1}b^2}{3a^{-2}b}\right)^2$
9. $\left(\frac{2a^4b^{-2}}{a^{-3}b}\right)^{-2}$

Exercice 9 Simplifier les expressions suivantes en utilisant les lois des exposants ($a \neq 0, b \neq 0$) :

1. $(2a^4b^{-2})^{-1}$
2. $(a^2b^{-4})^{-1} \times (a^{-3}b)^{-2}$
3. $\left(\frac{a}{b^{-2}}\right)^{-1}$
4. $(2ab)^{-2} \times 4a^2b^3$
5. $(-3a^2b^{-3})^2 \times (2a^{-1}b^2)^{-2}$
6. $(-a^2b^{-1})^3 \div (ab^{-2})^2$

Exercice 10 Calculer, quand c'est possible :

1. $\sqrt{25}$
2. $\sqrt{-25}$
3. $\sqrt[4]{16}$
4. $\sqrt[4]{-16}$
5. $\sqrt[3]{64}$
6. $\sqrt[3]{-64}$
7. $\sqrt[4]{256}$
8. $\sqrt{256}$

Exercice 11 Calculer à l'aide de la calculatrice (arrondir le résultat au centième près) :

1. $\sqrt{2}$
2. $\sqrt{3}$
3. $\sqrt{5}$
4. $\sqrt[3]{2}$
5. $\sqrt[3]{3}$
6. $\sqrt[3]{5}$
7. $\sqrt{10}$
8. $\sqrt[4]{10}$

Exercice 12 Pour quelles valeurs réelles de x les expressions suivantes sont-elles définies ?

1. $\sqrt{x-2}$
2. $\sqrt[3]{x-2}$
3. $\sqrt{-2x+1}$
4. $\frac{1}{\sqrt{2x-6}}$

Exercice 13 Simplifier $\sqrt{x^2}$ si :

1. x est positif,
2. x est négatif.

Exercice 14 Calculer, quand c'est possible

1. $25^{\frac{1}{2}}$
2. $(-16)^{\frac{1}{2}}$
3. $729^{\frac{1}{3}}$
4. $(-729)^{\frac{1}{3}}$
5. $(4^{\frac{1}{2}})^3$
6. $(4^3)^{\frac{1}{2}}$
7. $\left(\frac{-8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$
8. $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$
9. $(16^{-1})^{\frac{1}{4}}$

Exercice 15 Calculer, quand c'est possible

1. $16^{\frac{3}{2}}$
2. $(-27)^{\frac{2}{3}}$
3. $9^{-\frac{3}{2}}$
4. $4^{1,5}$
5. $25^{-2,5}$
6. $\left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{3}{2}}$
7. $(-9)^{\frac{3}{2}}$
8. $\left(-\frac{32}{243}\right)^{-\frac{2}{5}}$
9. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-0,5}$

Exercice 16 Soit a un nombre réel positif. Effectuer les calculs suivants :

1. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{3}}$
2. $a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}}$
3. $a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{1}{4}}$
4. $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2$
5. $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2$
6. $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 \div \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2$

Exercice 17 Soit a un nombre réel positif. Effectuer les calculs suivants :

1. $a^{-\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{3}{4}}$
2. $a^{\frac{5}{2}} \div a^{-\frac{5}{3}}$
3. $a^{-\frac{3}{2}} \times a^{\frac{5}{6}}$

4. $a^{-\frac{1}{2}} \div a^{-\frac{1}{3}}$
5. $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}$
6. $(a^{-\frac{2}{3}})^{-2} \times (a^{-\frac{1}{3}})^{-5}$

Exercice 18 Soient a et b deux nombres réels positifs. Simplifier les expressions suivantes en appliquant les lois des exposants :

1. $(a^2b^3)^{\frac{1}{6}}$
2. $(a^{-2}b^3)^{-\frac{1}{2}}$
3. $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^{\frac{1}{6}}$
4. $\left(\frac{a^3b^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{12}}$
5. $(a^{-\frac{2}{3}} \div a^{\frac{3}{4}})^{-2}$
6. $[(a^2b^{-3})^{\frac{2}{3}}]^6$

Exercice 19 Effectuer les opérations suivantes :

1. $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$
2. $\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3}$
3. $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$
4. $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$
5. $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$
6. $\sqrt[3]{125^2}$

Exercice 20 Effectuer les calculs suivants :

1. $2\sqrt{12} \times 5\sqrt{3}$
2. $-2\sqrt[4]{2} \times 3\sqrt[4]{8}$
3. $(2\sqrt{5})^2$
4. $\frac{10\sqrt[3]{81}}{5\sqrt[3]{3}}$
5. $(2\sqrt[3]{5})^3$
6. $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{16}{9}}$

Exercice 21 Effectuer les calculs suivants :

1. $3\sqrt[3]{18} \times 2\sqrt[3]{12}$
2. $2\sqrt[3]{4} \times 3\sqrt[3]{250}$
3. $\left(\sqrt[3]{\frac{125}{8}}\right)^2$
4. $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right)^2$
5. $(2\sqrt{3})^2 \times (3\sqrt{2})^2$
6. $\frac{12\sqrt{50}}{5\sqrt{2}}$

Exercice 22 Écrire chacun des nombres suivants sous la forme $a\sqrt[n]{b}$, où b est le plus petit entier possible.

1. $\sqrt{32}$
2. $\sqrt{98}$
3. $\sqrt{180}$
4. $\sqrt{720}$
5. $3\sqrt{500}$
6. $\sqrt{40}$
7. $\sqrt[3]{250}$
8. $\sqrt[4]{80}$
9. $\frac{4}{5}\sqrt{1200}$
10. $\sqrt[3]{2000}$
11. $\frac{2}{3}\sqrt[4]{162}$
12. $-7\sqrt[4]{160}$

Exercice 23 Identifier les monômes parmi les expressions algébriques suivantes :

1. $5x$
2. $\frac{5}{x}$
3. $3x^{-2}$
4. $2x^{\frac{2}{3}}$
5. -1

Exercice 24 Exprimer par un monôme chacun des énoncés suivants :

1. Le périmètre d'un carré de côté x.
2. L'aire d'un disque de rayon r.
3. Le volume d'une sphère de rayon r.
4. L'aire latérale d'un cylindre droit de rayon r et de hauteur h.
5. Le volume d'un cylindre droit de rayon r et de hauteur h.

Exercice 25 Évaluer chacun des monômes suivants selon les valeurs indiquées des variables.

1. $-3x^2$ lorsque $x = -5$
2. $-2x^2y^3$ lorsque $x = 3$ et $y = -2$
3. $3x^2y^3$ lorsque $x = \frac{2}{3}$ et $y = -\frac{3}{2}$
4. $-\frac{2}{3}xy^2$ lorsque $x = \frac{3}{4}$ et $y = -\frac{1}{2}$

Exercice 26 Dans chacun des cas suivants, déterminer le monôme qui n'est pas semblable aux autres.

1. $3x^2, -5x^2, \pi x^2, -3x, -\frac{3}{2}x^2$
2. $2x^2y, \sqrt{2}x^2y, 5yx^2, 2\pi yx^2, 3xy^2$

Exercice 27 Réduire chacune des expressions suivantes à un seul monôme.

1. $2x^3 - 5x^3 + 7x^3$
2. $4x^2y - 6x^2y + x^2y$
3. $\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^2 - x^2$
4. $-\frac{2}{3}xy^2 + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{5}{6}xy^2$

Exercice 28 Effectuer les opérations suivantes :

1. $-3x^2 \times 4x^3$
2. $2x^2y^3 \times -3xy^2$
3. $-17x^2 \times -3x$
4. $-7x^2y \times 5x^2y^2$
5. $3x^2y \times -5xy \times -2xy^2$
6. $20x^2y^2 \times -0,5x \times -1,2y^2$
7. $\frac{3}{4}x^2y \times \frac{2}{5}xy^2 \times \frac{10}{9}x$
8. $\frac{-3}{5}x^2y^3 \times \frac{2}{3}xy \times \frac{-5}{2}xy^2$

Exercice 29 Effectuer les opérations suivantes :

1. $(3x^2y)^2$
2. $(-2xy^3)^2$
3. $(-2x^2y^3)^3$
4. $\left(-\frac{3}{4}x^2y^3\right)^2$
5. $3x^2(-2x)^3$
6. $(-2x^2)^2 \times (3x^3)^2$

Exercice 30 Effectuer les opérations suivantes, puis indiquer si le résultat est un monôme :

1. $-12x^4 \div 3x^6$
2. $18x^6 \div 12x^4$
3. $18x^6y^4 \div 9x^2y^2$
4. $-12x^2y^4 \div 6x^3y$
5. $(-5x^3)^2 \div 10x^4$
6. $(4x^2y^3)^3 \div (2xy^2)^4$

Exercice 31 Répondre aux questions tout en justifiant.

1. La somme de deux monômes est-elle toujours un monôme ?
2. Le produit de deux monômes est-il toujours un monôme ?
3. Le quotient de deux monômes est-il toujours un monôme ?

Exercice 32 Parmi les expressions algébriques suivantes, identifier les polynômes, ordonner les selon les puissances décroissantes de la variable et déterminer leur degré.

1. $x\sqrt{2} + 3x^2 - 1$
2. $2x^2 + 2\sqrt{x}$
3. $3y - 2y^3 + \frac{1}{2}y^4 - 4y^2 + 1$
4. $x^{-1} + 5x + x^2$

Exercice 33 Réduire les polynômes suivants puis déterminer leur degré :

1. $P(x) = 3x^2 + 2x - 5x^2 - 3x + 1$
2. $P(x, y) = 3x^3y - 2xy^2 + 4x^3y - xy^2$
3. $P(z) = 4z^3 - 5z^2 + 8z^3 - z^2 + 4z - 5 + 6z^2 - 12z^3$

4. $P(x) = \frac{3}{2}x^2 + 5x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}x$

Exercice 34 Évaluer les polynômes suivants :

1. $P(x) = 3x^2 + 5x$ pour $x = -2$
2. $P(x) = x^2 - 5x + 3$ pour $x = 0$
3. $P(x) = 3x^2 + 2x - 5$ pour $x = -1,5$
4. $P(x) = 2x^2 - 7x - 15$ pour $x = -\frac{3}{2}$

Exercice 35 Soit le polynôme $P(x, y) = 3x^2y - 2xy^2 + xy - 2$. Calculer :

1. $P(2, 3)$
2. $P(-3, 1)$
3. $P(-1, -2)$
4. $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$

Exercice 36 Soit le polynôme $P(x) = 2x^2 - x - 6$. Déterminer les zéros parmi les nombres réels suivants :

1. $x = -1$
2. $x = 2$
3. $x = 0$
4. $x = -\frac{3}{2}$

Exercice 37 Les binômes suivants sont du premier degré. Déterminer le zéro de chacun de ces binômes.

1. $P(x) = 3x - 2$
2. $P(y) = -2y + 5$
3. $P(z) = -2z$
4. $P(x) = -3x + \frac{1}{2}$
5. $P(y) = -\frac{2}{3}y + 4$
6. $P(z) = -\frac{2}{5}z + \frac{3}{4}$

Exercice 38 Du haut d'un pont, Eric jette un caillou verticalement vers le bas. La formule $d(t) = 4,9t^2 + 3t$ exprime la distance $d(t)$ en mètres parcourue par le caillou selon la durée t en secondes écoulée depuis le départ. Si le caillou rentre dans l'eau après 3 secondes, quelle est la hauteur du pont ?

Exercice 39 Soient $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $Q(x) = -x^2 - 3x + 2$ et $R(x) = -2x + 5$. Déterminer :

1. $P(x) + Q(x) + R(x)$
2. $P(x) - Q(x) + R(x)$
3. $P(x) - Q(x) - R(x)$
4. $-P(x) + Q(x) - R(x)$

Exercice 40 Soient $P(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$, $Q(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}$ et $R(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$. Déterminer :

1. $P(x) + Q(x) + R(x)$
2. $P(x) - Q(x) + R(x)$
3. $P(x) - Q(x) - R(x)$
4. $-P(x) + Q(x) - R(x)$

Exercice 41 Effectuer les opérations suivantes :

1. $(4x^2 - 8x + 1) - (2x^2 - 3x + 5)$
2. $(3x^2y - 2xy^2 + 3xy) + (2x^2y + 3x^2y - 5xy)$
3. $(3a^2b - 5ab^2) - (2a^2b + 3ab^2)$
4. $(3x^2y - 2xy + 4xy^2) - (-3xy^2 + 4xy) + 2x^2y$
5. $(3x^3 - 5x^2 - 4x - 1) - [(x^3 - 5x^2) - (x^2 - 4x + 1)]$

Exercice 42 Effectuer les produits suivants :

1. $3x^2(2x - 5)$
2. $-3y(y^2 - 2y)$
3. $-2x^2(3xy^2 + 5x^2y)$
4. $(2xy - 5x)(-3x^2y)$
5. $\frac{3}{4}x^2\left(\frac{2}{3}x - 8x^2\right)$
6. $(4x^2 - 8x + 12)\left(-\frac{3}{4}x\right)$

Exercice 43 Effectuer les produits suivants :

1. $(x + 3)(x - 2)$
2. $(x - 5)(3 - x)$
3. $(2a + b)(3a - 2b)$
4. $(5 - 2x)(3x - 4)$
5. $(-2x + 5)(3x - 2)$
6. $(-5x - 3)(-2x + 4)$

Exercice 44 Effectuer les opérations suivantes :

1. $5x(3x + 2y) - 3x(2x - 4y)$
2. $(2x - 3y)(3x + 2y) + (5x - y)(2x + 3y)$
3. $(3a - 2b)(2a + b) - (2a + 3b)(3a - b)$
4. $(2a + 3)(3a - 2)(2a - 5)$
5. $(2x + 3)(2x - 5)(3x - 4)$

Exercice 45 On considère les polynômes $P(x) = 3x^2$, $Q(x) = 2x + 1$, $S(x) = 5x + 4$. Déterminer

1. $P(x) \times Q(x) + P(x) \times S(x)$
2. $P(x) \times Q(x) - Q(x) \times S(x)$
3. $P(x) \times Q(x) \times S(x)$
4. $P(x) \times (Q(x) + S(x))$
5. $(P(x) - Q(x)) \times S(x)$
6. $(S(x) - Q(x)) \times P(x)$

Exercice 46 Développer les carrés de binômes suivants en utilisant l'identité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

1. $(x + 5)^2$
2. $(3x + 4)^2$
3. $(2x + 3y)^2$

4. $(2x^3 + 5x^2)^2$
5. $(3x^2y + xy^2)^2$
6. $(7x^2y + 3x^5y^2)^2$
7. $\left(\frac{1}{2}x + 7\right)^2$
8. $\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{9}y^2\right)^2$

Exercice 47 Développer les carrés de binômes suivants en utilisant l'identité $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

1. $(x - 4)^2$
2. $(2x - 7)^2$
3. $(4x - y)^2$
4. $(2x^2 - 3x)^2$
5. $(-3x - 4y)^2$
6. $(4x^2 - 5y)^2$
7. $\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)^2$
8. $\left(\frac{5}{6}x - 3y^2\right)^2$

Exercice 48 Développer les produits suivants en utilisant l'identité $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

1. $(x + 5)(x - 5)$
2. $(2x - 7)(2x + 7)$
3. $(4x + 3y)(4x - 3y)$
4. $(2 - 3x)(2 + 3x)$
5. $(-2x + 3y)(-2x - 3y)$
6. $(3x^2 + 5)(3x^2 - 5)$
7. $\left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}\right)$
8. $\left(\frac{x}{6} - \frac{3}{4}y^2\right)\left(\frac{x}{6} + \frac{3}{4}y^2\right)$

Exercice 49 Développer puis réduire les expressions suivantes :

1. $(3x + 2)^2 + (3x - 2)^2$
2. $(2x^2 + 5)^2 - (2x^2 - 5)^2$
3. $(x + 1)(x^2 + 1)(x - 1)$
4. $3x(5x - 4)^2 - 2x(3x + 5)^2$

Exercice 50 Effectuer les divisions suivantes :

1. $(24x^4 + 12x^3 - 18x^2) \div 6x^2$
2. $(36x^2y^4 + 27x^3y^2 - 9x^2y^2) \div 9x^2y$
3. $(3x^2 + 2x)(4x + 6) \div 2x$
4. $(3x + 6)^2 \div 3x$
5. $(4x^2 + 2x)(4x^2 - 2x) \div 4x^2$

Exercice 51 Déterminer le quotient $Q(x)$ et le reste $R(x)$ de la division de $A(x) = 2x^2 + 5x - 3$ par $B(x) = x - 1$, puis vérifier la relation euclidienne $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$.

Exercice 52 Dans chacun des cas suivants, déterminer le quotient $Q(x)$ et le reste $R(x)$ de la division de

$A(x)$ par $B(x)$:

1.	$A(x) = 2x^2 - x - 6,$	$B(x) = 2x + 3$
2.	$A(x) = 3x^2 - 2x + 1,$	$B(x) = x + 1$
3.	$A(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 4,$	$B(x) = x + 1$
4.	$A(x) = x^3 - 2x + 1,$	$B(x) = x - 1$
5.	$A(x) = x^4 - 1,$	$B(x) = x + 1$
6.	$A(x) = x^3 + 27,$	$B(x) = x + 3$

Exercice 53 Soit $P(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

1. (a) Calculer $P(2)$.
   (b) Vérifier que le reste de la division de $P(x)$ par $(x - 2)$ est égal à $P(2)$.
2. (a) Calculer $P(-2)$.
   (b) Vérifier que le reste de la division de $P(x)$ par $(x + 2)$ est égal à $P(-2)$.

Exercice 54 Soit $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

1. Montrer que $P(x)$ est divisible par :
   (a) $(x + 3)$
   (b) $(x - 2)$
   (c) $(x + 1)$
2. Montrer que $P(x)$ n'est pas divisible par :
   (a) $(x - 1)$
   (b) $(x + 2)$
   (c) $(x - 3)$

Exercice 55 Soit $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 1$. Déterminer le reste de la division de $P(x)$ par :

1. $(x - 2)$
2. $(x + 2)$
3. $(x - 1)$

Exercice 56 Trouver le plus grand facteur commun aux expressions algébriques suivantes :

1. $18x^4$, $24x^3$, $12x^5$
2. $18x^3y^2z^4$, $24x^4y^3z^4$, $36x^2y^4z^3$
3. $15x^2(a + b)^3$, $18x^3(a + b)^2$
4. $24x^3y^2(a - b)^3$, $26x^2y^4(a - b)^2$

Exercice 57 Factoriser les polynômes suivants :

1. $5x - 10$
2. $18x + 24y - 12z$
3. $4x^2 + 6x$
4. $12x + x^2 - 5x^3$
5. $12a^2b + 18a^2b^2$
6. $-3x^4 + 6x^3 - 9x^2$
7. $a^2 + ab + a$
8. $x^4 - x^3y - x^2$

9. $24x^3y^2 - 16x^2y^3 + 28x^3y^4$
10. $21x^3y^2z - 14x^2y^3z^2 + 28x^2y^2z^2$

Exercice 58 Factoriser les polynômes suivants :

1. $x(x+2) + 5(x+2)$
2. $3(x-2) - x(x-2)$
3. $a(b+c) - d(b+c)$
4. $x(3-y) + y(3-y)$
5. $(x+3)(x+2) + (x+3)(x-1)$
6. $(x+y)(x-2) - (x+y)(2x-3)$
7. $(x+y)^2 + x(x+y)$
8. $(x-y)^2 + (x-y)(x+y)$
9. $2(x-1) - (x-1)^2$
10. $(2x-3)^2 + (x+1)(2x-3) + (2x-3)(x+3)$

Exercice 59 Factoriser les polynômes suivants :

1. $x(x-1) - 3(1-x)$
2. $x(x+3) + 2(-x-3)$
3. $(x-5)^2 - 2(5-x)$
4. $(2x+1)(2x-1) + (1-2x)^2$
5. $(2x+3y)(x+y) + (4x+6y)(x-y)$
6. $(x+1)(2x+6) - (x-2)(3x+9)$

Exercice 60 Factoriser les polynômes suivants :

1. $(3a+2b)^2 - (3a+2b)(2a-3b) + (3a+2b)$
2. $(x+5)^2 + x^2 + 5x$
3. $(4x+7)^2 + (5-x)(4x+7) + 4x^2 + 7x$
4. $(3x+2)^2 + (3x+2)(2x-3) - (3x+2)$
5. $(3x-4)(x+1) + 6x^2 - 8x + (3x-4)(x-3)$

Exercice 61 Factoriser les polynômes suivants :

1. $x^2 + 5xy + 3x + 15y$
2. $2x^2 + 3xy - 10x - 15y$
3. $6a^2 - 15a + 2ab - 5b$
4. $6x^2 - 8x - 9xy + 12y$
5. $10xy + 2x + 15y + 3$
6. $x^3 - x^2 + x - 1$

Exercice 62 Factoriser les polynômes suivants :

1. $2x^2y + 3x^2 + 10y + 15$
2. $15x^4y^2 + 35x^2y^2 - 9x^2 - 21$
3. $2x^3 + 4x^2y - 2x^2 - 4xy$
4. $3x^3y - 9x^3 + 6x^2y - 18x^2$

5. $30x^4y - 10x^3y^2 + 15x^3y - 5x^2y^2$
6. $2x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 6x$

Exercice 63 Factoriser les polynômes suivants :

1. $ax - ay + bx - by + cx - cy$
2. $6ax - 3ay + 10bx - 5by - 4x + 2y$
3. $a^3 - 2ab + ac^2 - a^2b + 2b^2 - bc^2 + a^2c - 2bc + c^3$
4. $ab(x^2 + y^2) - xy(a^2 + b^2)$

Exercice 64 Factoriser les différences des deux carrés suivantes :

1. $x^2 - 25$
2. $16x^2 - 9$
3. $49x^2 - 36y^2$
4. $36x^4 - 25y^6$
5. $100 - x^2$
6. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$
7. $x^2 - 3$
8. $x^2 - 1$
9. $16x^2 - \frac{1}{9}$
10. $\frac{25}{16}x^2y^4 - \frac{4}{9}z^6$

Exercice 65 Factoriser les différences des deux carrés suivantes :

1. $(3x - 1)^2 - 9$
2. $(x + 1)^2 - 4$
3. $(2x + 5)^2 - 16x^2$
4. $25x^2 - (2x - 5)^2$
5. $16x^2 - (3x + 2)^2$
6. $36x^2 - (2 - x)^2$
7. $(x + 3)^2 - (2x + 5)^2$
8. $(3x - 5y)^2 - (2x - 3y)^2$
9. $4(x + 5)^2 - 1$
10. $16x^2 - (3x + 2)^2$
11. $25(x - 3)^2 - 9(2x + 1)^2$

Exercice 66 Factoriser complètement les polynômes suivants :

1. $2x^3 - 18x$
2. $2x^3 + 3x^2 - 2xy^2 - 3y^2$
3. $25x^3 - 50x^2 - 9xy^2 + 18y^2$
4. $x^4 - 81$
5. $x^2 - 1 + (x - 1)^2$
6. $2x^2 - \frac{1}{2}$

Exercice 67 Factoriser les trinômes carrés parfaits suivants :

1. $x^2 + 10x + 25$
2. $x^2 - 14x + 49$
3. $4x^2 + 12xy + 9y^2$
4. $25x^2 - 20xy + 4y^2$
5. $9x^4 - 30x^2 + 25$
6. $25x^4 + 30x^2y^3 + 9y^6$
7. $x^2 - x + \frac{1}{4}$
8. $\frac{9}{16}x^2 + x + \frac{4}{9}$

Exercice 68 Expliquer pourquoi les trinômes suivants ne sont pas des carrés parfaits.

1. $4x^2 + 6x + 9$
2. $4x^2 + 12x - 9$
3. $-4x^2 + 12x + 9$
4. $9x^2 - 15x + 25$

Exercice 69 Compléter les trinômes afin d'obtenir des trinômes carrés parfaits puis les factoriser.

1. $x^2 + \ldots + 9$
2. $4x^2 - \ldots + 9$
3. $9x^2 + 30x + \ldots$
4. $\ldots + 20x + 4$
5. $4x^2 - 28x + \ldots$
6. $\ldots - 6x + 1$
7. $x^2 + \frac{2}{3}x + \ldots$
8. $x^2 - \ldots + \frac{49}{4}$

Exercice 70 Factoriser les polynômes suivants :

1. $4x^3 - 12x^2 + 9x$
2. $x^4 - 2x^2 + 1$
3. $-x^2 + 6x - 9$
4. $(x-1)(2x+1) + x^2 - 2x + 1$
5. $(x^2+4)^2 - 16x^2$
6. $x^2(x+1) + 2x(x+1) + (x+1)$

Exercice 71 Identifier les coefficients a, b, c des trinômes proposés. Calculer ensuite le discriminant puis indiquer si le trinôme est factorisable.

1. $2x^2 + 3x + 1$
2. $2x^2 - x - 6$
3. $8x^2 + 2x - 15$
4. $-3x^2 + 5x + 2$
5. $x^2 - x + 1$
6. $4x^2 - 12x + 9$

Exercice 72 Factoriser les trinômes suivants par la méthode de la complétion du carré.

1. $x^2 - 10x + 21$
2. $x^2 - 5x - 14$
3. $x^2 - 7x + 12$
4. $x^2 - 9x + 20$
5. $2x^2 + 7x + 3$
6. $3x^2 + 5x - 2$
7. $6x^2 + x - 2$
8. $10x^2 - 19x + 6$

Exercice 73 Factoriser les trinômes suivants par la méthode de la complétion du carré.

1. $x^2 + 8x + 15$
2. $x^2 - 8x + 15$
3. $x^2 + 5x - 14$
4. $x^2 - 5x - 14$
5. $6x^2 + 19x + 15$
6. $2x^2 - 7x - 15$
7. $3x^2 - x - 4$
8. $5x^2 - 17x + 6$

Exercice 74 Factoriser les trinômes suivants :

1. $4x^2 - 12x + 9$
2. $x^2 + 6xy + 8y^2$
3. $x^2 - 2x - 1$
4. $x^2 + 6x + 7$

Exercice 75 Factoriser les trinômes suivants par la méthode “Produit et somme” :

1. $2x^2 + 9x + 4$
2. $6x^2 - 19x + 10$
3. $4x^2 - 5x - 21$
4. $5x^2 - 32x - 21$
5. $12x^2 + 13x + 3$
6. $16x^2 - 26x + 3$
7. $6x^2 + 11x - 10$
8. $8x^2 + 2x - 15$
9. $x^2 + 10x + 24$
10. $x^2 - 7x + 12$

Exercice 76 Factoriser chacun des trinômes de l’exercice précédent par la méthode du discriminant.

Exercice 77 Les trinômes suivants sont de la forme $x^2 + bx + c$ (le coefficient de x^2 est égal à 1). Factoriser ces trinômes.

1. $x^2 + 7x + 12$
2. $x^2 - 7x + 10$
3. $x^2 + 2x - 15$
4. $x^2 - 5x - 14$
5. $x^2 + 14x + 48$
6. $x^2 - 15x + 36$

Exercice 78 Factoriser les expressions algébriques suivantes :

1. $2x^3 - 8x^2 + 6x$
2. $6x^4 + 9x^3 + 3x^2$
3. $9x^4 + 6x^2 + 1$
4. $x^4 - 2x^2 + 1$
5. $x^3 + 3x^2 + 2x$
6. $16x^3 + 4x^2y - 2xy^2$
7. $(2x - 5)^2 - 4(x - 1)^2$
8. $x^8 - y^8$

Exercice 79 Une somme de deux cubes et une différence de deux cubes peuvent se factoriser.

1. Montrer que
   (a) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
   (b) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
2. Factoriser
   (a) $x^3 + 64$
   (b) $8x^3 - 27$
   (c) $27x^3 - 8y^3$

Exercice 80 Simplifier les fractions rationnelles suivantes :

1. $\frac{5x^2}{20x^3}$
2. $\frac{12x^3y^2}{16xy^3}$
3. $\frac{5x+10y}{5x-10y}$
4. $\frac{2x^2+3x}{5x^2+10x}$
5. $\frac{6x^3+4x^2}{9x^2+6x}$
6. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}$
7. $\frac{2x^2-x-6}{2x^2+5x+3}$
8. $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$

Exercice 81 Simplifier les fractions rationnelles suivantes :

1. $\frac{x^2-5x}{x^2-25}$
2. $\frac{x^4-1}{x^3-x}$
3. $\frac{(x+2)^2-9}{x^2-25}$

4. $\frac{x^2+2x-15}{x^2-9}$
5. $\frac{2x^2+7x+3}{4x^2-1}$
6. $\frac{x^2+5x+6}{x^2+x-2}$
7. $\frac{x^2-x-6}{2x^2-5x-3}$
8. $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

Exercice 82 Simplifier les fractions rationnelles suivantes :

1. $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$
2. $\frac{x^3-x}{x^3-2x^2+x}$
3. $\frac{x^2-1}{(x+1)(2x^2-2x)}$
4. $\frac{(x+1)^2+x^2+x}{4x^2-1}$

Exercice 83 Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\frac{12x}{5} \times \frac{10}{3x^2}$
2. $\frac{2x}{x-1} \times \frac{x-1}{5}$
3. $\frac{x-5}{x+1} \times \frac{x-2}{x-5}$
4. $\frac{2x}{2x+1} \times \frac{2x+1}{3x^2}$
5. $\frac{3x-1}{2x-3} \times \frac{4x-6}{3x-1}$
6. $\frac{3x-15}{2x+10} \times \frac{4x+20}{6x-30}$

Exercice 84 Effectuer les multiplications suivantes :

1. $\frac{2x-4}{x+3} \times \frac{x^2+6x+9}{x^2-4}$
2. $\frac{x^2-1}{x+3} \times \frac{x-3}{x^2-4x+3}$
3. $\frac{2x+3}{x-1} \times \frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-6}$
4. $\frac{2x^2+6x}{x+4} \times \frac{x^2+8x+16}{5x^2+15x}$
5. $\frac{x^2+x-6}{x^2-4x-5} \times \frac{x^2+3x+2}{x^2-6x+8}$
6. $\frac{2x^2-3x-2}{x^2-1} \times \frac{x-1}{2x+1}$

Exercice 85 Effectuer les divisions suivantes :

1. $\frac{x^2-1}{x+2} \div \frac{x-1}{3x+6}$
2. $\frac{x^2-x-2}{x^2-x-6} \div \frac{x+1}{x+2}$
3. $\frac{3x^2+8x-3}{x^2+x-6} \div \frac{2x+1}{x-2}$
4. $\frac{2x^2+2x}{x+5} \div \frac{2x^3-2x}{x^2+10x+25}$
5. $\frac{2x-4}{x^2+6x+9} \div \frac{x^2-4}{x^2-9}$
6. $\frac{x^4-1}{x^2+1} \div \frac{x^2-1}{x+2}$

Exercice 86 Effectuer les opérations suivantes :

1. $\frac{2}{x} + \frac{5}{y}$

2. $\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}$
3. $\frac{4x}{y^2} - \frac{4x-y}{xy}$
4. $\frac{2x+3y}{9x} + \frac{2x-3y}{6y}$

Exercice 87 Effectuer les opérations suivantes et simplifier les résultats :

1. $\frac{x}{x^2-9} - \frac{1}{2x-6}$
2. $\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-5}$
3. $\frac{1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{x-1}$
4. $\frac{2a}{3a-15} + \frac{4a}{2a-10}$

Exercice 88 Effectuer les additions et soustractions suivantes :

1. $\frac{2x+1}{2} - \frac{3x-1}{5}$
2. $\frac{5}{x-2} + \frac{3}{x+3}$
3. $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x+2}{x-1}$
4. $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3}$
5. $\frac{x+1}{x^2-4} - \frac{x-2}{x+2}$
6. $\frac{x+1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{x^2-1}$

Exercice 89 Effectuer les opérations suivantes puis simplifier les s'il y a lieu.

1. $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{x+6}{x^2-4}$
2. $\frac{5}{x^2-2x} + \frac{4}{x^2-4} - \frac{2}{x^2+2x}$

Exercice 90 Décomposer chacune des fractions algébriques suivantes en une somme de fractions partielles :

1. $\frac{1}{x^2+2x-3}$
2. $\frac{5x^2}{x^2-3x-4}$
3. $\frac{x^2+1}{x+1}$

Chapitre 1

Trinômes du second degré

1.1 Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

1.1.1 Transformation de l'équation

On remarque aisément que le polynôme P défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in \mathbb{R}^*$ peut se réécrire sous la forme canonique suivante :

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant**.

1.1.2 Résolution de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0.$$

Trois cas se présentent alors :

- $\boxed{\Delta < 0}$

  $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et l'équation

  $$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \text{ n'a pas de solution dans } \mathbb{R}}$$

- $\boxed{\Delta = 0}$

  $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$ donc l'équation

  $$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \text{ admet une solution double donnée par } x = -\frac{b}{2a}}$$

- $\boxed{\Delta > 0}$

  $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$ donc l'équation

  $$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \text{ admet deux racines distinctes } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Exercice 90 Résoudre

1. $2x^2 + x + 1 = 0$.
2. $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$.
3. $2x^2 + x - 3 = 0$.
4. $3x^2 + 5x - 1 = 0$.

1.2 Étude du signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

- $\boxed{\Delta < 0}$:
  $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a \times \{$nombre réel strictement positif$\}$ c'est-à-dire que

  $$\boxed{P(x) \text{ a le signe de "}a\text{"}}$$

  Exemple 1.2.1

  1. $P(x) = 2x^2 + x + 1$, $\Delta = -7 < 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) > 0$ (du signe de $a = 2$)
  2. $P(x) = -3x^2 + 2x - 5$, $\Delta = -56 < 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) < 0$ (du signe de $a = -3$)

- $\boxed{\Delta = 0}$:
  $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$, donc l'équation $ax^2+bx+c = 0$ admet une solution double notée $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. Comme $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, le signe de $P(x)$ est
  – pour $x = x_0$, $P(x) = 0$,
  – pour $x \neq x_0$, $P(x) = a \times \{$nombre réel strictement positif$\}$, c'est-à-dire que

  $$\boxed{P(x) \text{ a le signe de "}a\text{"}}$$

  Exemple 1.2.2 : On considère l'équation $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$.
  Le discriminant vaut $\Delta = 0$, la racine double de ce trinôme est égale à $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Par conséquent,

  $$2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 2\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

  – Pour $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$,
  – pour $x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 > 0$.

- $\boxed{\Delta > 0}$:
  L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. On a par conséquent la factorisation

  $$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

  qui permet d'obtenir le signe du trinôme :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$ax^2 + bx + c$		du signe de a	0	du signe de $-a$	0	du signe de a	

  – Pour $x < x_1$ ou $x > x_2$, $P(x)$ a le signe de "a",
  – pour $x_1 < x < x_2$, $P(x)$ a le signe de "$-a$",
  – pour $x = x_1$ ou $x = x_2$, $P(x) = 0$.

Exemple 1.2.3

1. $P(x) = 2x^2 + x - 3$, le discriminant vaut $\Delta = 25$, on trouve $x_1 = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = 1$. Ainsi,
$$2x^2 + x - 3 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-1).$$
   - Si $x < -\frac{3}{2}$ ou $x > 1$ alors $2x^2 + x - 3 > 0$.
   - Si $-\frac{3}{2} < x < 1$ alors $2x^2 + x - 3 < 0$.
2. $P(x) = -3x^2 + x + 1$, le discriminant vaut $\Delta = 13$, on trouve
$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{-6} = \frac{1+\sqrt{13}}{6} \text{ et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{-6} = \frac{1-\sqrt{13}}{6}.$$
On est donc en mesure de donner le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $P(x)$		$-$ (du signe de $a = -3$)	0	$+$ (du signe de $-a = 3$)	0	$-$ (du signe de $a = -3$)	

Remarque 1.2.1 On peut également obtenir le résultat de la façon suivante :
– pour x à l'extérieur des racines ($x < x_1$ ou $x > x_2$), $P(x)$ a le signe de "a",
– pour x à l'intérieur des racines ($x_1 < x < x_2$), $P(x)$ a le signe de "$-a$".

1.3 Application à la recherche du domaine de définition d'une fonction

On travaillera dans cette section exclusivement sur des exemples :

Exemple 1.3.1 Soit la fonction f définie par :
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+1}{2x^2+x-3} \end{array}.$$
L'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}/2x^2 + x - 3 \neq 0\}$ or l'équation $2x^2 + x - 3 = 0$ admet deux solutions distinctes $-\frac{3}{2}$ et 1. On en déduit que
$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$$

Exemple 1.3.2 Soit la fonction g définie par :
$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{2x^2+x-3} \end{array}.$$
L'ensemble de définition est $\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R}/2x^2 + x - 3 \geq 0\}$ or $2x^2 + x - 3 = (x-1)(2x+3)$, on obtient le signe de $2x^2 + x - 3$ à l'aide du tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2+x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\mathcal{D}_g = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup [1, +\infty[$.

Exemple 1.3.3 Soit la fonction h définie par

$$\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+1}{2x^4+x^2-3} \end{array}.$$

L'ensemble de définition de h est $\mathcal{D}_h = \{x \in \mathbb{R}/2x^4+x^2-3 \neq 0\}$. On cherche donc à résoudre l'équation $2x^4+x^2-3=0$. Cette équation est appelée équation bicarrée, on la résout à l'aide du changement de variable $u=x^2$

$$2x^4+x^2-3=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=x^2 \\ 2u^2+u-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2=u \\ u=1 \text{ ou } u=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right..$$

L'équation $x^2=-\dfrac{3}{2}$ n'a pas de solution et $x^2=1 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$. Finalement, $\mathcal{D}_h=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Remarque 1.3.1 On a la factorisation $2x^2+x-3=(x-1)(2x+3)$ donc

$$2x^4+x^2-3=(x^2-1)(2x^2+3)=(x-1)(x+1)(2x^2+3)$$

Exemple 1.3.4 Soit la fonction i définie par :

$$\begin{array}{rcl} i:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+5}{\sqrt{2x^3-3x^2-5x+6}} \end{array}.$$

L'ensemble de définition est $\mathcal{D}_i=\{x\in\mathbb{R}/2x^3-3x^2-5x+6>0\}$. On résout alors l'inéquation $2x^3-3x^2-5x+6>0$. 1 est une racine évidente, en effet $2(1)^3-3(1)^2-5(1)+6=0$ et on obtient une factorisation du polynôme $2x^3-3x^2-5x+6=(x-1)(ax^2+bx+c)$. Pour la détermination de a, b et c, il existe différentes méthodes.

- Par identification : $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)=2x^3-3x^2-5x+6=(x-1)(ax^2+bx+c)$. On développe et on obtient
$$\forall x\in\mathbb{R},\ 2x^3-3x^2-5x+6=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b-a=-3 \\ c-b=-5-c=6 \end{array}\right.$$
on résout le système et on obtient $a=2$, $b=-1$, $c=-6$ et $-c=6$ ce qui donne
$$2x^3-3x^2-5x+6=(x-1)(2x^2-x-6).$$
On calcule le discriminant pour $2x^2-x-6$, on trouve deux racines $-\dfrac{3}{2}$ et 2 et finalement,
$$2x^3-3x^2-5x+6=(x-1)(x-2)(2x+3)$$
- Par division euclidienne de deux polynômes :
$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
- & 2x^3 & - & 3x^2 & - & 5x & +\ 6 & x-1 \\ \cline{8-8}
 & (2x^3 & - & 2x^2) & & & & 2x^2-x-6 \\ \cline{2-7}
 - & & - & x^2 & - & 5x & +\ 6 & \\
 & & (- & x^2 & + & x) & & \\ \cline{3-7}
 & & - & & - & 6x & +\ 6 & \\
 & & & & (- & 6x & +\ 6) & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$
Ainsi, $2x^3-3x^2-5x+6=(x-1)(2x^2-x-6)=(x-1)(x-2)(2x+3)$.

On en déduit que $\mathcal{D}_i=\left]-\dfrac{3}{2},1\right[\cup]2,+\infty[$ grâce au tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

1.4 Remarques

Remarque 1.4.1 Si $ac < 0$ alors $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ et l'équation admet deux racines distinctes. La réciproque est fausse.

Exemple 1.4.1

1. $3x^2 + 2x + 1 = 0$, $ac = 3 > 0$, on ne peut conclure quant à l'existence des solutions mais $\Delta = -8 < 0$, l'équation n'a pas de racine.
2. $3x^2 + 12x + 5 = 0$, $ac = 15 > 0$, $\Delta = 84 > 0$, l'équation a deux racines distinctes.

Remarque 1.4.2 *Le discriminant réduit.* Si $b = 2b'$, on peut calculer le discriminant réduit $\Delta' = b'^2 - ac$ qui vérifie $\Delta = 4\Delta'$. Si

- $\Delta' < 0$, l'équation n'a pas de racine réelle,
- $\Delta' = 0$, l'équation admet une racine double $x_0 = -\dfrac{2b'}{2a} = -\dfrac{b'}{a}$,
- $\Delta' > 0$, l'équation admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-2b' - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \text{ et } x_2 = \frac{-2b' + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$$

Exemple 1.4.2 : Soit l'équation $2x^2+6x-1 = 0$. Comme $ac = -2 < 0$, l'équation a deux racines distinctes. Déterminons ces racines : on a $b = 6 = 2\times 3$ et $b' = 3$. Le discriminant réduit vaut $\Delta' = 3^2-(2\times(-1)) = 11$. On en déduit que

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{11}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{11}}{2}.$$

Remarque 1.4.3 *Somme et produit des racines.* Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $\Delta \geq 0$, l'équation admet deux racines distinctes ou confondues qui vérifient

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$
$$\boxed{P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$$

Remarque 1.4.4 *Détermination de deux nombres dont on connaît la somme et le produit.* On cherche à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & S \\ xy & = & P \end{array}\right.$. Ces nombres x et y, lorsqu'ils existent, sont les racines de l'équation

$$\boxed{X^2 - SX + P = 0}$$

Exemple 1.4.3 On considère le système $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & -3 \\ xy & = & -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

On résout l'équation $X^2 + 3X - \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2X^2 + 6X - 1 = 0$. Cette équation admet deux solutions

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{11}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{11}}{2}.$$

Exemple 1.4.4 On considère le système $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & -3 \\ xy & = & -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

On résout l'équation $X^2 - 2X + 15 = 0$, le discriminant vaut $\Delta = 4 - 60 = -56 < 0$ donc $S = \emptyset$. On ne peut pas déterminer deux nombres réels dont la somme est 2 et le produit 15.

1.5 Tableau récapitulatif

	$P(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$		
$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Équation $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$	Deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	Une racine double $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	Pas de racine dans $\mathbb{R}$
Somme et produit des racines	$S = -\frac{b}{a},\ p = \frac{c}{a}$	$S = -\frac{b}{a},\ p = \frac{c}{a}$	S et P n'existent pas dans $\mathbb{R}$
Factorisation de $P(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$	$P(x)$ se factorise : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$P(x)$ se factorise : $P(x) = a(x - x_1)^2$	$P(x)$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$
Signe de $P(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$	$P(x)$ change de signe :	$P(x)$ change de signe :	$P(x)$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$
Graphiquement $a > 0$			
$a < 0$			

1.6 Exercices

Exercice 91 **Forme canonique**

Mettre les polynômes suivants sous forme canonique et les factoriser si possible.

1. $P(x) = x^2 + 2x - 8$
2. $P(x) = x^2 - 3x + 5$

3. $P(x) = x^2 + x - 3$
4. $P(x) = 2x^2 - 3x - 5$
5. $P(x) = 9x^2 - 6x + 1$

Exercice 92 **Résolution d'équations simples**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $3x^2 - 2x - 16 = 0$
2. $-5x^2 + x - 1 = 0$
3. $-4x^2 + 20x - 25 = 0$
4. $\dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{3}x - 4 = 0$
5. $2x^2 + 3x = 1$
6. $7x^2 + 3x = 0$

Exercice 93 **Inéquations**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1. $x^2 - 5x + 6 > 0$
2. $x^2 + x + 1 > 0$
3. $2x^2 + 5x - 3 \leq 0$
4. $2x^2 + 9x - 5 \geq 0$
5. $-x^2 + 10x - 25 \geq 0$
6. $(x + 1)^2 + 2 \geq 0$
7. $-(4(x + 2)^2 + 3) > 0$

Exercice 94 **Utilisation de la somme et du produit**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $12x^2 - 8x - 15 = 0$ et vérifier le résultat grâce à la somme et au produit des racines.
2. On considère l'équation $12x^2 - 13x - 25 = 0$. Montrer que $x' = -1$ est racine de cette équation. En déduire l'autre solution en utilisant le produit des racines.

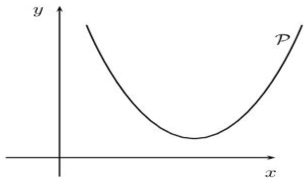
Exercice 95 **Position relative de deux courbes**
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ les courbes représentatives de la parabole d'équation $y = 3x^2$ et de la droite d'équation $y = 2x + 5$.

1. Étudier algébriquement la position relative de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$.
   On donnera en particulier les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec $\mathcal{D}$.
2. Vérifier graphiquement les résultats précédents.

Exercice 96 **Courbe représentative**
La parabole $\mathcal{P}$ dessinée ci-dessous représente l'une des quatre fonctions suivantes :

. $f_1 : x \mapsto x^2 - 4x + 4$

. $f_2 : x \mapsto -2x^2 + x + 5$



. $f_3 : x \mapsto x^2 - 4x + 5$

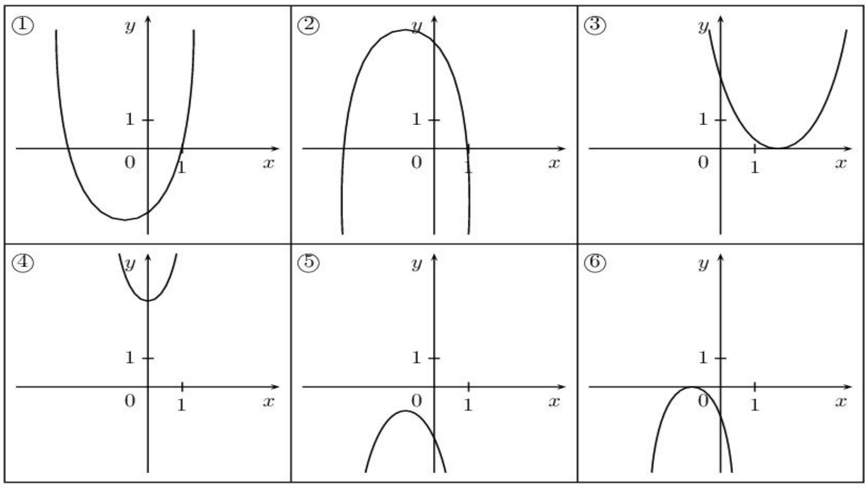
. $f_4 : x \mapsto -x^2 - 4x + 5$

Pour trouver de quelle fonction il s'agit, voici une démarche possible

1. La parabole est "tournée" vers le haut. Que peut-on en déduire ?
2. Quelle constatation graphique permet d'affirmer que $\Delta < 0$?
3. Parmi les quatre fonctions données, laquelle est représentée par la parabole $\mathcal{P}$?

Exercice 97 **Courbes et propriétés**

Voici les représentations graphiques de six fonctions polynômes du second degré :



À chacune de ces fonctions f est associé un tableau dans lequel figurent certaines propriétés ; ces tableaux sont donnés ci-dessous dans le désordre.

Retrouver pour chaque tableau la représentation graphique qui convient.

ⓐ	ⓑ	ⓒ
L'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution -1	L'inéquation $f(x) \leq 0$ n'a pas de solution	L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions : l'une d'elles est -2
ⓓ	ⓔ	ⓕ
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est l'intervalle $]-3, 1[$	L'équation $f(x) = 0$ a une seule solution et cette solution est positive	L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est l'ensemble des nombres réels

Exercice 98 **Taux équivalents**

Déterminer le taux semestriel à intérêts composés équivalent à un taux annuel de 10%.

Exercice 99 **Remise exceptionnelle**

Une personne bénéficie habituellement d'une remise de $x\%$.
Un jour de solde, on lui accorde une réduction supplémentaire de $y\%$.
Déterminer x et y sachant que la somme de ces remises est de 10% et que la personne a payé $901,60$ euros un article etiqueté 1000 euros. On sait que x est inférieur à y.

Exercice 100 **Taux de placement**

Deux capitaux dont la somme est 200000 euros sont placés à intérêts simples :
- le premier au taux de $t\%$ l'an,
- le second au taux de $(t+3)\%$ l'an.

Le premier capital rapporte annuellement 8400 euros et le second 8000 euros.

1. Calculer les deux taux de placement.
2. Déterminer les deux capitaux.

Exercice 101 **Quantité vendue, prix de vente - Bénéfice**

Dans un supermarché, un objet courant est vendu 25 euros et on enregistre une vente moyenne de 50 objets par jour.
Lorsque le prix de vente d'un de ces objets est de $24,5$ euros, la vente moyenne passe à 55 objets par jour. La quantité vendue augmente alors lorsque le prix décroît.
Les économistes estiment que la quantité q d'objets vendus est une fonction affine du prix de vente unitaire p, soit $q = ap + b$ (**1**) où a et b sont des nombres fixes à déterminer.

1. Vérifier que, d'après les données , a et b sont tels que $\begin{cases} 50 = 25a + b \\ 55 = 24,5a + b \end{cases}$
2. En déduire les valeurs a et b puis les reporter dans l'égalité (**1**).

L'un des soucis du gérant est de réaliser un bénéfice positif et si possible maximal. Le prix d'achat d'un objet est de 16 euros. On note B le bénéfice (positif ou négatif) réalisé lors de la vente de q objets.

3. Vérifier que $B = q(p - 16)$ puis exprimer B en fonction de p seulement.
4. Pour quelles valeurs de p a-t-on $B > 0$ (bénéfice positif) ?
5. Pour quelles valeurs de p a-t-on $B < 0$ (vente à perte) ?
6. Pour quelle valeur du prix p le bénéfice est-il maximal ?

Indication : Le sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ admet pour abscisse la demi-somme des racines du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exercice 102 **Durée de placement**

Une personne a placé 10000 euros au taux annuel de 8% pendant un certain nombre de mois puis a placé le capital et les intérêts acquis pendant la même durée au taux annuel de 12%. Elle possède à la fin 12650 euros. Déteminer la durée du premier placement.

Exercice 103 **Répartition de bénéfices**

Deux associés ont vendu leur société pour 12000 euros. Cette somme comprend leurs mises de fonds initiales et les bénéfices.
Les bénéfices sont proportionnels à leurs mises de fonds respectives. Le premier a retiré 1440 euros de bénéfice et on sait que la mise de fonds du second était de 3840 euros.
Déterminer la mise de fonds du premier et le bénéfice du second sachant que la mise du premier est supérieure à la mise du second.

Chapitre 2

Sens de variation. Dérivation

2.1 Introduction

Les économistes disposent aujourd'hui de moyens efficaces pour résoudre certains de leurs problèmes comme, par exemple, la recherche des minimums des coûts, des maximums de profit,... et en particulier la **dérivation**. Lorsque Newton et Leibniz jettent les bases du calcul différentiel, le premier pour résoudre des problèmes de vitesses et d'accélérations, ils ne se doutent pas que ce calcul servira dans des domaines autres que la physique.
Ce chapitre aborde la calcul des dérivées et l'application des dérivées à l'étude des fonctions et de leurs variations.

2.2 Notions préliminaires

2.2.1 Coefficient directeur d'une droite

Lorsque dans un repère, une droite D a pour équation

$$y = ax + b,\ a \neq 0$$

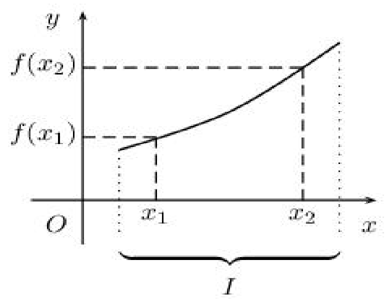
on dit que a est le **coefficient directeur** de la droite D.

Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont deux points de D tels que $x_A \neq x_B$,

$$\boxed{a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}}$$

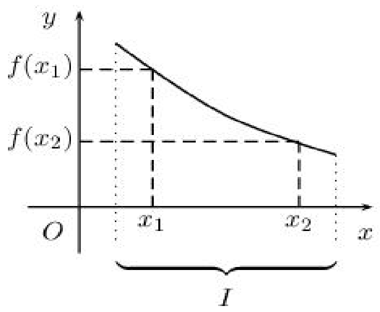
2.2.2 Fonctions monotones

1. Fonction strictement croissante, strictement décroissante.



Dire que f est **strictement croissante** sur l'intervalle I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I,

$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$



Dire que f est **strictement décroissante** sur l'intervalle I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I,

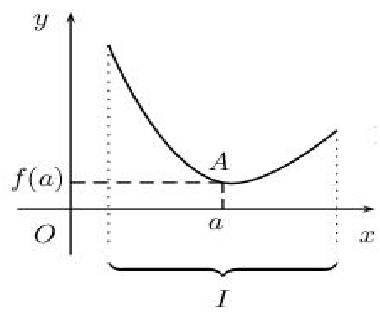
$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$$

2. Fonction croissante, décroissante.
   La définition d'une fonction **croissante** sur I (respectivement **décroissante**) est analogue à la définition d'une fonction strictement croissante (respectivement strictement décroissante) :

$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)(\text{ respectivement } f(x_1) \geq f(x_2))}$$

3. Fonction monotone.
   Une fonction **strictement monotone** sur I est une fonction qui est soit strictement croissante soit strictement décroissante sur I. On définit de manière analogue une fonction **monotone**.
4. Minimum - Maximum.
   Dire que $f(a)$ est le **minimum** de f sur l'intervalle I signifie que :

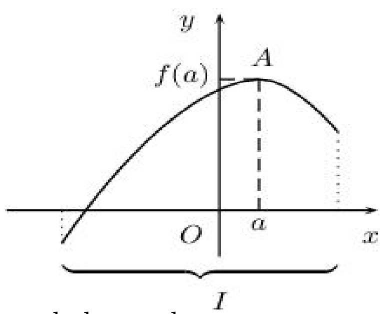
$$\boxed{\forall x \in I,\ f(a) \leq f(x)}$$



Le point $A(a, f(a))$ est le plus bas de la courbe.

Dire que $f(a)$ est le **maximum** de f sur l'intervalle I signifie que :

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(a) \geq f(x)}$$



Le point $A(a, f(a))$ est le plus haut de la courbe.

2.3 Taux de variation

Dans ce paragraphe et le suivant, f est une fonction définie au moins sur un intervalle I et a et $x = a+h$ sont deux points distincts de I ($h \neq 0$).

2.3.1 Définition

Le **taux de variation** de la fonction f entre a et x est le quotient

$$\boxed{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Avec $x = a + h$, ce quotient s'écrit également

$$\boxed{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

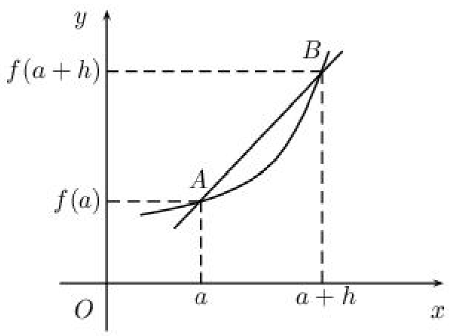
Exemple 2.3.1 Pour la fonction f définie par $f(x) = x^2$, le taux de variation entre a et $a + h$ est

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$$

2.3.2 Interprétation graphique

Notons A le point de coordonnées $(a, f(a))$ et B le point de coordonnées $(a + h, f(a + h))$. On sait que le coefficient directeur de la sécante (AB) est égal à $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ c'est-à-dire $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est donc égal au coefficient directeur de la sécante (AB).



2.4 Nombre dérivé et tangente

2.4.1 Nombre dérivé - Interprétation géométrique

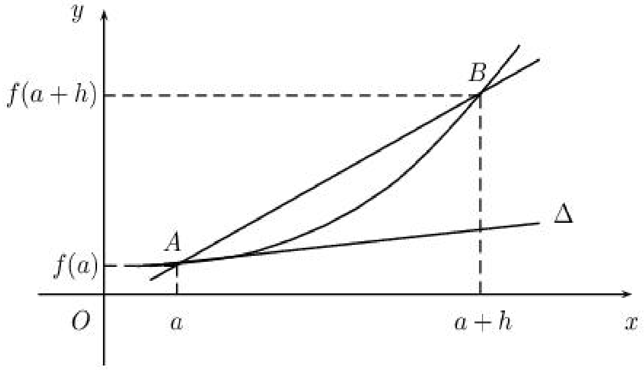
On pose $g(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Ce nombre est le taux de variation de f entre a et $a + h$.
Supposons que pour les valeurs de h de plus en plus proches de 0, les nombres $g(h)$ deviennent de plus en plus proches d'un nombre l. On dira alors que

f est **dérivable** en a et l est le **nombre dérivé** de f en a.

Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$ et est défini par

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in]-\infty, +\infty[}$$

Interprétation géométrique



$g(h)$ est le coefficient directeur de la sécante (AB). Lorsque h tend vers 0, B se rapproche de A et les coefficients directeurs des sécantes (AB) tendent vers l. La droite Δ qui passe par A et dont le coefficient directeur est $l = f'(a)$ est la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$.

2.4.2 Exemples

1. Soit $f(x) = 2x^2 + x + 1$, déterminons le nombre dérivé de f en 2.

   . $T(h) = \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{2(2+h)^2 + (2+h) + 1 - 11}{h} = 2h + 9$

   . $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \lim\limits_{h \to 0} (2h+9) = 9$

   donc f est dérivable en 2 et le nombre dérivé vaut $f'(2) = 9$.

   Interprétation géométrique : On connaît la pente de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x_0 = 2$. Déterminons son équation :

   $$y = f'(2)x + b = 9x + b$$

   Il devient très simple de déterminer b puisque la tangente passe par le point $(2, f(2))$. Ainsi

   $$f(2) = 9 \times 2 + b \Leftrightarrow 11 = 18 + b \Leftrightarrow b = -7$$

   Une équation de la tangente est par conséquent $y = 9x - 7$. Le coefficient directeur de la tangente est 9, un vecteur directeur est $\vec{v} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

2. Soit $f(x) = x^2 + |x|$, déterminons le nombre dérivé de f en 0.

   $T(h) = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{h^2 + |h|}{h}$

   . Pour $h > 0$, $T(h) = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{h^2 + h}{h} = h + 1$

   . $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = 1$

   f a un nombre dérivé à droite en 0 qui vaut 1. On le note $f'_d(0) = 1$.

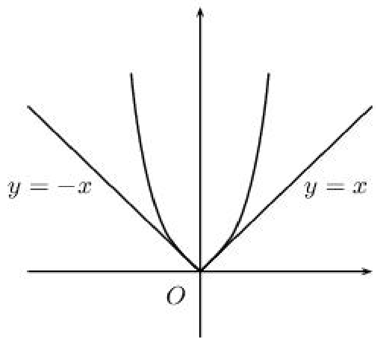
   . Pour $h < 0$, $T(h) = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{h^2 - h}{h} = h - 1$

   . $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = -1$

   f a un nombre dérivé à gauche en 0 qui vaut -1. On le note $f'_g(0) = -1$.

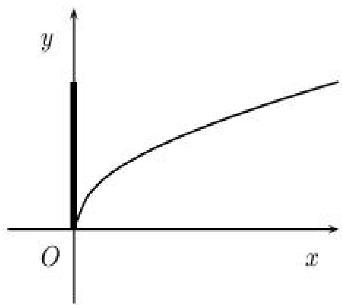
   Comme $f'_g(o) \neq f'_d(0)$, le rapport $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ n'a pas une unique limite lorsque h tend vers 0, f n'est donc pas dérivable au point 0.

Interprétation géométrique. f a un nombre dérivé à droite en $x = 0$ qui vaut 1 donc la courbe a une demi-tangente au point $O\begin{pmatrix} 0 \\ f(0) = 0 \end{pmatrix}$. Son équation est $y = f'(0)x + b$ mais cette demi-droite passe par le point O donc les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la demi-droite soit $0 = f'(0) \times 0 + b \Leftrightarrow b = 0$. Finalement la demi-droite admet pour équation $y = x$.
f admet également un nombre dérivé à gauche en 0 qui vaut -1. On montre comme précédemment que la courbe admet une demi-tangente à l'origine d'équation $y = -x$.



3. Soit $f(x) = \sqrt{x}$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$. Quel est le nombre dérivé de f à droite en 0 ?
. $T(h) = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h} - 0}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$
. $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$
$\lim\limits_{h \to 0} T(h)$ n'est pas un nombre réel, f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation géométrique. On sait que f n'est pas dérivable à droite en 0, cependant la courbe admet une demi-tangente à l'origine qui est parallèle à la droite des ordonnées.



2.4.3 Équation de la tangente

On a pu voir dans les exemples précédents que la détermination de l'équation de la tangente est souvent indispensable. Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point M_0 d'abscisse x_0 étant avant tout une droite de coefficient directeur $f'(x_0)$, son équation est donnée par :

$$(T)\ :\ y = f'(x_0)x + b$$

Comme cette droite passe par le point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, on a

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b \Leftrightarrow b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

Finalement, en remplaçant b par sa valeur dans l'équation de la tangente on obtient

$$(T)\ :\ y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

formule qui est généralement utilisée sous le format suivant :

$$\boxed{(T)\ :\ y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

2.5 La fonction dérivée

2.5.1 Définitions

Soit f une fonction ayant un nombre dérivé en tout point de l'intervalle $I =]a,b[$. On dit que f est **dérivable sur** $]a,b[$.
Si de plus f est dérivable à droite en a et à gauche en b, f est alors **dérivable sur** $[a,b]$.

Soit maintenant une fonction f dérivable sur un intervalle I. On appelle **fonction dérivée de f**, la fonction notée f' définie par

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f' : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{array}}$$

2.5.2 Exemple

Soit la fonction $f(x) = 2x^2 + 1$. On veut déterminer la fonction dérivée de f.

. $T(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{2(x+h)^2 + 1 - 2x^2 - 1}{h} = \dfrac{4xh + 2h^2}{h} = 4x + 2h$

. $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \lim\limits_{h \to 0} (4x + 2h) = 4x = f'(x)$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x$.

2.6 Les fonctions dérivées usuelles

2.6.1 Somme et produit de deux fonctions

Soient deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I alors

- $f = u + v$ est dérivable sur I et
$$\boxed{f' = u' + v'}$$
- $f = ku$ avec $k \in \mathbb{R}$ est dérivable sur I et
$$\boxed{f' = ku'}$$
- $f = uv$ est dérivable sur I et
$$\boxed{f' = u'v + v'u}$$
- $f = \dfrac{u}{v}$. Supposons de plus que $\forall x \in I$, $v(x) \neq 0$ alors f est dérivable sur I et
$$\boxed{f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}}$$
- $f = u^n$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$ est dérivable sur I et
$$\boxed{f' = nu'u^{n-1}}$$
- $f = \dfrac{1}{u}$. Supposons de plus que $\forall x \in I$, $u(x) \neq 0$ alors f est dérivable sur I et
$$\boxed{f' = \dfrac{-u'}{u^2}}$$
- $f = \sqrt{u}$. Supposons de plus que $\forall x \in I$, $u(x) > 0$ alors f est dérivable sur I et
$$\boxed{f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

- $f = u^n$ avec $n \in \mathbb{Q}^\star$. Supposons de plus que $\forall x \in I$, $u(x) > 0$ alors f est dérivable sur I et

$$\boxed{f' = nu'u^{n-1}}$$

2.6.2 Dérivées des fonctions usuelles

On a le tableau suivant :

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^\star$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^\star$	$\mathbb{R}^\star$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{+\star}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Q}^\star$	$\mathbb{R}^{+\star}$	$\mathbb{R}^{+\star}$	$f'(x) = nx^{n-1}$

2.6.3 Dérivées des fonctions logarithme népérien et exponentielle népérienne

1. Soit $f(x) = \ln x$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x}}$$

2. Soit $f(x) = e^x$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{f'(x) = e^x}$$

3. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et on suppose que $\forall x \in I$, $u(x) > 0$. La fonction $f = \ln u$ est dérivable sur I et

$$\boxed{f' = \frac{u'}{u}}$$

4. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, la fonction $f = e^u$ est dérivable sur I et

$$\boxed{f' = u'e^u}$$

5. Soit $f(x) = \ln|x|$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x}}$$

6. Soit u une fonction dérivable sur I. Supposons que $\forall x \in I$, $u(x) \neq 0$ alors la fonction $f = \ln|u|$ est dérivable sur I et

$$\boxed{f' = \frac{u'}{u}}$$

2.6.4 Exemples

1. Soit $f(x) = 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 - \sqrt{2}x^2 + 1$, f est une fonction polynomiale, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 2 \times 5 \times x^{5-1} + 3 \times 4 \times x^{4-1} - 2 \times 3 \times x^{3-1} - \sqrt{2} \times 2 \times x^{2-1} + 0$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = 10x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 2\sqrt{2}x$$

2. Soit $f(x) = (2x^2 + x + 1)(x^3 + 2x^2 - 5)$, on veut déterminer la dérivée d'une fonction produit de deux polynômes. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = (2x^2 + x + 1)'(x^3 + 2x^2 - 5) + (2x^2 + x + 1)(x^3 + 2x^2 - 5)'$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = (4x + 1)(x^3 + 2x^2 - 5) + (2x^2 + x + 1)(3x^2 + 4x)$$

3. Soit $f(x) = (2x^2 + x + 1)^2$, on veut déterminer la dérivée d'une fonction polynomiale élevée au carré. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 2(2x^2 + x + 1)'(2x^2 + x + 1)^{2-1}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = 2(4x + 1)(2x^2 + x + 1)$$

4. Soit $f(x) = (3x^4 - 5x^2 + 1)^3$, on veut déterminer la dérivée d'une fonction polynomiale élevée au cube. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 3(3x^4 - 5x^2 + 1)'(3x^4 - 5x^2 + 1)^{3-1}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = 3(12x^3 - 10x)(3x^4 - 5x^2 + 1)^2$$

5. Soit $f(x) = (2x + 1)(3x^2 + x)(4x^2 + x + 2)$, on veut déterminer la dérivée d'une fonction produit de trois polynômes.

   Remarque 2.6.1 Si u, v et w sont des fonctions dérivables sur I, $f = uvw$ est dérivable sur I et $f' = u'vw + uv'w + uvw'$.

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = (2x+1)'(3x^2+x)(4x^2+x+2) + (2x+1)(3x^2+x)'(4x^2+x+2) + (2x+1)(3x^2+x)(4x^2+x+2)'$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = 2(3x^2 + x)(4x^2 + x + 2) + (2x + 1)(6x + 1)(4x^2 + x + 2) + (2x + 1)(3x^2 + x)(8x + 1)$$

6. Soit $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3x - 2}$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$, on veut déterminer la dérivée d'une fonction rationnelle. On a $\forall x \in \mathcal{D}_f$,
$$f'(x) = \frac{(2x + 1)'(3x - 2) - (2x + 1)(3x - 2)'}{(3x - 2)^2}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2(3x - 2) - 3(2x + 1)}{(3x - 2)^2} = \frac{-7}{(3x - 2)^2}$$

7. Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{2x - 3}$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$. On a $\forall x \in \mathcal{D}_f$,
$$f'(x) = \frac{(x^2 + x + 1)'(2x - 3) - (x^2 + x + 1)(2x - 3)'}{(2x - 3)^2}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{(2x + 1)(2x - 3) - 2(x^2 + x + 1)}{(2x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - 5}{(2x - 3)^2}$$

8. Soit $f(x) = \dfrac{(2x+1)^3}{(2x-1)^2}$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. On a $\forall x \in \mathcal{D}_f$

$$f'(x) = \frac{((2x+1)^3)'(2x-1)^2 - (2x+1)^3((2x-1)^2)'}{((2x-1)^2)^2}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{3 \times 2(2x+1)^2(2x-1)^2 - 2 \times 2(2x+1)^3(2x-1)}{(2x-1)^4}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2(2x+1)^2(2x-1)[3(2x-1) - 2(2x+1)]}{(2x-1)^4}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2(2x+1)^2(2x-5)}{(2x-1)^3}$$

9. Soit $f(x) = \dfrac{3}{2x-1}$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. On a $\forall x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = \frac{-3(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{-6}{(2x-1)^2}$$

10. Soit $f(x) = \dfrac{5}{(4x-1)^3} = 5(4x-1)^{-3}$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.
On a $\forall x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = 5(-3)(4x-1)'(4x-1)^{-3-1} = (-15) \times 4(4x-1)^{-4} = \frac{-60}{(4x-1)^4}$$

11. Soit $f(x) = \sqrt{2x-1}$ avec $\mathcal{D}_f = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. Le domaine de dérivabilité de f' est $\mathcal{D}_{f'} = \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. On a $\forall x \in \mathcal{D}_{f'}$,

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

12. Soit $f(x) = 3\sqrt{2x^2+x+1}$. On calcule le discriminant du trinôme, $\Delta = -7 < 0$ ce qui signifie que $2x^2+x+1 > 0$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

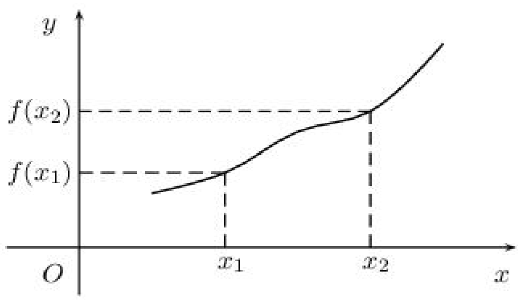
$$f'(x) = \frac{3(2x^2+x+1)'}{2\sqrt{2x^2+x+1}} = \frac{3(4x+1)}{2\sqrt{2x^2+x+1}}$$

2.7 Sens de dérivation d'une fonction

2.7.1 Fonction croissante sur un intervalle

Définition 2.7.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La fonction f est* ***strictement croissante*** *sur I si et seulement si*

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$

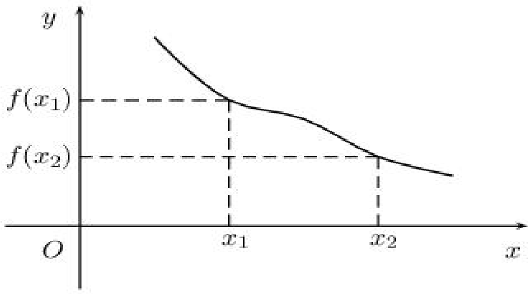


Théorème 2.7.1 *Soit f une fonction dérivable sur I. Si $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.*

2.7.2 Fonction décroissante sur un intervalle

Définition 2.7.2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La fonction f est* ***strictement décroissante*** *sur I si et seulement si*

$$\boxed{\forall(x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$$

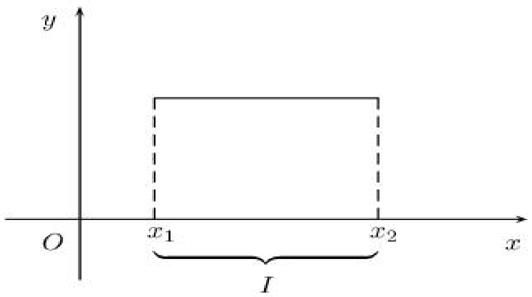


Théorème 2.7.2 *Soit f une fonction dérivable sur I. Si $\forall x \in I,\ f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.*

2.7.3 Fonction constante sur un intervalle

Définition 2.7.3 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La fonction f est* ***constante*** *sur I si et seulement si*

$$\boxed{\forall(x_1, x_2) \in I^2,\ f(x_1) = f(x_2)}$$



2.7.4 Exemple

Soit la fonction polynomiale f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 1$. On veut étudier le sens de variation de cette dernière.

Dérivons f :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

On peut en déduire ensuite, à l'aide d'un tableau de signes, le sens de variation de la fonction :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f		↗		↘		↗	

On remarque que la dérivée f' s'annule en -1 et 1, ce qui signifie qu'aux points $(-1, f(-1))$ et $(1, f(1))$, les tangentes à la courbe représentative de f sont parallèles à l'axe des abscisses (leur coefficient directeur est nul). On parle dans ce cas de tangentes horizontales.

2.8 Point d'inflexion - Concavité

2.8.1 Fonction dérivée seconde

Définition 2.8.1 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, supposons de plus que f' soit dérivable sur I, la fonction dérivée de f' est appelée* ***fonction dérivée seconde*** *de f et notée f''.*

Exemple 2.8.1 Soit la fonction $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$. Déterminons la dérivée seconde de f, on a $\forall x \in \mathbb{R}$,

. $f'(x) = 8x^3 + 6x$
. $f''(x) = 24x^2 + 6$

2.8.2 Position de la courbe et de la tangente

On a vu précédemment qu'une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 était

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

La position de la courbe par rapport à la tangente est précisée en étudiant le signe de la fonction g définie par

$$g(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$$

Étudions le signe de cette fonction. On dérive g une première fois

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

puis une seconde

$$g''(x) = f''(x).$$

Différents cas peuvent survenir :

- On considère un intervalle centré en x_0 et on suppose que $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $f''(x) > 0$.

x	$x_0 - \alpha$		x_0		$x_0 + \alpha$
signe de $g''(x)$			$+$		
variations de g'		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

À l'aide du tableau, on peut montrer que $\forall x \in I$,

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

– La courbe est située au dessus de la tangente.
– La courbe a sa concavité tournée du côté des y positifs,

$$\boxed{f \text{ est dite } \textbf{convexe} \text{ sur }]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[}$$

- On considère le même intervalle centré en x_0 que précédemment et on suppose cette fois-ci que $\forall x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, $f''(x) < 0$.

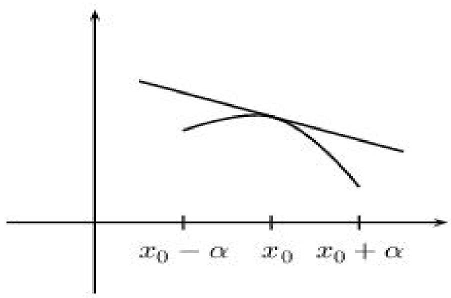
x	$x_0-\alpha$	x_0	$x_0+\alpha$
signe de $g''(x)$		$-$	
variations de g'	$\searrow$	0	$\searrow$
signe de $g'(x)$	$+$	0	$-$
variations de g	$\nearrow$	0	$\searrow$

À l'aide du tableau, on peut montrer que $\forall x \in I$,

$$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

– La courbe est située en dessous de la tangente.
– La courbe a sa concavité tournée du côté des y négatifs,

$$\boxed{f \text{ est dite } \textbf{concave} \text{ sur }]x_0-\alpha, x_0+\alpha[}$$



- On suppose que $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en x_0, il existe alors deux cas possibles.
  . 1er cas :

x	$x_0-\alpha$	x_0	$x_0+\alpha$
signe de $f''(x)$	$+$	0	$-$

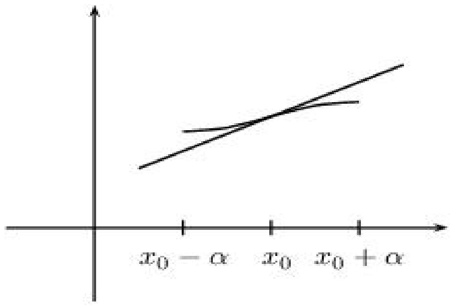
On a le tableau de signes et de variations suivant :

x	$x_0-\alpha$	x_0	$x_0+\alpha$
signe de $g''(x)$	$+$	0	$-$
variations de g'	$\nearrow$	0	$\searrow$
signe de $g'(x)$		$-$	
variations de g	$\searrow$	0	$\searrow$
signe de $g(x)$	$+$	0	$-$

On remarque donc que $g(x)$ change de signe en x_0. Par conséquent,

$$x < x_0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

– La courbe est située au dessus de la tangente.
– Au point d'abscisse x_0, la courbe traverse sa tangente, le point $(x_0, f(x_0))$ est appelé **point d'inflexion**. En x_0, la courbe change de concavité.



. 2ème cas :

x	$x_0 - \alpha$		x_0		$x_0 + \alpha$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

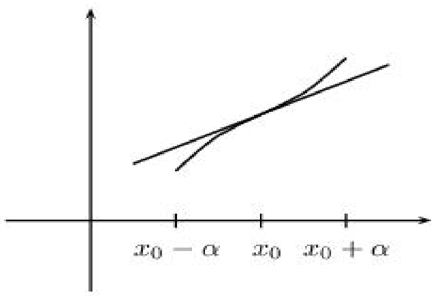
On a le tableau de signes et de variations suivant :

x	$x_0 - \alpha$		x_0		$x_0 + \alpha$
signe de $g''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de g'		↘	0	↗	
signe de $g'(x)$			$+$		
variations de g		↗	0	↗	
signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

On remarque donc que $g(x)$ change de signe en x_0. Par conséquent,

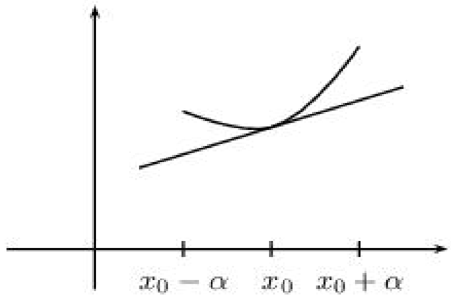
$$x < x_0 \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

– La courbe est située en dessous de la tangente.
– Au point d'abscisse x_0, la courbe traverse sa tangente, le point $(x_0, f(x_0))$ est appelé **point d'inflexion**. En x_0, la courbe change de concavité.



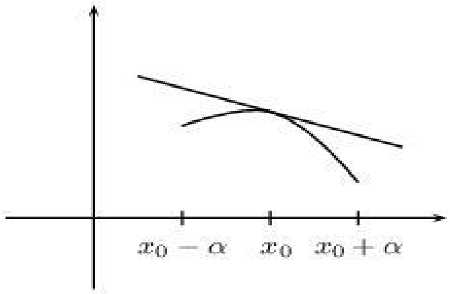
Conclusion

- $\forall x \in I,\ f''(x) > 0$



La courbe a sa concavité tournée du côté des y positifs, f est convexe sur I, la courbe est située au dessus de la tangente en chacun des points de I.

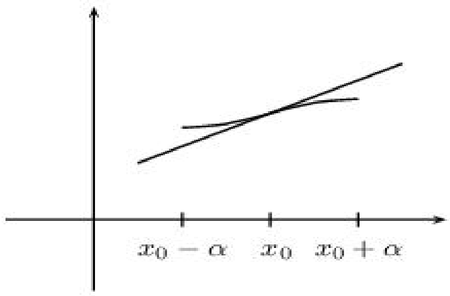
- $\forall x \in I,\ f''(x) < 0$



La courbe a sa concavité tournée du côté des y négatifs, f est concave sur I, la courbe est située en dessous de la tangente en chacun des points de I.

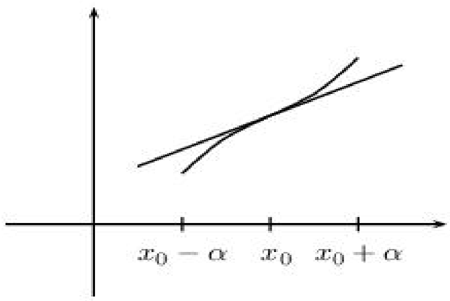
-

x	$x_0 - \alpha$		x_0		$x_0 + \alpha$
signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	



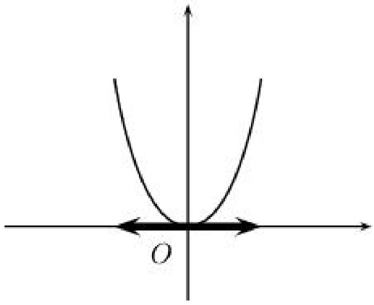
-

x	$x_0 - \alpha$		x_0		$x_0 + \alpha$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	



La courbe traverse sa tangente en x_0, au point $(x_0, f(x_0))$ il y a changement de concavité. Ce point $(x_0, f(x_0))$ est appelé point d'inflexion.

Remarque 2.8.1 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^4$. Les dérivées première et seconde sont respectivement $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2$. Comme $f''(0) = 0$, la dérivée seconde s'annule en $x = 0$ mais $\forall x \in \mathbb{R}^\star$, $f''(x) > 0$. $f''(x)$ ne change pas de signe en $x = 0$, l'origine n'est pas un point d'inflexion.
$\forall x \in \mathbb{R}^\star$, $f''(x) > 0$, f est convexe.



2.9 Exercices

Exercice 105 Dériver les fonctions définies ci-dessous :

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$
3. $h(x) = \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$
4. $k(x) = \dfrac{x+5}{x^2+1}$

Exercice 106 Dériver les fonctions définies ci-dessous :

1. $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$
2. $g(x) = (2x+3)(3x-7)$
3. $h(x) = \dfrac{2x+4}{3x-1}$ pour $x \neq \dfrac{1}{3}$
4. $k(x) = (2x^2 + 3x + 1)^5$

Exercice 107 On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 1$. On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique. On considère également la fonction g définie par $g(x) = 3 - x$. On note D sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = 2$.
3. Résoudre, par calcul, l'équation $g(x) = f(x)$.
4. Préciser les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et D.
5. Tracer sur un même repère les droites T, D et la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 108 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Soit A le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A.
3. Soit B le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathcal{C}_f$ en B.

4. Tracer sur un même repère T_A, T_B et $\mathcal{C}_f$.

Exercice 109 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x,\ g(x) = x^3 - 3x.$$

1. Étude de f.
   (a) Calculer la dérivée f' de f.
   (b) Étudier le signe de la dérivée f'.
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
2. Étude de g.
   (a) Calculer la dérivée g' de g.
   (b) Étudier le signe de la dérivée g'.
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction g.
3. Comparaison des deux fonctions.
   (a) Graphiques.
      i. Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentant les fonctions f et g (on se limitera à l'intervalle $[-2; 2]$ et on prendra un pas de $0,5$).
      ii. À l'aide du graphique, déterminer le nombre de points d'intersections entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et leurs coordonnées.
   (b) Pour avoir plus de précision, on se propose de retrouver ces résultats par calcul :
      i. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
      ii. En déduire, par calcul, les coordonnées des points A et B d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 110 On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que f est une fonction impaire.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f.
3. Quel est le signe du dénominateur de $f'(x)$?
4. Résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum.
6. Tracer (soigneusement) la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-4; 4]$.

Exercice 111 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1,\ g(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

1. Étude de f.
   (a) Calculer la dérivée f' de f.
   (b) Étudier le signe de la dérivée f'.
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
2. Étude de g.
   (a) Calculer la dérivée g' de g.
   (b) Étudier le signe de la dérivée g'.
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction g.

3. Comparaison des deux fonctions.
   (a) Graphiques.
      i. Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentant les fonctions f et g (on se limitera à l'intervalle $[-3;5]$ et on prendra un pas de $0,25$).
      ii. À l'aide du graphique, déterminer le nombre de point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Quelles sont leurs coordonnées ?
   (b) Pour avoir plus de précision, on se propose de retrouver ces résultats par calcul.
      i. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
      ii. En déduire, par calcul, les coordonnées du point d'intersection A entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 112 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Étudier le signe de la dérivée f'.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction f (on précisera les éventuels extrémums).
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f sur l'intervalle $[-1;3]$.
5. Déterminer, par un calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

Exercice 113

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 114 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 3$. On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. Tracer T et $\mathcal{C}_f$ (dans un même repère).
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2;3]$
6. Donner une valeur approchée de α, par défaut, à 10^{-1} près.

Exercice 115 On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.

1. Déterminer ses dimensions (Longueur L et largeur ℓ) sachant que son aire S est égale à $\dfrac{3}{4}$ cm^2.
2. On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.
   (a) Exprimer S en fonction de ℓ.
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$. Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f. Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$.
   (c) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

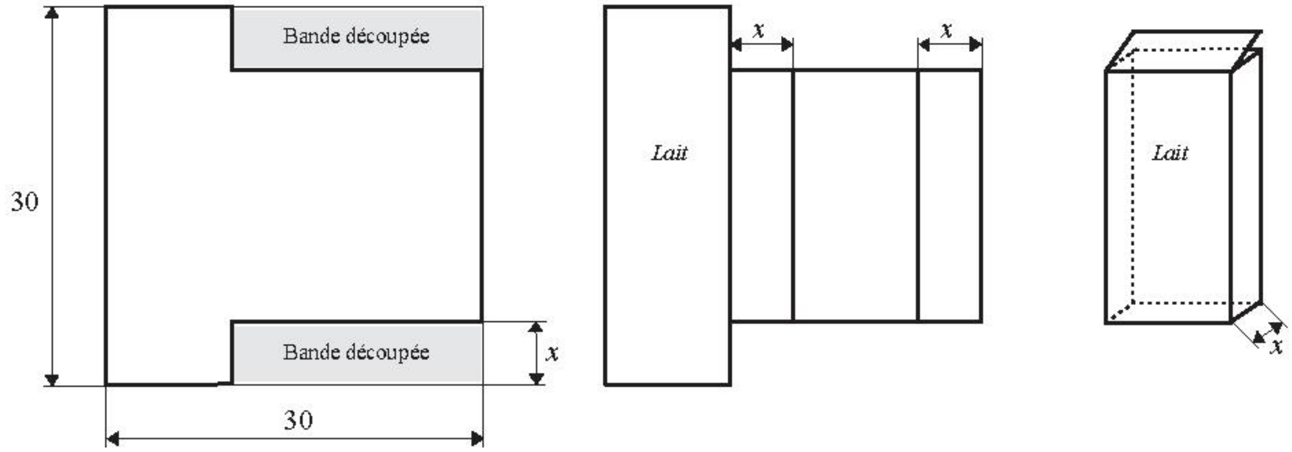
Exercice 116

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.
   (a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;20]$. Dresser le tableau de variations de f.
   (b) Déterminer une équation de la tangente D à la représentation graphique de f au point d'abscisse 0.

(c) Déterminer, par calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

(d) Tracer D et la représentation graphique de f pour $x \in [0; 20]$.

2. Un fabriquant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée.



Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées. On suppose que $0 < x < 15$.

(a) Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

(b) Pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est-il maximal ? Préciser la valeur de ce volume maximal en litres.

Exercice 117 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - x + 2$ sur l'intervalle $[-2; 2]$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Donner (en justifiant) l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
2. Tracer (dans un même repère) $\mathcal{C}_f$ et cette tangente sur l'intervalle $[-2; 2]$.

Exercice 118 Soit $\mathcal{P}$ la parabole définie par la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$. Calculer les coordonnées de son sommet S.

Exercice 119 Un camion doit faire un trajet de 150 km. Sa consommation de gasoil est de $6 + \dfrac{\nu^2}{300}$ litres par heure, où ν désigne sa vitesse en km/h. Le prix du gasoil est de 0,9 euros le litre, et on paie le chauffeur 12 euros par heure.

1. Soit t la durée du trajet en heure. Exprimer t en fonction de la vitesse ν.
2. Calculer le prix de revient $P(\nu)$ du trajet en fonction de ν.
3. Quel doit être la vitesse ν du camion pour que le prix de revient $P(\nu)$ de la course soit minimal ?

Exercice 120 Le but de cet exercice est de calculer la limite suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{2005} - 1}{h}.$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^{2005}$.

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f. Puis calculer $f'(0)$.
2. Calculer l'accroissement moyen de la fonction f entre 0 et h. En déduire la limite ci-dessus.

Exercice 121 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x + 1$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Donner (en justifiant) l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
2. Tracer (dans un même repère) $\mathcal{C}_f$ et cette tangente sur l'intervalle $[-1; 1,5]$.

Exercice 122

1. Dériver les fonctions f et g définies ci-dessous :

$$f(x) = \frac{x}{x + \sqrt{x}} \text{ sur }]0; +\infty[, \quad g(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^3 \text{ sur } \mathbb{R}\backslash\{-1\}.$$

2. Calculer $f'(16)$ et $g'(2)$.

Exercice 123 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x}$.

1. Calculer la dérivée f' puis étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sur $[-4; 0[\cup]0; 4]$.

Exercice 124 Soit C la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 2}, \ a, b \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Déterminer a et b tels que la droite d'équation $y = 8$ soit tangente à C au point d'abscisse 3.
3. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \ \lim_{x\to-\infty} f(x), \ \lim_{x\to 2^-} f(x), \ \lim_{x\to 2^+} f(x).$$

4. Déduire de la question 3. que C admet une asymptote dont on précisera une équation.
5. Déterminer l'abscisse de l'autre point de C où la tangente est horizontale.

Exercice 125

1. Factoriser le polynôme $P(x) = x^2 + 2x - 3$.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 1 \text{ et } g(x) = x^3 - 3x + 1.$$

2. Étudier la parité des fonctions f et g.
3. Étudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions f et g.
4. Calculer les dérivées f' et g'. Étudier leur signe.
5. Dresser les tableaux de variation des fonctions f et g.
6. Tracer les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g (on se limitera à l'intervalle $[-3; 3]$).
7. Résoudre, par calcul, l'inéquation $f(x) \leq g(x)$. (On pourra utiliser la question 1.)

Exercice 126 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}.$$

1. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$, $+\infty$, 2^- et 2^+. Préciser les éventuelles asymptotes horizontales et verticales.
2. Calculer la dérivée f' et étudier son signe.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique D.
   (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que :
   $$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}.$$
   (b) En déduire que la droite D d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (c) Tracer $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

Exercice 127 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \frac{1}{x} + 2$.

1. Montrer que f est dérivable en 2.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentant f au point d'abscisse 2.

Exercice 128 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$ par $f(x) = \frac{-3}{x+4} + 2$ On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentant la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, -4^-, -4^+. Préciser les équations des éventuelles asymptotes.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f et préciser son signe.
3. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f (on n'oubliera pas d'y reporter les limites calculées à la question 1. ainsi que la valeur interdite).
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ avec ses éventuelles asymptotes. (Conseil : tracer d'abord les asymptotes, s'il y en a ...)

Exercice 129 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \frac{-2}{x-1} + 3$. On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les limites de f en 1^- et en 1^+.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f. Quel est son signe ?
4. Dresser le tableau de variation (complet) de la fonction f.
5. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $x = \frac{1}{2}$.
6. Sur une feuille séparée, tracer T, $\mathcal{C}_f$ (Unités graphiques : au moins 2 cm par unité sur chaque axe)
7. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 1$.

Chapitre 3

Le logarithme et l'exponentielle

3.1 Le logarithme népérien

3.1.1 Présentation de la fonction

Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur I. Mais ce n'est pas parce qu'une fonction admet des primitives que l'on sait pour autant les écrire simplement.
Ainsi la fonction "inverse" définie sur $]0,+\infty[$ par $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet en effet des primitives mais celles-ci ne peuvent s'exprimer à l'aide de fonctions déja connues. L'une de ces primitives est la fonction *logarithme népérien* de Neper, mathématicien écossais (1550-1617), inventeur de ce logarithme.

Définition 3.1.1 *La fonction inverse* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *admet des primitives sur* $]0,+\infty[$ *qui s'écrivent :*

$$\boxed{\ln(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}}$$

La fonction logarithme népérien est caractérisée par 3 propriétés.

Proposition 3.1.1

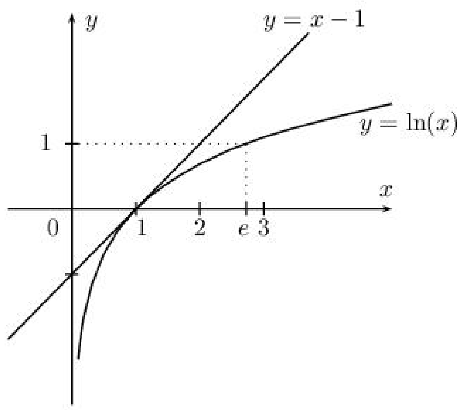
- *L'ensemble de définition de "*$\ln$*" est* $]0,+\infty[$.
- $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ (\ln(x))' = \frac{1}{x}$.
- $\ln(1) = 0$.

Pour étudier les variations de $x \mapsto \ln(x)$, il suffit d'étudier le signe de la dérivée de cette fonction c'est-à-dire le signe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est strictement positive sur $]0,+\infty[$. On a le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
signe de $\frac{1}{x}$		+	
variations de ln	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

Proposition 3.1.2

- *La fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$.
- $\lim_{x \mapsto \infty} \ln x = +\infty$ *et* $\lim_{x \mapsto 0} \ln x = -\infty$



Afin de tracer cette représentation, il est à noter que

– L'axe des ordonnées est *asymptote* à la courbe, c'est-à-dire que $\lim_{x\to 0} \ln(x) = +\infty$

Rappel :	Si f admet une limite infine en a, alors la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale* à $\mathcal{C}$. Si f admet une limite finie l en $+\infty$ ou en $-\infty$, alors la droite d'équation $y = l$ est *asymptote horizontale* à $\mathcal{C}$.

– La tangente au point $(1, 0)$ a pour coefficient directeur 1. En effet,

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = \ln(1) + \frac{1}{(1)}(x_1) \Leftrightarrow y = x - 1$$

On déduit de la croissance stricte de la fonction ln les propriétés ci-dessous :

Propriété 3.1.1 $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+\star}$,

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$

En particulier, si $x > 1$ alors $\ln(x) > \ln(1) \Leftrightarrow \ln(x) > 0$
si $0 < x < 1$ alors $\ln(x) < \ln(1) \Leftrightarrow \ln(x) < 0$.

La fonction ln est dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. De plus,

$$\boxed{\ln(1) = 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty}.$$

La fonction ln prend donc une fois et une seule toute valeur supérieure à 0. Donc le nombre 1 a un antécédent unique pour la fonction ln, que l'on note e :

$$\boxed{\ln(e) = 1 \text{ et } e \simeq 2,71828}$$

3.1.2 Logarithme d'une fonction

On étudie dans cette partie les fonctions

$$x \mapsto \ln[u(x)]$$

qui ne sont définies que si $u(x)$ est strictement positif.

On considère l'exemple suivant.

Exemple 3.1.1 Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$.

- Quand $x \to +\infty$, $1 + \dfrac{2}{x} \to 1$ or $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
- Quand $x \to 0$, $1 + \dfrac{2}{x} \to +\infty$ or $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Théorème 3.1.1 *Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. La fonction* $\ln(u)$ *est dérivable sur I et*

$$\boxed{(ln(u))' = \frac{u'}{u}}$$

Exemple 3.1.2 Soit f définie sur $\left]\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = \ln(2x-3)$. Ici, $u(x) = 2x - 3$ et $u'(x) = 2$ donc $f'(x) = \dfrac{2}{2x-3}$.

Théorème 3.1.2 *Soit une fonction u dérivable et strictement positive sur I. La fonction $f = \dfrac{u'}{u}$ admet pour primitives sur I les fonctions*

$$\boxed{x \mapsto \ln[u(x)] + k \text{ où } k \in \mathbb{R}}.$$

Théorème 3.1.3 *Pour tous réels a et b strictement positifs,*

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + ln(b)}$$

On déduit de cette formule les propriétés suivantes :

Propriété 3.1.2

- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n \ln(a)$,
  $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2} \ln(a)$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln(1) - \ln(b) = -\ln(b)$,
  $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

3.1.3 Logarithme décimal et applications

Par définition, pour tout réel $x > 0$,

$$\boxed{\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}}$$

La fonction "log", définie sur $]0, +\infty[$, est la fonction *logarithme décimal*, ou de base 10.

Exemple 3.1.3 On se donne quelques valeurs de x ainsi que les valeurs obtenues pour $\ln(x)$, $\log(x)$:

x	10^{-1}	1	10	100	10^3	10^n
$\ln(x)$	$-2,303$	0	$2,303$	$4,605$	$6,908$	$2,303n$
$\log(x)$	-1	0	1	2	3	n

Étudions maintenant les variations de la fonction log : $\forall x \in]0;+\infty[$,

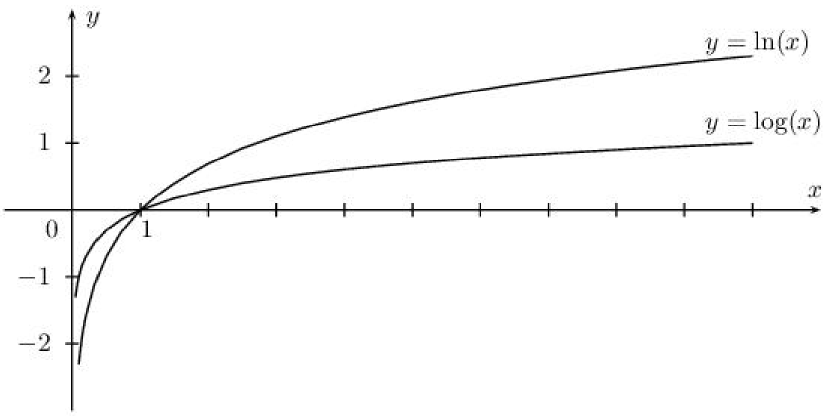
$$\log(x)' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(10)}\right)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln(10)}$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
signe de $\log(x)'$			+		
variations de log	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Il est évident que les variations de la fonction log sont identiques à celles de ln puisque les deux fonctions sont proportionnelles, c'est-à-dire égales à un facteur multiplicatif près.

Comparons maintenant les représentations graphiques de ces deux fonctions :



Intéressons nous maintenant à la notion de repère semi-logarithmique.
Sur une feuille de papier millimétré, on trace les axes $[0,x)$ et $[0,y)$. On gradue l'axe $[0,x)$ de façon régulière. On gradue l'axe $[0,y)$ en plaçant les traits 1, 2,...,10,...,100,...,1000,... tels que les distances à l'origine soient respectivement log(1), log(2),...,log(10),...,log(100),...,log(1000),... (voir figure page suivante).

On dira qu'une échelle logarithmique est un axe gradué proportionnellement aux logarithmes des abscisses. Cet axe commence à la graduation 1 et non pas à 0 !

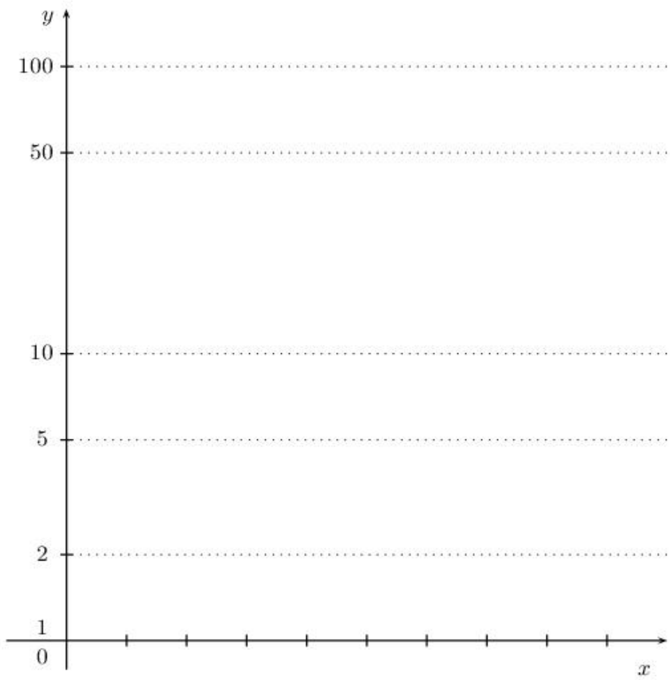
Remarque 3.1.1 Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle. Tracer la représentation graphique de $\log(f)$ dans un repère orthonormal revient à tracer celle de f dans un repère semi-logarithmique.

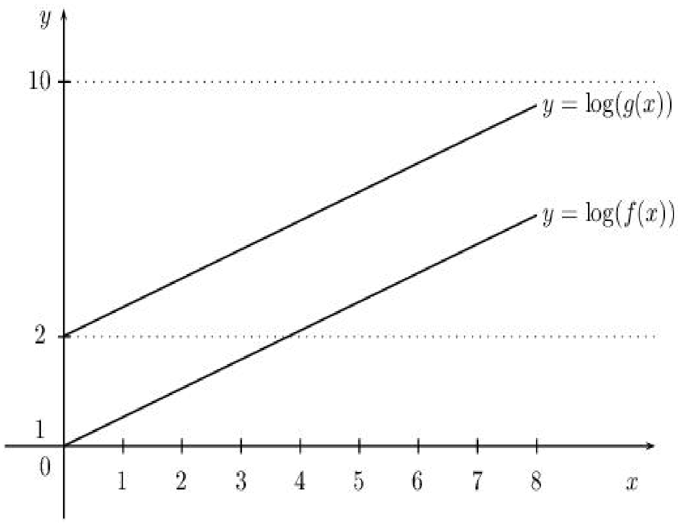
Exemple 3.1.4 Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1,2^x \text{ et } g(x) = 2 \times 1,2^x$$

On représente ces fonctions dans un repère semi-logarithmique, à l'aide d'un tableau de valeurs (à 0,1 près) :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	1,2	1,4	1,7	2,1	2,5	3	3,6	4,3
$g(x)$	2	2,4	2,9	3,5	4,1	5	6	7,2	8,6





On constate sur le graphique que les points obtenus sont alignés sur deux droites parallèles.
D'une manière plus générale, la représentation graphique d'une fonction *exponentielle* dans un repère semi-logarithmique est une droite. En effet, si $f(x) = a^x$, $\log(f(x)) = \log(a^x) = x\log(a)$. Cela signifie que la fonction f est représentée par la droite d'équation $y = (\log(a))x$ de coefficient directeur $\log(a)$. Si $g(x) = ma^x$ (où $m > 0$) alors $\log(g(x)) = \log(ma^x) = (\log(a))x + \log(m)$. La fonction g est donc représentée graphiquement par une droite parallèle à la droite d'équation $y = x\log(a)$.

3.2 L'exponentielle

3.2.1 Présentation de la fonction

On a vu dans la partie précédente que pour tout nombre réel x, l'équation $\ln(y) = x$, d'inconnue y, admet une solution unique strictement positive. On note cette solution $\exp(x)$. On définit ainsi une fonction appelée *fonction exponentielle de base e*, notée exp, qui à tout nombre réel associe un nombre réel strictement positif.

Définition 3.2.1 *La fonction exponentielle de base e, notée* exp, *est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.*

Ainsi, on a $\ln(1) = 0 \Leftrightarrow \exp(0) = 1$ ou $\ln(e) = 1 \Leftrightarrow \exp(1) = e$.

Définition 3.2.2 *Pour tout réel x, on pose* $\exp(x) = e^x$.

En effet, on sait que pour tout entier relatif $n \in \mathbb{N}$, $\ln(e^n) = n$. D'après la définition de la fonction exponentielle, on a $e^n = \exp(n)$. Il convient alors d'étendre cette notation à tout réel x.

Exemple 3.2.1 $\exp(0) = e^0 = 1$, $\exp(1) = e^1 = e$.

Propriété 3.2.1 *Pour tout réel x et pour tout réel strictement positif y,*

- $y = e^x$ *équivaut à* $x = \ln(y)$,
- $\ln(e^x) = x$,
- $e^{\ln(y)} = y$.

3.2.2 Formules fondamentales

Les propriétés algébriques de la fonction exp se déduisent de celles de la fonction ln. On les retient en utilisant les propriétés des exposants, ce qui montre l'intérêt de la notation e^x.

Propriété 3.2.2 *Pour tous réels a et b et pour tout entier relatif p,*

- $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^p = e^{ap}$

On déduit de ces propriétés quelques résultats particuliers pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $e^x \times e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$,
- $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$,
- $(e^x)^2 = e^{2x}$.

3.2.3 Étude de la fonction exponentielle

On admet que la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on notera $\exp'$ sa dérivée. Pour tout réel x, $\ln \circ \exp(x) = x$. On dérive les deux membres de cette égalité, ce qui donne

$$(\ln \circ \exp)'(x) = 1$$

On a vu dans la partie précédente que si u est une fonction strictement positive et dérivable, on a $(\ln \circ u)' = \dfrac{u'}{u}$. On applique donc cette formule à $u = \exp$ et on obtient

$$\frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1$$

ce qui implique que $(\exp(x))' = \exp(x)$.

Propriété 3.2.3 *La fonction* exp *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout réel x,*

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

La fonction exp *est égale à sa dérivée.*

On admettra les limites suivantes :

Propriété 3.2.4

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

La fonction exp étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$ $+\infty$
signe de $\exp(x)$	$+$
variations de exp	$0 \nearrow +\infty$

Les variations de la fonction exp permettent d'écrire les propriétés :

- $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$,
- $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.

Dans un repère orthonormal, les représentations graphiques des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (voir page suivante).

3.2.4 Fonctions du type e^u

Soit u une fonction définie sur un intervalle I. Les théorèmes sur les limites d'une fonction composée permettent de calculer les limites de la fonction e^u.

Exemple 3.2.2

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^2+1} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{3-x} = 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$.

Si on suppose que la fonction u est définie et dérivable sur un intervalle I, d'après le théorème sur les fonctions composées, la fonction f définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée f' est définie sur I par $f'(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$.

Théorème 3.2.1 *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et*

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

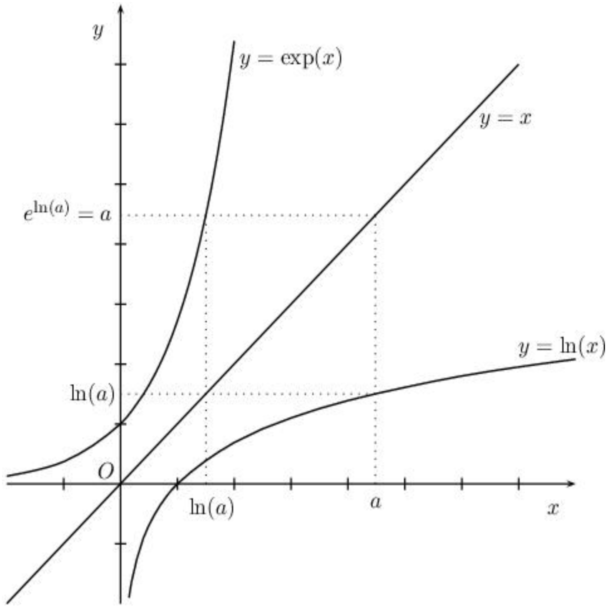
Exemple 3.2.3 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$. On pose $u(x) = x^2 + 1$. Cette fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 2x$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$.

On a le résultat suivant :

Théorème 3.2.2 *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction f définie sur I par $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ admet des primitives F sur I définies par*

$$F(x) = e^{u(x)} + c \text{ où } c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.4 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{2x-3}$. On pose $u(x) = 2x - 3$. Cette fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 2$. On remarque que $f(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$. Or $u'e^u$ est la dérivée de e^u donc les primitives de f sont définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^{2x-3} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.



3.2.5 Fonctions exponentielles de base a

Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout entier relatif n, on a $e^{n\ln(a)} = (e^{\ln(a)})^n = a^n$ ce qui nous conduit à poser la définition suivante :

Définition 3.2.3 *Pour tout réel a strictement positif et pour tout réel x,*

$$a^x = e^{x\ln(a)}$$

Cette définition permet ainsi d'élever a à une puissance réelle quelconque.

Exemple 3.2.5 $a^{-3,5} = e^{-3,5\ln(a)}$.

Remarque 3.2.1 $\ln(a^x) = \ln(e^{x\ln(a)}) = x\ln(a)$.

Définition 3.2.4 *Soit a un réel strictement positif. On appelle exponentielle de base a la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = a^x = e^{x\ln(a)}.$$

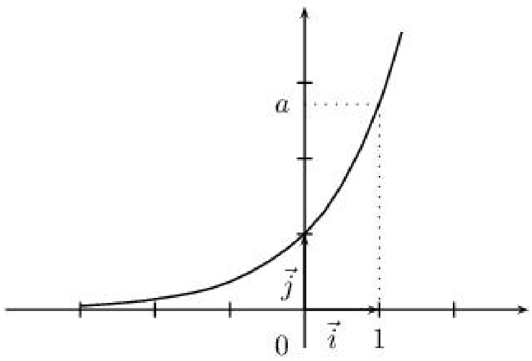
Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle de base a se déduisent immédiatement de celles de la fonction exp (exponentielle de base e).

Propriété 3.2.5 *Pour $a > 0$ et pour tous réels b et c,*
- $a^b \times a^c = a^{b+c}$,
- $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$,
- $a^{b-c} = \dfrac{a^b}{a^c}$,
- $(a^b)^c = a^{bc}$

Soient a un réel strictement positif et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$. On supposera dans la suite que $a \neq 1$. On a $f(x) = e^{x\ln(a)}$ donc f est de la forme e^u avec $u(x) = x\ln(a)$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = \ln(a)$. Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \ln(a) \times e^{x\ln(a)} = \ln(a) \times a^x$. Pour tout réel x, on a $e^{x\ln(a)}$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\ln(a)$, ce qui nous conduit à examiner deux cas :

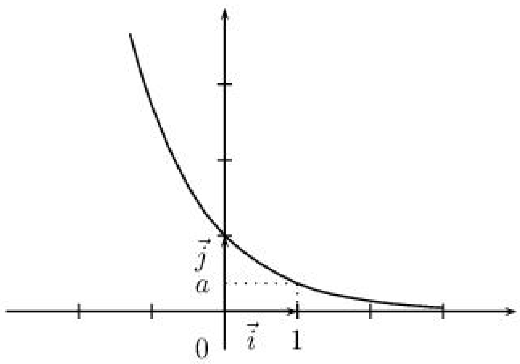
– Premier cas : $a > 1$ (ou $\ln(a) > 0$).
Pour tout réel x, $f'(x) > 0$ donc f est croissante. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(a) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x\ln(a)} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\ln(a) = -\infty$ soit $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x\ln(a)} = 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de a^x	0 $\nearrow$	$+\infty$



– Second cas : $a < 1$ (ou $\ln(a) < 0$).
Pour tout réel x, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(a) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x\ln(a)} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\ln(a) = +\infty$ soit $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x\ln(a)} = +\infty$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de a^x	$+\infty$ $\searrow$	0



3.3 Exercices

Exercice 130

1. Calculer à l'aide de la machine les logarithmes suivants :

$$\log(1270), \log(127), \log(12,7), \log(1,27), \log(0,127), \log(0,0127).$$

2. Que constate t-on ?
3. Par quelle propriété des logarithmes peut-on l'expliquer ?

Exercice 131 Mettre sous la forme $m\log(a) + n\log(b)$:

1. $\log(a^2b^3)$
2. $\log\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$
3. $\log\left(\frac{a\sqrt{d}}{c\sqrt[3]{b}}\right)$

Exercice 132 Évaluer sans la machine :

$$\ln(e),\ \ln(1),\ \ln(e^7),\ \ln\left(\frac{1}{e}\right),\ \ln(\sqrt{e}),\ \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

Exercice 133 Résoudre les équations :

1. $\log(x+1) - \log(3) = \log(2x-3) + \log(7)$,
2. $\log_3(2x-5) + \log_3(3x+7) = 4\log_3(2)$,
3. $\ln(x^2-7) = 2\ln(x+3)$,
4. $\log(\sqrt{x+1}) + \log(\sqrt{x-1}) - \log(5) = 0$,
5. $\log(x^2+3x-1) = 2$.

Exercice 134 Résoudre :

1. $3^x + 9^x = 90$,
2. $e^{3x} = 5$,
3. $4e^{-3x} - 3e^{-x} - e^x = 0$.

(Indication pour 1. : on posera $y = 3^x$.)

Exercice 135 Résoudre

1. $2^{x^2} = 512$,
2. $7^{x^2+x} = 49$,
3. $\frac{1}{10^x} = 10000$.

Exercice 136 Résoudre les systèmes :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} \log(x)+\log(y) & = & 2 \\ x+y & = & 25 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcl} \ln(x)-\ln(y) & = & 1 \\ xy & = & e \end{array}\right.$

Exercice 137 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$.
On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Partie A. Étude de fonctions auxiliaires.

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^x + 1$.
   Étudier le sens de variation de h et démontrer que $h(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.
   (a) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Étudier le sens de variation de g et dresser le tableau de variations de g.

(c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
On note α et β ces solutions avec $\alpha > \beta$. Prouver que $1,14 < \alpha < 1,15$.

(d) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B. Étude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathcal{C}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.
2. (a) Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.
3. (a) Établir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+1}$

   (b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A.2., déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.
4. Déterminer une équation de la tangente T à, la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
5. (a) Établir que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
$$f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1} \text{ avec } u(x) = e^x - xe^x - 1.$$

   (b) Étudier le sens de variation de la fonction u. En déduire le signe de $u(x)$.

   (c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite T.
6. Tracer $\mathcal{C}$ et T. On prendra pour unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axes des ordonnées.
On pourra admettre que $-1,85 < \beta < -1,84$ et $-1,19 < f(\beta) < -1,18$.

Exercice 138 Dans ce problème, on étudie successivement les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = xe^{-x} \text{ et } g(x) = f(x) + [f(x)]^2.$$

Partie A. Étude de la fonction f.

1. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f'.
Étudier le sens de variation de f.

   (b) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et sa limite en $+\infty$.

   (c) Donner le tableau de variation de f.
(On ne demande pas de construire la représentation graphique de f.)
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = -\dfrac{1}{2}$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution notée α.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

   (b) Montrer de même que l'équation $f(x) = -1$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution notée β.
Donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.

Partie B. Étude de la fonction g.

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a
$$g'(x) = f'(x)[1 + 2f(x)].$$
Étudier le sens de variation de g.
2. Déterminer la limite de g en $-\infty$ et sa limite en $+\infty$.
3. Donner le tableau de variation de g. On calculera la valeur exacte de $g(\alpha)$.
4. (a) Établir que, pour tout réel x, on a
$$g(x) - x = xe^{-x}[1 + xe^{-x} - e^x]$$

   (b) Montrer que, pour tout réel x, on a

$$1 + xe^{-x} \leq 1 + x \leq e^x.$$

(c) Préciser la position de la courbe représentative Γ de la fonction g par rapport à sa tangente T en 0.

5. Tracer Γ (on prendra pour unité graphique 2 cm). Préciser les abscisses des points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses. Faire figurer sur la dessin la tangente T.

Chapitre 4

Les fonctions économiques

4.1 Les fonctions coûts

4.1.1 Coût total de production

La production d'une quantité d'un certain produit entraîne dans les entreprises une série de dépenses telles que

- les salaires,
- les matières premières,
- les matières premières,
- les frais d'entretien,
- les frais généraux.

La somme de ces dépenses est appelée **coût total de production**.

Dans ce coût total interviennent

- **Les coûts variables** qui dépendent de la quantité produite : matières premières, achat de machines, embauche de personnel,...
- **les coûts fixes** qui ne dépendent pas de la quantité produite : location de locaux, publicités, assurances,...

Le coût total de production peut être modélisé par une fonction numérique définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Pour tout réel q de l'intervalle $[0; +\infty[$, on a donc

$$\boxed{C_T(q) = C_V(q) + C_T(0)}$$

où

. q désigne la quantité produite,

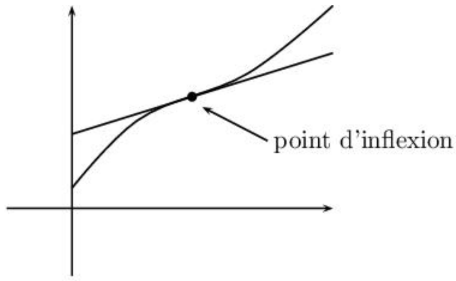
. $C_V(q)$ correspond aux coûts variables de production,

. $C_T(0)$ correspond aux coûts fixes (ils ne dépendent pas de q).

Exemple 4.1.1 Dans une imprimerie, l'impression et la reliure de livres entraîne des frais fixes de 650 € et $4,5$ € de frais par livre fabriqué.
Soit q le nombre de livres fabriqués. Le coût total vaut alors :

$$C_T(q) = 4,5q + 650$$

La représentation graphique de la fonction coût total a en général l'allure ci-dessous : C_T est une fonction strictement croissante et strictement positive sur $[0; +\infty[$.



4.1.2 Coût marginal de production

Lorsque l'entreprise fabrique q unités, elle a besoin de savoir combien lui coûterait la production d'une unité supplémentaire. Le coût de production de cette $q+1$-ième unité lorsque l'entreprise en a déja produit q est le coût marginal $C_{ma}(q)$.

Exemple 4.1.2 Le coût total de production d'une marchandise particulière est $C_T(q) = 150+200q-0,01q^2$. Le coût total de production de 100 unités est de $C_T(100) = 20050$, celui d'une unité supplémentaire est de $C_T(101) = 20247,99$. Le coût marginal au rang 100 est de

$$C_{ma}(100) = C_T(101) - C_T(100) = 197,99,$$

c'est le coût de la 101-ième unité lorsque l'entreprise en a produit 100.

Les économistes considèrent que sous certaines conditions, la dérivée du coût total est une bonne approximation du coût marginal :

$$\boxed{C_{ma}(q) = C'_T(q)}$$

En effet, si on reprend l'exemple précédent,

$$C_{ma}(100) = C_T(101) - C_T(100) = \frac{C_T(101) - C_T(100)}{101 - 100} \simeq C'_T(100),$$

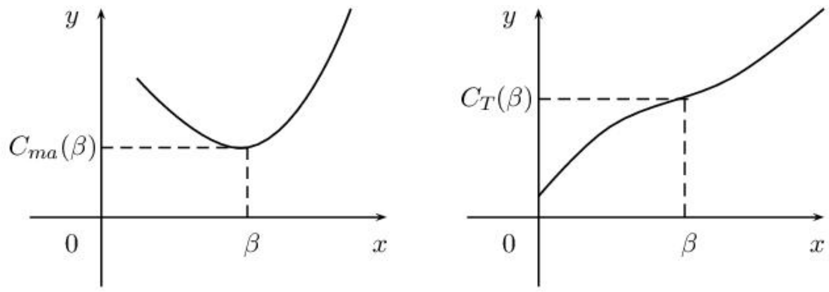
qui représente le taux de variation de la fonction C_T à l'abscisse 100. Comme $C_{ma}(q) = C'_T(q) = 200-0,02q$, on trouve $C_{ma}(100) = C'_T(100) = 198$.

Pour des raisons économiques, le coût marginal qui est strictement positif
- décroît d'abord,
- atteint son minimum pour une production β,
- puis augmente.

q	0	β	$+\infty$
signe $C''_T(q)$	$-$	0	$+$
variations $C'_T = C_{ma}$	$\searrow$	$C_{ma}(\beta)$	$\nearrow$
concavité C_T	concave		convexe

De plus, $(\beta, C_T(\beta))$ est un point d'inflexion. En effet, la dérivée seconde de C_T (ou la dérivée première de C_{ma}) s'annule en changeant de signe.

On a les graphes suivants :



4.1.3 Coût moyen de production

Définition

Pour q unités produites, le coût moyen de production est le quotient du coût total de production par le nombre d'unités produites. On peut alors définir sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction coût moyen de production notée C_M par

$$\boxed{C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q}}$$

Exemple 4.1.3 Les coûts de production d'une entreprise exprimés en milliers d'€, se répartissent de la manière suivante :

. les coûts fixes : 12

. les coûts variables ou proportionnels : $3q^3 - 9q^2 + 18q$

Le coût moyen est alors

$$C_M(q) = \frac{3q^3 - 9q^2 + 18q + 12}{q} = 3q^2 - 9q + 18 + \frac{12}{q}.$$

Pour obtenir le coût moyen pour un certain nombre d'unités, il suffit de remplacer dans cette expression la valeur de q par celle correspondante. Par exemple, le coût moyen de production pour 10 unités vaut

$$C_M(10) = 3(10)^2 - 9(10) + 18 + \frac{12}{10} = \frac{2292}{10} \text{ soit } 229,2 \text{ €}.$$

Remarque 4.1.1 Le coût moyen et le coût marginal sont des coûts unitaires.

Sens de variation de C_M

La fonction coût total C_T est dérivable sur $[0;+\infty[$ donc la fonction coût moyen C_M est dérivable sur $]0;+\infty[$. Pour $q > 0$,

$$C'_M(q) = \left(\frac{C_T(q)}{q}\right)' = \frac{C'_T(q).q - C_T(q)}{q^2} = \frac{C'_T(q) - \frac{C_T(q)}{q}}{q} = \frac{C_{ma}(q) - C_M(q)}{q}.$$

Comme $q > 0$, déterminer le signe de $C'_M(q)$ (et donc les variations de C_M) revient à comparer $C_{ma}(q)$ et $C_M(q)$.

Or on sait pour des raisons de nature économique qu'il existe un seuil de production α (une abscisse représentant une certaine quantité) tel que :

- pour une production inférieure à α, le coût marginal de production est inférieur au coût moyen de production,
- pour une production égale à α, le coût marginal de production est égal au coût moyen de production,
- pour une production supérieure à α, le coût marginal de production est supérieur au coût moyen de production.

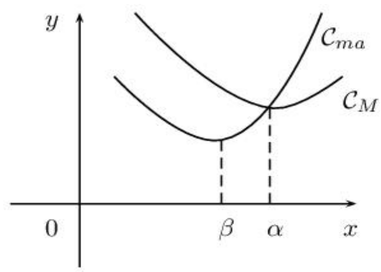
On en déduit le tableau de variations suivant :

q	0		α		$+\infty$
signe $C'_M(q)$		$-$	0	$+$	
variations C_M		$\searrow$	$C_M(\alpha)$	$\nearrow$	

Par conséquent,

$$C'_M(\alpha) = 0 \Leftrightarrow C_{ma}(\alpha) = C_M(\alpha).$$

Cela signifie que le coût marginal est égal au coût moyen lorsque le coût moyen est minimal.



4.1.4 La recette et le bénéfice total

Si l'entreprise vend une unité de produit p (en unités d'euros), la recette pour q unités est de

$$\boxed{R(q) = pq}$$

Le bénéfice réalisé est alors

$$\boxed{B(q) = R(q) - C_T(q)}$$

Exemple 4.1.4 Le coût total est donné en milliers d'euros par

$$C_T(q) = q^3 - 3q^2 + 10,48q.$$

L'entreprise vend le produit $11,8$ milliers d'euros l'unité. Le bénéfice réalisé vaut alors

$$B(q) = R(q) - C_T(q) = 11,8q - (q^3 - 3q^2 + 10,48q) = -q^3 + 3q^2 + 1,32q.$$

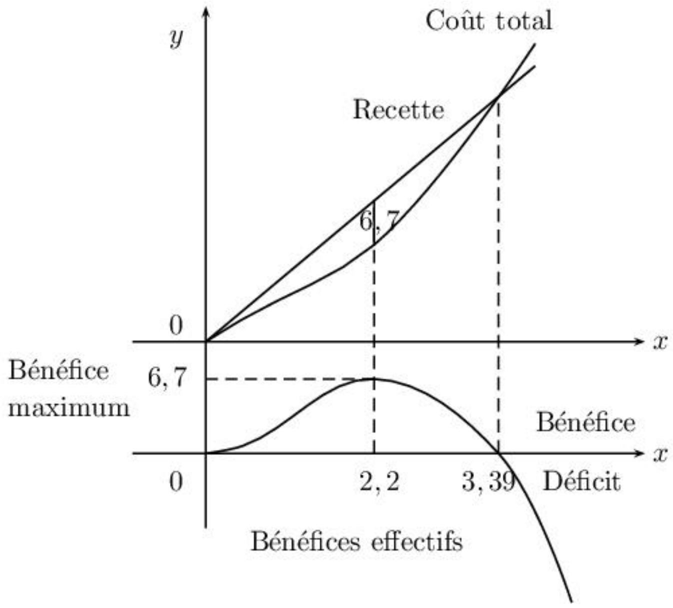
Il est essentiel de noter que

> l'étude du signe de $B(q)$ permet de déterminer les productions pour lesquelles l'entreprise réalise des bénéfices

et que

> l'étude des variations de la fonction B permet de trouver la production qui assure le bénéfice maximum

Toujours dans le cadre de l'exemple, on a les graphes ci-dessous :



4.1.5 Exercice

Un fabricant de pièces métalliques réalise une production annuelle de q unités pour un coût total de production C_T défini par

$$C_T(q) = q^3 - 12q^2 + 48q.$$

1. Déterminer le coût moyen.
2. Déterminer le coût marginal.
3. Déterminer le coût moyen minimal.
4. On suppose que le prix de vente unitaire est $p = 36$. Déterminer le bénéfice. Définir la production qui optimise le bénéfice.

4.2 Les fonctions d'offre et de demande

4.2.1 Définitions

Le vendeur est offreur alors que le consommateur est demandeur.

- La demande : la quantité d'un produit qu'un consommateur achètera est fonction du prix de ce produit. En général, la quantité demandée est d'autant plus grande que le prix du produit est plus bas. Cette demande est d'ailleurs fonction d'autres facteurs, par exemple, le revenu du consommateur.

  On notera la demande $D(p)$,

  $$\boxed{D \text{ est une fonction décroissante du prix } p}$$

- L'offre : le vendeur qui cherche à maximiser son profit est d'autant plus disposé à vendre que le prix du produit est élevé. La quantité offerte, fonction du prix du produit, est donc d'autant plus grande que le prix du produit est plus élevé.

  On notera $O(p)$ l'offre,

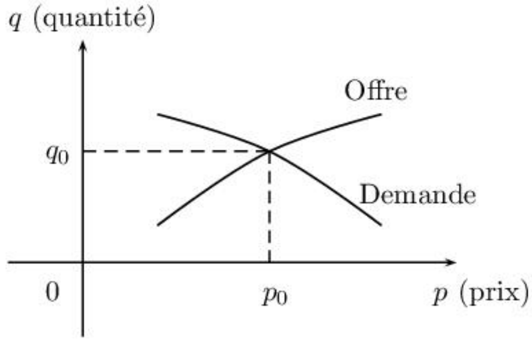
  $$\boxed{O \text{ est une fonction croissante du prix } p}$$

Le marché est le lieu de rencontre où les offres des vendeurs rencontrent les demandes des acheteurs qui s'ajustent à un certain prix.

Le prix d'équilibre est celui où les quantités offertes et demandées sont égales :

$$\boxed{O(p) = D(p)}$$

Graphiquement, on a où p_0 et q_0 sont le prix et la quantité d'équilibre sur le marché du produit.



Exemple 4.2.1 Les fonctions d'offre et de demande d'un bien B sont données par $O(p) = 2p$ et $D(p) = 35 - 3p$ où p est exprimé en euros.
L'équilibre est obtenu lorsque $O = D$. On pose donc

$$2p = 35 - 3p \Leftrightarrow p = 7.$$

Le prix d'équilibre est $p_0 = 7$ €, la quantité d'équilibre est $q_0 = D(p_0) = O(p_0) = 14$. Au prix de 7 €, 14 unités seront échangées.

4.2.2 La fonction elasticité

Définition 4.2.1 *Lorsqu'une quantité passe de la valeur p_0 à la valeur p_1, le taux d'accroissement de cette quantité est de $\frac{p_1 - p_0}{p_0}$ soit $\frac{p_1 - p_0}{p_0} \times 100$ en pourcentage. Ce taux est noté*

$$\boxed{\frac{\Delta p}{p}}$$

Définition 4.2.2 *Le coefficient d'elasticité e est le rapport du taux de variation de Q au taux de variation de P. On note*

$$\boxed{e[P](Q) = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}}}$$

Interprétation du coefficient d'elasticité :

$$\boxed{\text{si } P \text{ varie de } t\% \text{ alors } Q \text{ varie de } e[P](Q)t\%}$$

- Lorsque $|e| > 1$, toute variation de P entraîne une variation plus que proportionnelle de Q,

$$\boxed{Q \text{ est très elastique à } P}$$

- Lorsque $|e| < 1$, toute variation de P n'entraîne pratiquement pas de variation de Q,

$$\boxed{Q \text{ est faiblement elastique à } P}$$

- Lorsque $|e| = 1$, toute variation de P entraîne une variation exactement proportionnelle de Q,

$$\boxed{Q \text{ est parfaitement elastique à } P}$$

Exemple 4.2.2 La demande Q d'un bien en fonction du prix P de ce bien est donnée par :

Prix P	Quantité Q
5	30
4	40

L'elasticité-prix de la demande (ou elasticité de la demande par rapport au prix) lorsque P passe de 4 à 5 vaut

$$e[P](Q) = \frac{\frac{30-40}{40}}{\frac{5-4}{4}} = \frac{\frac{-1}{4}}{\frac{1}{4}} = -1$$

donc lorsque P augmente de 25% ($\frac{5-4}{4} \times 100$), la quantité demandée diminue de 25%. On peut affirmer que Q est parfaitement elastique à P.

Définition 4.2.3 *Si $y = f(x)$, pour un accroissement très petit, l'elasticité en un point $P(x,y)$ est donnée par*

$$\boxed{e[f](x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}}$$

L'elasticité de f par rapport à x est donc approximativement la variation en pourcentage de f lorsque x augmente de 1%.

Exemple 4.2.3 La demande d'un produit varie en fonction du prix suivant la formule :

$$D(p) = -p^2 - 3p + 100$$

On a $D'(p) = -2p - 3$. L'elasticité-prix de la demande en $p = 3$ vaut

$$e[D](3) = \frac{3D'(3)}{D(3)} = \frac{3 \times (-9)}{82} \simeq -0,33$$

ce qui signifie que lorsque le prix est égal à 3 et qu'il augmente de 1%, la demande va baisser de $0,33\%$.

4.3 Exercices

Exercice 139 Pour commercialiser un produit, deux estimations de la demande ont été fournies par deux maisons de consultation :
- firme A : $D(p) = 100(20 - p)$
- firme B : $D(p) = 200(15 - p)$
où D est la demande et p le prix.

1. Représenter graphiquement les deux fonctions de demande. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I des deux courbes.
2. Déterminer l'elasticité de la demande en fonction du prix suivant que l'on retient l'estimation de A ou de B.
3. Actuellement l'offre du produit est de $O = 1100$.
   Dans chacun des deux cas, indiquer le prix d'équilibre du marché.
   Calculer dans les deux cas l'elasticité de la demande en fonction du prix. Interpréter le résultat.
4. La quantité produite et demandée passe alors à 1150.
   Déterminer le prix et la recette totale dans chacun des deux cas.

5. On choisit l'estimation de la firme A qui assure alors qu'avec une campagne publicitaire bien menée, on pourrait espérer une demande telle que $p = -0,01D + 25$.
   Quel est alors le prix d'équilibre ? ($O = 1100$). Donner l'elasticité de la demande.

Exercice 140

1. Étudier et représenter la fonction qui au prix p fait correspondre la quantité demandée q définie par
$$p(q) = \frac{10}{1+5q}$$
2. Exprimer la quantité demandée en fonction de p. Calculer l'elasticité $e(p)$ de la demande par rapport au prix.
   Étudier les variations de la fonction e pour p compris entre 0 et 10.
   Tracer la courbe représentative de e.
3. Calculer le revenu global R en fonction de q. Étudier et représenter (sur le graphique de la question 1.) la fonction $R(q)$.
4. Calculer le revenu marginal R' en fonction de q. Étudier et représenter (sur le graphique de la question 1.) la fonction $R'(q)$.

Exercice 141 Pour une catégorie de logements, la demande D pour un prix d'achat p et l'offre pour un prix de vente p s'expriment respectivement par les relations suivantes :

$$D(p) = 50000 - 0,4p$$
$$O(p) = -10000 + 0,2p$$

D est le nombre de logements que souhaitent acquérir les ménages lorsque le prix est p. O est le nombre de logements qu'offrent à la vente les promoteurs lorsque le prix est p.

1. Quelle est l'elasticité de la demande par rapport au prix pour $p = 100000$ € ?
2. Quels prix de vente et d'achat s'établissent sur le marché ?
3. Le gouvernement décide de donner une subvention à la construction des logements de 10000 € par logement. Quel nouveau prix s'établit sur le marché ?
4. Si le prix d'achat d'un logement est de 100000 €, son loyer annuel de 10000 € et son prix de vente au bout d'un an de 90000 €, un ménage qui veut se loger un an et qui peut emprunter ou prêter de l'argent au taux de 10% a-t-il intérêt à acheter puis revendre le logement ou simplement être locataire ?

Exercice 142 Un club de football propose trois tarifs d'entrée au stade :
- Tarif A : sans abonnement, le spectateur paye 8 € par match.
- Tarif B : avec un abonnement à 40 €, le spectateur paye en plus 4 € par match.
- Tarif C : avec un abonnement à 120 € : entrée libre.

1. Quel est le tarif le plus avantageux pour un spectateur assistant à :
   (a) 8 matchs ?
   (b) 14 matchs ?
   (c) 24 matchs ?
2. On désigne par n le nombre de matchs auquel le spectateur désire assister dans l'année.
   (a) On note P_1 le prix payé pour n matchs au tarif A. Exprimer P_1 en fonction de n.
   (b) On note P_2 le prix payé pour n matchs au tarif B. Exprimer P_2 en fonction de n.
3. Représenter graphiquement les droites D_1, D_2 et D_3 d'équations :
$$D_1 : y = 8x \quad ; \quad D_2 : y = 4x + 40 \quad ; \quad D_3 : y = 120.$$
4. Déterminer graphiquement en répondant par une phrase :

(a) le nombre maximal de matchs pour lequel le tarif A est le plus avantageux.
(b) Les nombres minimal et maximal de matchs pour lesquels le tarif B est le plus avantageux.
(c) Le nombre minimal de match pour lequel le tarif C est le plus avantageux.

Exercice 143 Pour diminuer les coûts de connexion à Internet, le responsable du service souhaite remplacer la ligne téléphonique classique par une ligne Numéris. Il souhaite en plus souscrire l'abonnement "avantage Numéris Internet" qui permet de bénéficier de 35% de réduction sur les coûts de connexion Internet de 8 heures à 22 heures du lundi au samedi.

	Ligne classique	Ligne Numéris Internet
Abonnement mensuel	12 €	36 €
Tarif horaire normal	$2,5$ €	$2,5$ €
Abonnement mensuel Avantage Numéris Internet		7 €
Taux de réduction sur le coût des communications		35%
Horaires et jours d'application de la réduction		De 8h à 22h du lundi au samedi

Tous les prix du tableau sont donnés toutes taxes comprises.

1. (a) Pour la ligne classique, le coût mensuel C_1, en euros, des connexions à Internet en fonction du nombre mensuel d'heures de connexion n, est donné par la relation suivante :
$$C_1 = 2,5n + 12.$$
Calculer le coût mensuel de connexion à Internet pour cette ligne classique, pour un nombre mensuel d'heures de connexion égal à 30.
   (b) Montrer que le coût mensuel C_2, en euros, des connexions à Internet durant les heures d'ouverture de l'entreprise, en utilisant la ligne Numéris Internet, en fonction du nombre mensuel d'heures de connexion n, est donné par la relation :
$$C_2 = 1,63n + 43.$$
2. On considère les fonctions f et g définies, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 50]$, par :
$$f(x) = 2,5x + 12 \text{ et } g(x) = 1,63x + 43.$$
Tracer les représentations graphiques D' et D des fonctions f et g respectivement dans le plan rapporté au repère $(Ox; Oy)$.
   (a) Par une lecture graphique, indiquer quel semble être l'ensemble S des solutions de l'inéquation, d'inconnue x,
$$f(x) \leq g(x).$$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation, d'inconnue x,
$$2,5x + 12 \leq 1,63x + 43.$$
3. En tenant compte des résultats précédents, rédiger une phrase précisant le nombre d'heures de connexion à Internet à partir duquel l'utilisation d'une ligne Numéris est plus intéressante financièrement que l'utilisation d'une ligne classique.

Exercice 144 L'entreprise MAPUB est spécialisée dans la création et la production de gadgets publicitaires. Parmi ces produits, elle propose des stylos que d'autres sociétés peuvent faire personnaliser à leur nom pour les utiliser comme support publicitaire. Les contraintes de fabrication imposent une production comprise entre 400 et 1 200 unités.

1. On étudie la fonction f définie sur l'intervalle $[400; 1200]$ par :
$$f(x) = -0,002x^2 + 5x + 4000$$

(a) Compléter le tableau de valeurs.

x	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
$f(x)$	5680				6720	6880		7080	7120

(b) Représenter la fonction f graphiquement dans un repère orthonormé.

2. On étudie la fonction g définie sur l'intervalle $[400; 1200]$ par : $g(x) = 4x+3880$. Tracer la représentation graphique de la fonction g dans le même repère.
3. Le coût de production varie en fonction du nombre n d'objets fabriqués. Ce coût de production est donné par la relation :
$$C(n) = -0,002n^2 + 5n + 4000.$$
Le prix de vente des objets (exprimé en euros) est donné par la relation :
$$P(n) = 4n + 3880.$$
À l'aide du graphique précédent, déterminer le nombre de stylos à partir duquel l'entreprise réalise des bénéfices. Justifier la réponse par une phrase.
4. On appelle R le résultat de la vente de ces objets. Montrer que R peut s'écrire sous la forme :
$$R = 0,002n^2 - n - 120.$$
5. Une société commande des objets personnalisés à son nom. Sur cette commande, l'entreprise MAPUB réalise un résultat positif (bénéfice) de 600 €. Calculer le nombre d'objets correspondant à cette commande.

Exercice 145

• Partie I

Actuellement, les tarifs de la société PHOTOCOP 2000, relatifs aux photocopies "noir et blanc", sont calculées par tranches, selon les conditions suivantes :

Nombre de photocopies	Coût unitaire TTC (en euros)
De la 1ère à la 5ème	0,13
De la 6ème à la 20ème	0,10
De la 21ème à la 50ème	0,06
Au-delà de la 50ème	Sur devis

1. Montrer par le calcul que le coût TTC de 15 photocopies est 1,65 €.
2. Calculer le coût TTC :
   (a) de 40 photocopies
   (b) de 45 photocopies
3. Montrer que le coût TTC, en euros, pour un nombre n de photocopies compris entre 20 et 50, est donné par la relation
$$C(n) = 0,06n + 0,95.$$
4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[20; 50]$ par $f(x) = 0,06x + 0,95$. Tracer le segment de droite représentant graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[20; 50]$.
5. Vérifier graphiquement les résultats obtenus à la question 2. Laisser apparents les traits de construction permettant une lecture graphique.

• Partie 2.

Dans le cadre d'une modification de la grille de tarification, seul le coût unitaire des photocopies comprises entre la 21-ième et la 50-ième changerait, de sorte que le coût de 40 photocopies ne soit plus que de $2,75$ € (soit environ 18% de réduction par rapport à l'ancien tarif).

1. Sur le graphique, placer le point $E(40; 2,75)$, puis tracer la droite (HE) avec $H(20; 2,15)$.

2. Déterminer graphiquement ou par le calcul le coefficient directeur de cette droite.
3. On admet que le coefficient directeur de la droite (HE) est le coût unitaire TTC, en euros, des photocopies comprises entre la 21-ième et la 50-ième. À quel pourcentage de réduction sur ce coût unitaire correspond la modification de tarification ?

Exercice 146 Une entreprise fabrique deux produits A et B dans les conditions suivantes :

1. Produit A : Le coût total de production du produit A est donné par :
$$C_1(x) = 10x + 250,$$
x désignant le nombre d'articles fabriqués. Un article A étant vendu 25 €,
   – exprimer en fonction de x le prix de vente $P_1(x)$ de ces x articles A ;
   – vérifier que le bénéfice B_1 réalisé sur la vente de x articles A peut s'écrire :
$$B_1(x) = 15x - 250.$$
Représenter graphiquement B_1 dans un repère orthogonal pour x appartenant à $[20; 80]$ (échelle : sur Ox : 1 cm représente 5 articles ; sur Oy : 1 cm représente 50 €).
2. Produit B : Le coût total de production du produit B est donné par :
$$C_2(x) = \frac{x^2}{2} + 15x + 10.$$
Un article B étant vendu 50 €,
   (a) exprimer en fonction de x le prix de vente $P_2(x)$ de x articles B,
   (b) vérifier que le bénéfice B_2 réalisé sur la vente de x articles B peut s'écrire :
$$B_2(x) = -\frac{x^2}{2} + 35x - 10.$$
   (c) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous et représenter graphiquement B_2 dans le repère précédent pour x appartenant à $[10; 60]$.

x	10	20	30	35	40	50	60
$B_2(x)$							

   (d) Lire graphiquement la valeur du maximum
3. Déterminer graphiquement et par le calcul le nombre d'articles à produire pour que les bénéfices B_1 et B_2 soient égaux. Quelle est alors la valeur de ce bénéfice ?

Exercice 147 Vous êtes chargé de préparer une opération commerciale concernant le prix d'un article dont le prix brut est de 1 000 € l'unité. Vous devez proposer au client une première remise de $t\%$ sur le prix brut, puis une seconde remise, de même pourcentage, sur le prix ainsi obtenu de sorte que le prix net de commercialisation de l'article soit de 902, 50 €. L'objet du problème est de déterminer quelle est la valeur de t, s'il en existe une, qu'il convient de retenir sachant que :

– le prix net en euros, de commercialisation d'un article, exprimée à l'aide de t, est égal à :
$$1000\left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$$
– pour des raisons commerciales : $t \leq 8$.

1. Résolution d'une équation.
On considère la fonction f définie, pour tout x de l'intervalle $[0; 8]$ par :
$$f(x) = 1000\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2$$
   (a) Compléter le tableau ci dessous. (valeurs prises par la fonction f).

x	0	2	4	6	8
$f(x)$			921,6	883,6	

   (b) Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère $(Ox; Oy)$.

(c) Par une lecture graphique, en utilisant la courbe C :
- indiquer, si oui ou non, l'équation d'inconnue x,
$$f(x) = 902,5$$
semble posséder une et une seule solution ;
- donner une estimation de cette solution si elle existe. (Laisser apparents les tracés ayant permis de répondre à cette question).

(d) Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[0; 8]$,
$$f(x) = 0,1x^2 - 20x + 1000.$$

(e) L'équation d'inconnue x :
$$0,1x^2 - 20x + 1000 = 902,5$$
est équivalente à l'équation d'inconnue x :
$$0,1x^2 - 20x + 97,5 = 0.$$
Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation d'inconnue x :
$$0,1x^2 - 20x + 97,5 = 0.$$

(f) Donner la valeur exacte de la solution de l'équation d'inconnue x,
$$f(x) = 902,5.$$
(Justifier la réponse donnée).

2. Réponse au problème posé.
À l'aide des résultats trouvés précédemment, préciser le pourcentage $t\%$ de remise qu'il faut effectuer.

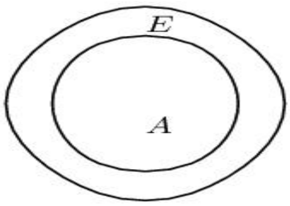
Chapitre 5

Pourcentages et indices

5.1 Pourcentage instantané

5.1.1 Définitions

Définition 5.1.1 *Le **pourcentage** est le rapport d'une partie au tout.*



- E est le tout (ou ensemble de référence) de cardinal N,
- A est la partie de cardinal n.

En posant

$$\boxed{\frac{n}{N} = \frac{t}{100}},$$

la part de A représente $t\%$ de celle de E.

Remarque 5.1.1 Le rapport d'une partie au tout peut s'exprimer par :
- une proportion,
- un pourcentage,
- un taux ou un coefficient.

Exemple 5.1.1 Dans une classe l'an dernier, 28 élèves sur 32 ont eu leur bac.
- proportion : $\frac{28}{32} = 0,875$
- pourcentage : $0,875 \times 100 = 87,5\%$
- taux de réussite : $87,5\%$
- coefficient de réussite : $0,875$

Exercice 148 Le tableau suivant donne une répartition en pourcentage du tabagisme selon le sexe et la catégorie socio-professionnelle des salariés d'une entreprise.

Compléter le tableau sachant que l'entreprise compte 600 ouvriers et plus précisément 100 hommes et 500 femmes, 350 personnes de service (300 hommes et 50 femmes) et 250 cadres (150 hommes et 100 femmes).

CSP / Sexe	Ouvriers	Cadres	Personnel de service	Total
H	60% (100)	30% (150)	25% (300)	(550)
F	50% (500)	25% (100)	20% (50)	(650)
Total	(600)	(250)	(350)	(1200)

Exercice 149 Que pensez vous du raisonnement suivant ?

"40% des accidents de la route sont provoqués par des conducteurs en état d'alcoolémie ; il y a donc plus d'accidents provoqués par des personnes sobres que par des personnes ayant consommé de l'alcool. Il vaut donc mieux boire avant de conduire !"

Justifier votre réponse à l'aide des informations suivantes : il y avait 1400 conducteurs, 32 conducteurs ont été contrôlés positifs, il y a eu 20 accidents.

5.2 Pourcentage d'évolution (ou taux de croissance ou taux de variation)

5.2.1 Définitions

Au temps t_0, une grandeur est mesurée par V_0 (valeur initiale).
Au temps t_1, cette même grandeur est mesurée par V_1 (valeur finale).

Définition 5.2.1 *La valeur $V_1 - V_0$ est appelée **variation absolue**.*

Définition 5.2.2 *La valeur*

$$\boxed{\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{t}{100}}$$

*est appelée **taux de croissance** (ou **variation relative**).*

Cette relation peut être réécrite sous la forme

$$V_1 = V_0 \underbrace{\left(1 + \frac{t}{100}\right)}_{\alpha}$$

Définition 5.2.3 *La valeur α est appelée **coefficient multiplicateur** et permet d'obtenir directement V_1 à partir de V_0 en connaissant t. Il s'exprime sous la forme*

$$\boxed{\alpha = 1 + \frac{t}{100}}$$

Propriété 5.2.1

- *Si le taux de croissance est positif ou nul, le coefficient multiplicateur associé est supérieur ou égal à 1,*
- *Si le taux de croissance est négatif ou nul, le coefficient multiplicateur associé est inférieur ou égal à 1.*

<u>*Preuve*</u>

- Si le taux de croissance est positif, alors le coefficient multiplicateur vérifie une relation du type
$$\alpha = 1 + \frac{t}{100}$$

où $t \geq 0$. Donc $\frac{t}{100} \geq 0$ et $\alpha \geq 1$.

– Si le taux de croissance est négatif, alors le coefficient multiplicateur vérifie une relation du type

$$\alpha = 1 - \frac{t}{100}$$

où $t \geq 0$. Donc $\frac{t}{100} \geq 0$ et $\alpha \leq 1$.

Exercice 150 Un article valait 100 euros à la date t_0, il vaut 115 euros à la date t_1.
Calculer la variation absolue, la variation relative, le taux de croissance, le coefficient multiplicateur.

Exercice 151

1. De 1940 à 1995, la population du Mexique est passée de $19,7$ millions d'habitants à $93,7$ millions. Calculer le taux de croissance sur cette période. Quelle population peut-on estimer en 2050 si le taux de croissance est le même.
2. Durant la même période, la population française est passée de 42 millions d'habitants à 58 millions. Répondre aux mêmes questions.

5.2.2 Évolutions successives

Définition 5.2.4 *Supposons qu'on ait la succession suivante :*

$$V_0 \underset{\alpha_1}{\longrightarrow} V_1 \underset{\alpha_2}{\longrightarrow} V_2 \underset{\alpha_3}{\longrightarrow} \ldots \underset{\alpha_{n-1}}{\longrightarrow} V_{n-1} \underset{\alpha_n}{\longrightarrow} V_n$$

alors le coefficient multiplicateur global et le taux global sont respectivement égaux à

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & \alpha_1 \times \alpha_2 \times \ldots \times \alpha_{n-1} \times \alpha_n \\ t & = & (\alpha - 1) \times 100 \end{array}\right.}$$

Exercice 152 On considère ci-dessous l'évolution d'une production :

- 1990 : $P_0 = 250$ tonnes
- 1991 : la production augmente de 75 tonnes
- 1992-1993 : la production augmente de 20%
- 1994 : la production baisse de 25%
- 1995 : la production baisse de 15%
- 1996 : la production a été multipliée par $1,6$

1. Calculer le taux de croissance global
2. Calculer le taux de croissance annuel équivalent

Définition 5.2.5 *Supposons qu'on ait un coefficient multiplicateur global et un taux de croissance global, respectivement α et t, sur un ensemble de n années. Alors le coefficient multiplicateur annuel est donné par*

$$\boxed{\overline{\alpha} = (\alpha)^{1/n} = \sqrt[n]{\alpha}}$$

Le taux de croissance moyen annuel est donné par

$$\boxed{\overline{t} = (\overline{\alpha} - 1) \times 100}$$

Propriété 5.2.2 *Le taux moyen et le taux global vérifient la relation*

$$\boxed{\left(\frac{\bar{t}}{100}+1\right)^n = \frac{t}{100}+1}$$

<u>*Preuve*</u> :

$$\begin{array}{rrcl} & \bar{t} & = & (\overline{\alpha}-1)\times 100 \\ \Leftrightarrow & \bar{t} & = & (\sqrt[n]{\alpha}-1)\times 100 \\ \Leftrightarrow & \bar{t} & = & \left(\sqrt[n]{1+\frac{t}{100}}-1\right)\times 100 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{\bar{t}}{100}+1\right)^n & = & \frac{t}{100}+1 \end{array}$$

Exercice 153 De 1940 à 1995, la population du Mexique est passée de 19,7 millions d'habitants à 93,7 millions. Quel est le taux moyen annuel de croissance de la population mexicaine entre 1940 et 1955 ?
Il s'agit du cas où $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = q$ où q est une constante.

$$V_0 \xrightarrow[\alpha_1=q]{} V_1 \xrightarrow[\alpha_2=q]{} V_2 \xrightarrow[\alpha_3=q]{} \ldots \xrightarrow[\alpha_{n-1}=q]{} V_{n-1} \xrightarrow[\alpha_n=q]{} V_n$$

Dans ce cas,

$$\boxed{V_n = V_0 \times q^n}$$

On dit alors que les nombres V_0, V_1,...,V_n forment une **suite géométrique** de raison q et de premier terme V_0.

Illustration : valeur acquise à intérêts composés.

$$C_0 \xrightarrow[\alpha]{t\%} C_1 \xrightarrow[\alpha]{t\%} C_2 \xrightarrow[\alpha]{t\%} \ldots \xrightarrow[\alpha]{t\%} C_{n-1} \xrightarrow[\alpha]{t\%} C_n$$

On a $C_1 = C_0\left(1+\frac{t}{100}\right) = C_0(1+i)$ en posant $\frac{t}{100} = i$.
Donc $C_2 = C_1\left(1+\frac{t}{100}\right) = C_1(1+i) = C_0(1+i)^2$ et ainsi de suite.

Les nombres C_0, C_1,...,C_n forment une suite géométrique de premier terme C_0 et de raison $1+i$ car

$$C_n = \left(1+\frac{t}{100}\right)^n C_0 = (1+i)^n C_0$$

Exercice 154

1. Un capital de 3250 euros est placé à intérêts composés, au taux annuel de 3,8% ; calculer le capital acquis au bout de 12 ans (au centime d'euro près).
2. Calculer le capital de base, placé à intérêts composés au taux annuel de 8,5% ayant donné un capital de 150180 euros au bout de 23 ans.

Exercice 155

1. Calculer le capital acquis au bout de 10 ans pour un capital de base de 5000 euros, placé à intérêts composés au taux annuel de 8%.
2. Calculer le capital de base placé à intérêts composés au taux annuel de 4,5% ayant donné un capital de 13609 euros au bout de 7 ans (à l'euro près).

5.3 Indice et comparaison d'évolution

5.3.1 Notion d'indice

Définition 5.3.1 *Soient V_0 et V_1 les mesures d'une grandeur à deux dates t_0 et t_1 respectivement telles que :*

$$V_0 \xrightarrow[\alpha]{} V_1$$

alors

$$\boxed{I_{1/0} = \frac{V_1}{V_0} \times 100 = \alpha \times 100}$$

*Cette valeur est appelée **indice date** 1 **base** 100 **à la date** 0.*

Propriété 5.3.1 *Soient V_0, V_1 et V_2 trois valeurs d'une grandeur, calculées aux dates respectives t_0, t_1 et t_2. Soient $I_{1/0}$, $I_{2/0}$ et $I_{2/1}$ les indices base 100 de t_1 par rapport à t_0, t_2 par rapport à t_0 et t_2 par rapport à t_1 respectivement. Alors la relation entre $I_{1/0}$, $I_{2/0}$ et $I_{2/1}$ est donnée par*

$$\boxed{I_{2/1} = \frac{I_{2/0}}{I_{1/0}} \times 100}$$

Preuve : On a $I_{1/0} = \dfrac{V_1}{V_0} \times 100$ et $I_{2/0} = \dfrac{V_2}{V_0} \times 100$. Donc

$$I_{2/1} = \frac{V_2}{V_1} \times 100 = \frac{V_2}{V_0} \times \frac{V_0}{V_1} \times 100 = \frac{I_{2/0}}{I_{1/0}} \times 100.$$

Exercice 156 De 1990 à 1996, le SMIC horaire brut est passé de $31,28$ à $37,72$ francs.

1. Calculer l'indice 1996 base 100 en 1990. En 2000, le SMIC horaire brut est égal à $41,77$ francs.
2. De combien a t-il augmenté par rapport à 1990 ?
3. De combien a t-il augmenté par rapport à 1996 ?

Exercice 157 On a les chiffres suivants portant sur l'évolution du prix du pétrole entre 1973 et 1994.

Année	1973	1974	1978	1980	1985	1986	1990	1994
Prix	2,83	10,41	13,03	35,69	27,53	12,97	20,50	14,76

1. Calculer les taux de croissance ou d'évolution de 1973 à 1974 et de 1978 à 1980 (ce sont les deux chocs pétroliers).
2. Calculer le pourcentage d'évolution de 1985 à 1986.
3. On prend l'indice du prix du pétrole base 100 en 1980. Calculer l'indice du prix du pétrole en 1985, 1986, 1990 et 1994.

5.3.2 Les indices synthétiques

1. Les indices synthétiques sans pondération

   Il s'agit de comparer les valeurs, à deux dates différentes, non plus d'une seule grandeur, mais d'un groupe de grandeurs.

   Exemple 5.3.1 On considère le tableau suivant :

Prix de vente au détail dans l'agglomération parisienne en euros		
FRUITS FRAIS	Janvier 2002	Juillet 2002
Ananas (kg)	$2,70$	$2,95$
Bananes (kg)	$1,45$	$1,60$
Pamplemousses (kg)	$1,90$	$2,05$
Oranges (kg)	$1,02$	$1,15$

   Il y a plusieurs méthodes possibles :

   - Rapport de moyennes :

$$I_{07.02/01.02} = \frac{2,95+1,60+2,05+1,15}{2,70+1,45+1,90+1,02} = \frac{7,75}{7,07} \simeq 1,096$$

   - Moyenne d'indices simples :

$$I_{07.02/01.02} = \frac{I_{\text{ananas}} + I_{\text{bananes}} + I_{\text{pamplemousses}} + I_{\text{oranges}}}{4}$$

$$\Leftrightarrow I_{07.02/01.02} = \frac{\frac{2,95}{2,70}\times 100 + \frac{1,60}{1,45}\times 100 + \frac{2,05}{1,90}\times 100 + \frac{1,15}{1,02}\times 100}{4}$$

$$\Leftrightarrow I_{07.02/01.02} \simeq 110,06.$$

2. Les indices synthétiques avec pondération

   Dans un calcul d'indice synthétique, il est souvent indispensable de donner un **poids** différent à chacun des éléments constitutifs de l'ensemble étudié.
   Par exemple, pour un indice du coût de la vie, nous ne pouvons pas donner la même importance à la consommation de pain, de sucre ou de viande.

   Exemple 5.3.2 Considérons les quantités moyennes annuelles de quatre produits, consommés en 2000 et en 2010 par personne et leur prix moyen respectif (en euros) :

Produits (éléments constitutifs)	**2000**		**2010**	
	Prix P_0	**Quantité** Q_0	**Prix** P_1	**Quantité** Q_1
Pomme de terre (kg)	$0,55$	$70,44$	$0,65$	$88,79$
Boeuf (kg)	$7,30$	$15,62$	$71,20$	$17,60$
Lait frais entier (l)	$0,35$	$95,24$	$0,37$	$75,57$
Sucre (kg)	$1,05$	$20,41$	$1,00$	$10,02$

   Là aussi, il existe plusieurs méthodes de calcul d'indices.

   (a) Pondération de LASPEYRES :

   Il existe une méthode intéressante de calcul d'indices synthétiques à la date t_1 base à la date t_0. Cette méthode considère que la pondération fixée à la date t_0 reste constante. Par ailleurs, elle est analogue à la méthode des rapports des moyennes.

   Indice synthétique de LASPEYRES "rapport des moyennes pondérées"

$$\boxed{I_{1/0} = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100}$$

Cette formule d'indice est basée sur le paramètre P. Une formule analogue peut être donnée en fonction du paramètre Q.

On considère que P et Q correspondent respectivement au prix et à la quantité. Dans ce cas,

$$I_{2010/2000} = \frac{70,44 \times 0,65 + 15,62 \times 71,20 + 95,24 \times 0,37 + 20,41 \times 1,00}{70,44 \times 0,55 + 15,62 \times 7,30 + 95,24 \times 0,35 + 20,41 \times 1,05} \times 100$$

$$\Leftrightarrow I_{2010/2000} \simeq 584,76$$

(b) Pondération de PAASCHE :

On formule pour cette autre méthode une hypothèse différente. En effet, on constate que la pondération varie au cours des deux périodes. Pour tenir compte de ces modifications, on applique dons la pondération relative à la période actuelle ou période courante (Q_1 au lieu de Q_0).

On obtient donc la formule suivante par actualisation de la pondération :

Indice synthétique de PAASCHE "rapport des moyennes pondérées"

$$\boxed{I_{1/0} = \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1} \times 100}$$

Cette formule d'indice est basée sur le paramètre P. Une formule analogue peut être donnée en fonction du paramètre Q.

On considère que P et Q correspondent respectivement au prix et à la quantité. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} I_{2010/2000} &= \frac{88,79 \times 0,65 + 17,60 \times 71,20 + 75,57 \times 0,37 + 10,02 \times 1,00}{88,79 \times 0,55 + 17,60 \times 7,30 + 75,57 \times 0,35 + 10,02 \times 1,05} \times 100 \\ \Leftrightarrow \quad I_{2010/2000} &\simeq 629,45 \end{aligned}$$

3. Les différents types d'indices

(a) Les indices de prix.
Les formules d'indices de prix peuvent être nombreuses et variées mais, dans la pratique, elles sont généralement conduites avec les pondérations de Laspeyre ou Paasche :

Indice des prix de LASPEYRES	$I_{1/0} = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100$
Indice des prix de PAASCHE	$I_{1/0} = \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1} \times 100$

Ces formules sont applicables pour tout calcul d'indices concernant les prix.

(b) Les indices de quantité ou de volume

Ces formules sont applicables si l'on souhaite mesurer les variations de volume de production, d'échanges (exportation ou importation). Ici, on compare à prix constant deux quantités Q_0 et Q_1.

Indice des quantités de LASPEYRES	$I_{1/0} = \dfrac{\sum Q_1 P_0}{\sum Q_0 P_0} \times 100$
Indice des quantités de PAASCHE	$I_{1/0} = \dfrac{\sum Q_1 P_1}{\sum Q_0 P_1} \times 100$

Exercice 158 Soient 6 espèces de poissons dont on a relevé les prix et les quantités vendues par le même poissonnier à deux dates distinctes.

	01/09/08		01/09/09	
	Prix	Quantité	Prix	Quantité
Baudroie	20	2,6	18	2,7
Cabillaud	12	28,6	14	18,3
Lieu noir	6,50	35,4	8	44,2
Maquereau	3	16,8	3,50	21,1
Merlan	2,50	23,2	2,70	25,3
Sardine	2,20	22,3	2,10	21,7

1. Calculer l'indice de Laspeyres $I_{2009/2008}$ correspondant aux prix et quantités.
2. Calculer l'indice de Paasche $I_{2009/2008}$ correspondant aux prix et quantités.

Exercice 159 Un constructeur automobile fabrique 3 types de véhicules dont les prix et nombre de véhicules vendus pour les années 2002 et 2005 figurent ci-dessous :

	2002		2005	
	Quantité	Prix	Quantité	Prix
Bus	300	90000	200	100000
5 CV	200000	6000	150000	7000
8 CV	90000	8000	130000	10000

1. Calculer les indices particuliers de prix et de production des trois types de véhicules.
2. Calculer l'indice synthétique de prix, suivant la méthode de Paasche.
3. Calculer l'indice synthétique de production, suivant la méthode de Paasche.

5.4 Suites de nombres

5.4.1 Origine

Soient les nombres successifs V_0, V_1,. . . ,V_n.

– Ces nombres peuvent être obtenus de manière multiplicative (notion de coefficient multiplicateur)

$$V_1 = qV_0,\ V_2 = qV_1, \ldots, V_n = qV_{n-1},$$

on a alors une **suite géométrique** de raison q.

– Ces nombres peuvent également être obtenus de manière additive, par addition d'un coefficient r (ou raison)

$$V_1 = V_0 + r,\ V_2 = V_1 + r, \ldots, V_n = V_{n-1} + r,$$

on dit alors que les nombres V_0, V_1,. . . ,V_{n-1} forment une **suite arithmétique** de raison r.

5.4.2 Formules relatives aux suites arithmétiques et géométriques

– On considère une suite géométrique du type
$$V_n = V_0 \times q^n.$$
La somme des n premiers termes est donnée par la formule
$$\boxed{V_0 + V_1 + \ldots + V_n = \sum_{i=1}^{n} V_i = \left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right) \times V_0 \text{ si } q \neq 1}$$

– On considère une suite arithmétique du type
$$V_n = V_0 + n \times r$$
La somme des n premiers termes est donnée par la formule
$$\boxed{V_0 + V_1 + \ldots + V_n = \sum_{i=1}^{n} V_i = (n+1) \times \left(\frac{V_0 + V_n}{2}\right)}$$

5.4.3 Exemple classique de suite arithmétique : caisse d'épargne

Évolution sur un an d'un livret d'un montant "C_0", placé à intérêts simples à partir du 1er janvier 2000, à un taux annuel de 3%. Les intérêts surviennent toutes les quinzaines.

- 3% l'an $= \dfrac{3}{24}$% la quinzaine $= 0,125$% la quinzaine
- $C_1 = C_0 + C_0 \times 0,00125$ (intérêt + valeur, au bout d'une quinzaine)
  $C_2 = C_1 + C_0 \times 0,00125$
  $C_2 = C_1 + C_0 \times 0,00125$
  $\vdots$
  On s'aperçoit que les nombres C_0, C_1,…,C_{23} forment une suite arithmétique de premier terme C_0 et de raison $r = C_0 \times 0,00125$.
- Pour n compris entre 0 et 23, on a $C_n = C_0 + nC_0 \times 0,00125$ soit
  $$C_n = C_0(1 + n \times 0,00125).$$
- S'il s'agissait d'un même système mais à intérêts composés à un taux de $0,125$% la quinzaine, on aurait
  $$C_n = C_0(1,00125)^n.$$
  On voit bien la différence entre un phénomène additif et un phénomène multiplicatif.
- Prenons l'exemple d'une comparaison pour 5 quinzaines avec
  $C_0 = 10000$ euros.

	C_5	C_{10}	C_{15}	C_{20}	C_{23}
SA	$10062,5$	10125	$10187,5$	10250	$10287,5$
SG	$10062,65$	$10125,70$	$10189,15$	$10252,99$	$10291,48$

5.5 Exercices

Exercice 160 Répondez au QCM suivant en justifiant vos réponses

1. Un produit est vendu au prix hors-taxe de 6900 euros. Quel est le montant de la TVA si le taux est de $20,6$% ?
   (a) $1421,40$ euros
   (b) 1380 euros
   (c) 1400 euros

   (d) $1360,50$ euros

2. Quel intérêt produit un capital de 4700 euros placé à 5% pendant un an ?
   (a) 215 euros
   (b) 225 euros
   (c) 235 euros
   (d) 245 euros

3. Quel intérêt produit un capital de 7300 euros placé à 4% pendant 7 mois ?
   (a) 292 euros
   (b) 2044 euros
   (c) $1192,33$ euros
   (d) $170,33$ euros

4. En 2001, un entrepôt a vu son stock augmenter de 10% par rapport à 2000 puis décroître en 2002 de 10% par rapport à 2001. Exprimer en pourcentage la variation du stock de 2000 à 2002.
   (a) 0%
   (b) 1%
   (c) 3%
   (d) 5%

5. Le prix de revient d'un objet B a augmenté de 10%. Quelle baisse (en termes de pourcentages) l'entreprise doit-elle proposer pour ramener le prix de revient de l'objet à sa valeur antérieure ?
   (a) $9,1\%$
   (b) 10%
   (c) $10,7\%$
   (d) $11,4\%$

6. Prendre 4% de n revient à
   (a) diviser n par 5 puis diviser le résultat obtenu par 5,
   (b) multiplier n par 100 puis diviser le résultat obtenu par 4,
   (c) diviser n par 100 puis multiplier le résultat obtenu par 4,
   (d) multiplier n par $0,04$,
   (e) multiplier n par 4 puis diviser le résultat obtenu par 100.

Exercice 161 Sur un même montant, est-il plus avantageux d'obtenir une réduction de 12% puis une réduction de 8% ou deux réductions successives de 10% ?

Exercice 162 Sur 358 kg d'ordures ménagères (production moyenne d'un français en 2010), 52% sont stockés dans une décharge ; de ce qui reste, 2% sont recyclés et 53% sont incinérés. Combien de kilos sont ni stockés, ni recyclés, ni incinérés ?

Exercice 163 Compléter le tableau suivant

Prix normal	Prix réduit	Coefficient multiplicateur	Réduction	Pourcentage de réduction sur le prix normal
180				30%
150	126			
	162		88	
		$1,25$	43	
	110			$31,25\%$

Exercice 164 On suppose que le calcul de l'impôt sur le revenu en 2010, pour une part, soit fait d'après les pourcentages suivants par tranches de revenu imposable en euros :

revenus en euros	pourcentage
$]0; 4121]$	0
$]4121; 8104]$	$7,5$
$]8104; 14264]$	21
$]14264; 23096]$	31
$]23096; 37579]$	41
$]35579; 46343]$	$46,75$
≥ 46343	$52,75$

1. Calculer l'impôt pour un revenu imposable de 17000 euros.
2. Le total de vos revenus est de 22000 euros. Vous bénéficiez d'une déduction de 10% puis d'un abattement de 20%. Vous obtenez alors le revenu net imposable.
   – Par quel coefficient faut-il multiplier votre revenu pour obtenir ce revenu net imposable ?
   – Est-il vrai que vos revenus ont été ainsi diminués de 30% ?
   – Calculez votre impôt.

Exercice 165 Le tableau ci-dessous donne la quantité en tonnes de marchandises stockées par un entrepôt durant les cinq dernières années :

Année	1998	1999	2000	2001	2002
Quantité	1243	1567	1567	1443	2145

Calculer les 4 taux de croissance sur la quantité de marchandises stockées dans l'entrepôt en précisant s'il s'agit d'une baisse ou d'une hausse.

Exercice 166 Dire qu'un taux mensuel de $t'\%$ est équivalent à un taux annuel de $t\%$ signifie qu'un même capital placé pendant un an, à l'un ou à l'autre de ces **taux d'intérêts composés**, acquiert la même valeur.

1. (a) Calculer le taux mensuel équivalent à un taux annuel de 6%.
   (b) Vérifier que ce taux mensuel n'est pas de $\dfrac{6}{12}\%$.
2. Quel serait le taux annuel correspondant à un taux mensuel équivalent de $\dfrac{6}{12}\%$?
3. On appelle *taux acturiel*, le taux mensuel équivalent multiplié par $1,2$; calculer le taux acturiel d'un placement à un taux annuel de $4,5\%$
4. Deux capitaux égaux sont respectivement placés pendant trois ans et demi à 7% par an et pendant quatre ans et trois mois à $t\%$ par an. À la fin de la durée des placements, les valeurs acquises par ces capitaux sont égales. Calculer t.

Exercice 167 Le prix d'une certaine marchandise M a augmenté de 5% en 2001, puis à nouveau de 15% en 2002. On veut déterminer le taux annuel moyen d'augmentation de celle-ci.

1. Supposons qu'au 1er janvier 2001, le prix de M était égal à 100 euros. Calculer son prix au 31 décembre 2001 puis au 31 décembre 2002.
2. On suppose constant le taux d'augmentation annuel du produit M, que l'on note t (taux annuel moyen d'augmentation).
   (a) Quel est alors le prix de M au 31 décembre 2001 ? Au 31 décembre 2002 ?
   (b) On se propose de calculer t de telle manière que les prix calculés pour le 31 décembre 2002 coïncident, c'est-à-dire tels que $100 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^2 = 100 \times 1,05 \times 1,15$; calculer t.

Exercice 168 La location annuelle initiale d'un entrepôt se monte à 42000 euros. L'entreprise qui loue cet entrepôt s'engage à occuper les lieux durant sept années complètes. Le propriétaire des lieux propose deux contrats.

1. CONTRAT 1
   L'entreprise accepte chaque année une augmentation annuelle de 5% du loyer de l'année précédente.
   (a) Si u_1 est le loyer initial de la première année, exprimer le loyer u_n de la n-ième année en fonction de n.
   (b) Calculer la somme totale payée au bout des 7 années.
2. CONTRAT 2
   L'entreprise accepte chaque année une augmentation annuelle forfaitaire de 2400 euros.
   (a) Si v_1 est le loyer initial, exprimer le loyer v_n en fonction de n.
   (b) Cacluler la somme totale payée au bout des 7 années.
3. Conclure : quel est le contrat le plus avantageux ?

Exercice 169 Le tableau ci-dessous donne pour cinq années consécutives les variations et pourcentages, par rapport à l'année précédente, du stock de marchandises A et de marchandises B d'un entrepôt.

Rang de l'année		1	2	3	4	5
Taux de variation	marchandise A	$+23,5\%$	$+38,7\%$	$-36,2\%$	$+19\%$	$+42,5\%$
	marchandise B	$+18,4\%$	$+21,4\%$	$-8,7\%$	$+12,1\%$	$+32,5\%$

Notons A_0 la quantité de marchandises A à la fin de l'année de référence (ou année 0) et B_0 la quantité de marchandises B cette année là.

Notons A_i la quantité de marchandises A à la fin de l'année de rang i (avec $1 \leq i \leq 5$) et B_i la quantité de marchandises B cette année là.

1. Exprimer A_1 en fonction de A_0. Exprimer de même A_2, A_3, A_4 et A_5 en fonction de A_0.
2. On appelle *taux annuel moyen de variation de la marchandise A* , le taux annuel t_A tel que si la quantité de marchandises A avait varié chaque année de ce taux constant t_A, son cours serait encore A_5, c'est-à-dire la quantité obtenue au bout de cinq ans.
   (a) Donner une valeur approchée arrondie au dixième de t_A.
   (b) En procédant de manière analogue, déterminer le *taux annuel moyen de variation de la marchandise B* , notée t_B.

Exercice 170 Un capital de 70000 euros est placé pendant 4 ans à intérêts composés, la capitalisation étant trimestrielle. Le total des intérêts à l'issue du placement est de $42329,45$ euros.

1. Quelle est la valeur acquise du capital à l'issue des 4 années ?
2. Calculer le taux trimestriel d'intérêt.
3. En déduire le taux annuel de l'intérêt.

Exercice 171 Un constructeur automobile fait transiter des véhicules entre 2007 et 2010 via un entrepôt dont vous êtes gestionnaire. Le tableau ci-dessous donne selon le type de voiture l'évolution du prix ainsi que celle de la quantité entre les deux années.

	2007		2010	
	Quantités	Prix (euros)	Quantités	Prix (euros)
5 CV	300	7800	327	7650
7 CV	430	9600	427	9800
10 CV	45	14000	67	14600

1. Calculer les indices particuliers de prix des trois types de véhicules.
2. Réaliser le même travail avec la quantité.
3. Calculer les taux de variation du prix et de la quantité pour chaque type de véhicule entre les deux années de référence.

Exercice 172 Soit le tableau ci-dessous décrivant l'évolution de certains indices, suivant :

Année	1985	1995	1997	2005	2010
Minimum vieillesse	100	500	700	1200	1340
SMIC	100	400	560	900	1190
Revalorisation des pensions	100	350	490	700	790
Indice des prix	100	240	300	490	510
RDB par habitant **en euros**	1800	6120	7400	12900	15470

1. Pour les cinq rubriques, donner le coefficient multiplicateur :
   (a) de 1985 à 1997
   (b) de 1997 à 2010
2. Calculer l'indice du RDB base 100 en 1985, en 1995, 1997, 2005 et 2010. Comparer l'évolution de cet indice avec les précédents.

Exercice 173 On se donne le tableau suivant, traitant d'une marchandise particulière et des variations du stock de cette dernière en tonnes entre 2003 et 2010 :

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Stock (tonnes)	2,83	10,41	13,03	35,69	27,53	12,97	20,50	14,76

1. Calculer les taux de croissance de 2003 à 2004 et de 2005 à 2007.
2. Calculer le pourcentage d'évolution de 2008 à 2009.
3. On prend l'indice du stock base 100 en 2006. Calculer l'indice du stock en 2007, 2008, 2009 et 2010.

Chapitre 6

Les primitives

6.1 Introduction

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = 3x^2 + x - 5.$$

Existe-t-il une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $F' = f$?

Réponse : F est définie par

$$F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + c$$

où c est une constante réelle arbitraire. F est appelée *fonction primitive* de f sur $\mathbb{R}$.

6.2 Existence des fonctions primitives

Définition 6.2.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que F est une fonction primitive de f sur I pour exprimer que*

- *F est dérivable sur I,*
- *$F' = f$.*

Exemple 6.2.1 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2} + 2x^2 + x - 3$$

avec $I =]0; +\infty[$. Alors les fonctions primitives de f sont définies par

$$F(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{x} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + c$$

où c est une constante réelle arbitraire. f admet une infinité de primitives puisque c peut prendre une infinité de valeurs.

Théorème 6.2.1 *Toute fonction continue sur I admet des fonctions primitives sur I.*

Théorème 6.2.2 *Soit F une fonction primitive de f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Toutes les fonctions primitives de f sur I sont les fonctions G définies par*

$$\forall x \in I,\ G(x) = F(x) + c$$

où c est une constante arbitraire.

Théorème 6.2.3 - *Primitives prenant une valeur donnée en un point donné.*

1. *Soit une fonction f définie sur I, x_0 un point de I, y_0 un réel donné. Il existe une seule fonction primitive G de f sur I qui prend la valeur y_0 au point x_0 soit*

$$G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$$

où F est une fonction primitive quelconque de f sur I.

2. *La fonction primitive G prenant la valeur 0 en x_0 est définie par*

$$G(x) = F(x) - F(x_0)$$

où F est une fonction primitive quelconque de f sur I.

Preuve : Soit F une fonction primitive de f sur I. On recherche une fonction primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.
On sait que deux fonctions primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante donc G est définie par

$$G(x) = F(x) + c$$

Or $G(x_0) = y_0 = F(x_0) + c$ donc $c = y_0 - F(x_0)$ et $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ ce qui prouve 1.

Si la fonction G prend la valeur 0 en x_0, cela signifie que $G(x_0) = y_0 = 0$ donc $G(x) = F(x) - F(x_0)$ ce qui prouve 2. ■

Exemple 6.2.2 Soit $f(x) = x^2 + 1$. Déterminer la fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 2 au point 3.
Une primitive F de f est donnée par $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x$. Alors on sait que $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ est la primitive recherchée en considérant $x_0 = 3$ et $y_0 = 2$. Comme $F(x_0) = F(3) = 12$, la fonction primitive de f prenant la valeur 2 au point 3 est égale à

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 12 + 2 = \frac{1}{3}x^3 + x - 10.$$

Remarque 6.2.1 On pouvait retrouver cette fonction en considérant directement les primitives de f soit $G(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x + c$ où c est une constante réelle arbitraire. Or $G(3) = 2 = \dfrac{1}{3}(3)^3 + 3 + c \Leftrightarrow c = 10$. La fonction primitive de f prenant la valeur 2 au point 3 est égale à

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 10.$$

6.3 Les primitives usuelles

1. Soient deux fonctions f et g continues sur l'intervalle I, F et G des fonctions primitives de f et g sur I respectivement, α et β deux réels quelconques.
   La fonction $h = \alpha f + \beta g$ a pour fonction primitive sur I

$$H = \alpha F + \beta G$$

2. Tableau de primitives usuelles

Intervalle	Fonction	Fonction primitive
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=0$	$F(x)=c$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=a$	$F(x)=ax+c$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=x$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+c$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=x^2$	$F(x)=\frac{1}{3}x^3+c$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=x^n$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$
$I=]-\infty,0[$ ou $I=]0;+\infty[$	$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}+c$
$I=]0;+\infty[$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+c$
$I=]0;+\infty[$	$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)+c$
$I=]-\infty;0[$	$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln(-x)+c$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+c$
$I=]0;+\infty[$	$f(x)=x^n$ avec $n\in\mathbb{R}-\{-1\}$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=(ax+b)^n$	$F(x)=\frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1}+c$
pour $x\neq-\frac{b}{a}$	$f(x)=\frac{1}{(ax+b)^2}$	$F(x)=-\frac{1}{a(ax+b)}+c$
pour $ax+b>0$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$F(x)=\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+c$
$x\neq-\frac{b}{a}$	$f(x)=\frac{1}{ax+b}$	$F(x)=\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+c$
$I=\mathbb{R}$	$f(x)=e^{ax+b}$	$F(x)=\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$

3. Soit u une fonction dérivable sur I.
   (a) $f=u'u^n$ a pour fonction primitive $F=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$.
   (b) $f=\frac{u'}{u^2}$ a pour fonction primitive $F=\frac{-1}{u}+c$.
   (c) $f=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ a pour fonction primitive $F=2\sqrt{u}+c$ avec $u(x)>0$ sur I.
   (d) $f=\frac{u'}{u}$ a pour fonction primitive $F=\ln\lvert u\rvert+c$ avec $u(x)\neq 0$ sur I.
   (e) $f=u'e^u$ a pour fonction primitive $F=e^u+c$.

6.4 Exercices

Exercice 174 Déterminer les fonctions primitives de

1. $f(x)=(2x+1)^5$, $I=\mathbb{R}$.

2. $f(x) = \dfrac{3}{(2x+1)^2}$, $I = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.
3. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{4x+1}}$, $\mathcal{D} = \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$.
4. $f(x) = \dfrac{5}{2x+5}$, $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$.
5. $f(x) = (2x+1)(x^2+x+3)^4$, $D = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+5)^2}$, $D = \mathbb{R}$.
7. $f(x) = xe^{x^2+1}$, $D = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+5}$, $D = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $D = \mathbb{R}^{+*}$.
10. $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$, $D = \mathbb{R}^{+*}$.
11. $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$, $D =]0;1[\cup]1;+\infty[$.
12. $f(x) = \dfrac{1}{x(1+\ln x)^2}$, $D = \left]0; \dfrac{1}{e}\right[\cup \left]\dfrac{1}{e}; +\infty\right[$.
13. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$, $D = \mathbb{R}$.
14. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+2}$, $D = \mathbb{R} - \{-2\}$.

Exercice 175 Dérivée et primitives.

1. Calculez la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = 3x^3 - 9x + 1$.
2. Déduisez-en deux primitives de la fonction g définie par $g(x) = 9x^2 - 9$.
3. Déterminez le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 176 Déterminez une primitive de f sur un intervalle contenu dans son ensemble de définition (usage des tableaux de primitives usuelles).

1. $f(x) = 2x + 1$
2. $f(x) = 10x^4 + 6x^3 - 1$
3. $f(x) = (x-1)(x+3)$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - x^2$
5. $f(x) = -\dfrac{4}{3x^5}$
6. $f(x) = x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Exercice 177 Primitive et constante.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3x - 1 + \dfrac{2}{x^2}$.
Déterminez la primitive F de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.

Exercice 178 Trouvez la primitive F de f sur I vérifiant la condition donnée

1. $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$, $I = \mathbb{R}$, $F(1) = 0$,
2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I =]0; +\infty[$, $F(1) = 1$.

Exercice 179 Déterminez une primitive des fonctions données (forme $u'u^n$).

1. $f(x) = 3(3x+1)^4$
2. $f(x) = 16(4x-1)^3$
3. $f(x) = (2x+7)^6$
4. $f(x) = (6x-2)(3x^2-2x+3)^5$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^4$

Exercice 180 Déterminez une primitive des fonctions données (forme $\dfrac{u'}{u^2}$).

1. $f(x) = \dfrac{4}{(1+4x)^2}$
2. $f(x) = \dfrac{6}{(2x+1)^2}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{(4x+3)^2}$
4. $f(x) = \dfrac{-1}{(2-x)^2}$
5. $f(x) = \dfrac{2}{(4-3x)^2}$
6. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$
7. $f(x) = \dfrac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}$

Exercice 181 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x+4}{(x+1)^3}$.

1. Déterminez les réels a et b tels que, pour tout $x \neq -1$, $f(x) = \dfrac{a}{(x+1)^2} + \dfrac{b}{(x+1)^3}$.
2. En déduire une primitive F de f sur $]-1; +\infty[$.

Exercice 182 Déterminez une primitive des fonctions données (forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$).

1. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+2}}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-5x}}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$
4. $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$
5. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Chapitre 7

Intégration

7.1 Définition

Définition 7.1.1 *Soient f une fonction continue sur un intervalle $I = [a;b]$ de $\mathbb{R}$ et F une fonction primitive de f sur I. On nomme intégrale de f sur $[a,b]$ le réel noté*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Exemple 7.1.1 Soit $J = \displaystyle\int_1^3 (2x+1)dx$. Si on pose $f(x) = 2x+1$, les primitives de f sont données par $F(x) = x^2 + x + c$. Alors,

$$\int_1^3 (2x+1)dx = [F(x)]_1^3 = F(3) - F(1) = (12+c) - (2+c) = 10.$$

Remarque 7.1.1

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est indépendante de la constante utilisée pour définir une fonction primitive de f.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ se lit "intégrale (ou somme) de a à b de $f(x)dx$".
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ peut encore s'écrire $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$.
- On a en particulier

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

  En effet, $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$.
- On a la relation

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

  En effet, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$.

7.2 Intégrales et inégalités

Proposition 7.2.1 *Soit une fonction f continue sur $[a,b]$ avec $a < b$. Alors, $\forall x \in [a,b]$*

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

(La réciproque est fausse.)

Exemple 7.2.1 On considère la fonction f définie par $f(x) = x$ sur $[-1, 2]$. On a le tableau de signes suivant :

x	-1	0	2
signe de $f(x)$	$-$		$+$

donc f n'a pas de signe constant sur $[-1, 2]$. Or, $\displaystyle\int_{-1}^{2} x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2} > 0$ ce qui illustre bien le fait que la réciproque est fausse.

Proposition 7.2.2 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ avec $a < b$. Alors, $\forall x \in [a, b]$*

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(La réciproque est également fausse.)

Preuve : On pose $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$. On utilise ensuite le résultat précédent soit

$$\int_a^b h(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx.$$

Ce résultat permet d'approcher une intégrale qui semble difficile à calculer, cela à l'aide d'un encadrement sur la fonction initiale.

Exemple 7.2.2 Soit $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$, déterminer un encadrement de J.

$$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq t^2 + 1 \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{t^2+1} \leq 1.$$

On intègre ensuite cette inégalité sur l'intervalle $[0, 1]$. On obtient alors

$$\int_0^1 \frac{1}{2}dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \leq \int_0^1 1.dt \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \leq 1.$$

7.3 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Proposition 7.3.1 *Soient une fonction f continue sur $[a, b]$ et c un élément de $[a, b]$. La fonction*

$$\begin{array}{rcl} G : [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & G(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)dt \end{array}$$

est la fonction primitive de f, qui s'annule en c.

Preuve : Il est simple de vérifier que G s'annule en c car $G(c) = \displaystyle\int_c^c f(t)dt = 0$. Soit ensuite F une fonction primitive de f, il est alors évident que $G(c) = [F(t)]_x^c = F(x) - F(c)$. Comme $G'(x) = F'(x) = f(x)$, G est une fonction primitive de f.

Exemple 7.3.1 Soit h la fonction définie par

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^{+\star} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}. \end{array}$$

La fonction logarithme népérien est la fonction primitive de f, définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, s'annulant en 1.

7.4 Intégration par parties

Théorème 7.4.1 *Soient deux fonctions u et v dérivables sur $[a,b]$ et les fonctions u' et v' continues sur $[a,b]$. On a alors la relation*

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx}$$

Preuve : Il suffit pour retrouver la formule précédente de dériver la fonction $f = uv$ puis d'intégrer les différents termes obtenus sur $[a,b]$. On a $f'(x) = (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ puis

$$\int_a^b f'(x)d(x) = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx$$
$$\Leftrightarrow [f(x)]_a^b = [u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(v)v'(x)dx$$

Exemple 7.4.1 Soit $I = \displaystyle\int_0^1 (2x+1)(x-1)^{10}dx$. On pose

$$\begin{array}{ll} u(x) = 2x+1 & u'(x) = 2 \\ v'(x) = (x-1)^{10} & v(x) = \dfrac{1}{11}(x-1)^{11} \end{array}$$

En appliquant la formule, on obtient

$$I = \left[\frac{(2x+1)(x-1)^{11})}{11}\right]_0^1 - \frac{2}{11}\int_0^1 (x-1)^{11}dx$$

$$\Leftrightarrow I = \left[\frac{(2x+1)(x-1)^{11})}{11}\right]_0^1 - \left[\frac{2}{11\times 12}(x-1)^{12}\right]_0^1 = \frac{5}{66}$$

Exemple 7.4.2 Soit $I = \displaystyle\int_1^e \ln x dx$. On pose

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln x & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{array}$$

En appliquant la formule, on obtient

$$I = [x\ln x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}.xdx$$

$$\Leftrightarrow I = [x\ln x]_1^e - [x]_1^e = [x\ln x - x]_1^e = (e\ln e - e) - (1\ln 1 - 1) = e - e + 1 = 1$$

Exemple 7.4.3 Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)dx$. On pose

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln(x+1) & u'(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x+1 \end{array}$$

En appliquant la formule, on obtient

$$I = [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 1dx \Leftrightarrow I = [(x+1)\ln(x+1) - x]_0^1$$

$$\Leftrightarrow I = (2\ln 2 - 1) - (1.\ln 1 - 0) = 2\ln 2 - 1$$

Exemple 7.4.4 Soit $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) dx$. On pose

$$u(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = \ln(2-x) - \ln(2+x) \quad u'(x) = -\frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x}$$
$$v'(x) = 1 \qquad v(x) = x$$

En appliquant la formule, on obtient

$$I = \left[x\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{4x}{4-x^2} dx$$

$$\Leftrightarrow I = \left[x\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) - 2\ln(4-x^2)\right]_{-1}^{1}$$

$$\Leftrightarrow I = \left(\ln\frac{1}{3} - 2\ln 3\right) - (-1\ln 3 - 2\ln 3) = \ln 3 + \ln\frac{1}{3} = \ln 3 - \ln(-3) = 0$$

Exemple 7.4.5 Soit $I = \displaystyle\int_{0}^{1} (2x+1)e^{-x} dx$. On pose

$$u(x) = 2x+1 \quad u'(x) = 2$$
$$v'(x) = -e^{-x} \quad v(x) = e^{-x}$$

En appliquant la formule, on obtient

$$I = \left[-(2x+1)e^{-x}\right]_0^1 + 2\int_0^1 e^{-x} dx$$

$$\Leftrightarrow I = \left[-(2x+1)e^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^1 = \left[-(2x+3)e^{-x}\right] = -5e^{-1} + 3 = 3 - \frac{5}{e}$$

Exemple 7.4.6 Soit $I = \displaystyle\int_{0}^{1} (x^2+x+1)e^{-x} dx$. On pose

$$u(x) = x^2+x+1 \quad u'(x) = 2x+1$$
$$v'(x) = e^{-x} \quad v(x) = -e^{-x}$$

En appliquant la formule, on obtient

$$I = \left[-(x^2+x+1)e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (2x+1)e^{-x} dx$$

or $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)e^{-x} dx$ a été calculée dans l'exercice précédent. Finalement,

$$I = \left[-(x^2+x+1)e^{-x}\right]_0^1 + (3 - \frac{5}{e}) = (-\frac{3}{e} + 1) + (3 - \frac{5}{e}) = 4 - \frac{8}{e}$$

Remarque 7.4.1 Cet exemple peut être traité d'une autre façon : on pose $f(x) = (x^2+x+1)e^{-x}$. Une primitive de f est F définie par $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$. Déterminons a, b et c. $\forall x \in [0,1]$,
$F'(x) = (2ax+b)e^{-x} - (ax^2+bx+c)e^{-x} \Leftrightarrow [-ax^2 + (2a-b)x + b - c]e^{-x} = (x^2+x+1)e^{-x}$.

On résout le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} -a &=& 1 \\ 2a-b &=& 1 \\ b-c &=& 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -1 \\ b &=& -3 \\ c &=& -4 \end{array}\right.$$

et on obtient $F(x) = (-x^2-3x-4)e^{-x}$. Donc,

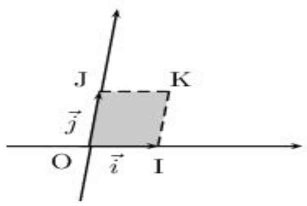
$$I = F(1) - F(0) = -8e^{-1} + 4 = 4 - \frac{8}{e}$$

7.5 Le calcul d'aire

Soient f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$.

7.5.1 L'unité d'aire

L'*unité d'aire* est l'aire du domaine plan limité par le parallélogramme OIJK.



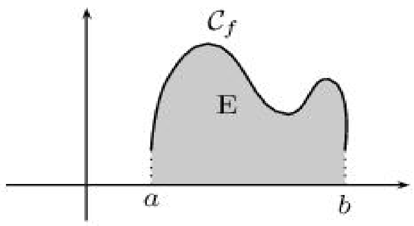
Exemple 7.5.1

- $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = 1$ cm, $\|\vec{j}\| = 2$ cm alors l'unité d'aire est 2 cm^2.
- $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm alors l'unité d'aire est 4 cm^2.

7.5.2 Cas où $f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a, b]$

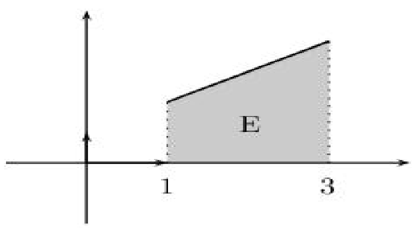
Soit E le domaine plan limité par la droite des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$, $x = b$ soit

$$E = \{M(x, y)/a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$



L'aire de E est $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$ exprimée en unités d'aire.

Exemple 7.5.2 Soit la fonction f définie par $f(x) = x + 1$ sur $[1, 3]$. Soit φ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 1$cm, l'unité d'aire est 1cm^2. L'aire de E vaut

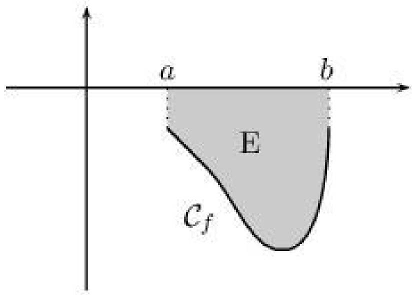


$$\mathcal{A}(E) = \int_1^3 (x + 1)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^3 = 6 \text{ cm}^2.$$

7.5.3 Cas où $f(x) \leq 0, \ \forall x \in [a, b]$

Soit E le domaine plan limité par la droite des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$, $x = b$ soit

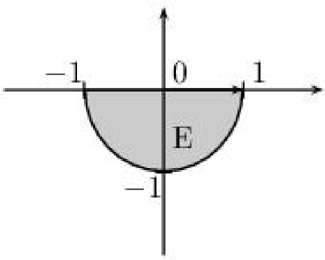
$$E = \{M(x, y)/a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$$



L'aire de E est $\boxed{-\int_a^b f(x)dx}$ exprimée en unités d'aire.

Exemple 7.5.3 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1$ sur $[-1, 1]$. L'ensemble E est défini par

$$E = \{M(x, y)/ - 1 \leq x \leq 1, f(x) \leq y \leq 0\}$$

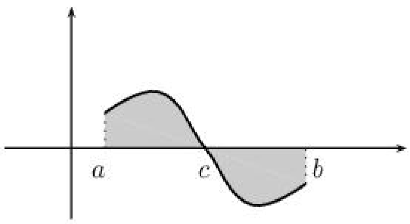


L'aire de E vaut

$$\mathcal{A}(E) = -\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3} \text{ cm}^2.$$

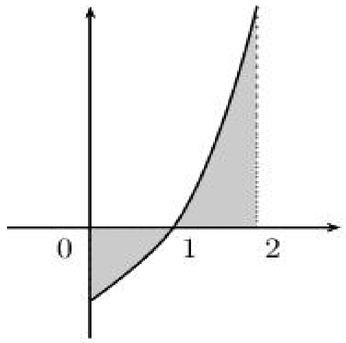
7.5.4 Cas où $f(x)$ n'a pas de signe constant sur $[a, b]$

Soit E le domaine plan limité par la droite des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$, $x = b$. L'aire de E est



$$\boxed{\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx},$$

exprimée en unités d'aire.



Exemple 7.5.4 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1$ sur $[0, 2]$. Alors l'aire de E vaut

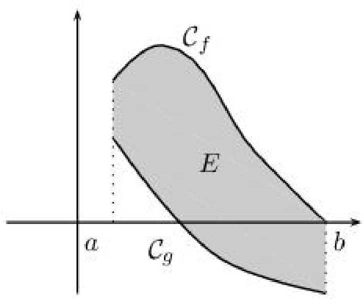
$$\mathcal{A}(E) = -\int_0^1 (x^2 - 1)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx$$

Soit F une fonction primitive de f définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, alors

$$\mathcal{A}(E) = -F(1) + F(0) + F(2) - F(1) = F(0) + F(2) - 2F(1) = 2 \text{ cm}^2.$$

7.5.5 Aire définie à partir de deux fonctions

Soient deux fonctions f et g continues sur $[a, b]$ et on suppose que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq g(x)$. E est le



domaine plan limité par les droites d'équations $x = a$, $x = b$, les courbes représentatives des fonctions f et g. L'aire de E est définie par

$$\boxed{\int_a^b (f(x) - g(x))dx}$$

Remarque 7.5.1 Dans ce cas, la position des courbes par rapport à la droite des abscisses n'a pas d'importance.

Exemple 7.5.5 Soient les fonctions f et g définies respectivement par $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = x$ sur $[-1, 2]$. On définit

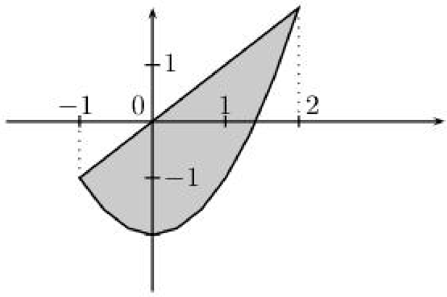
$$E = \{M(x, y) / -1 \leq x \leq 2, x^2 - 2 \leq y \leq x\}$$

L'aire de E est donnée par

$$\mathcal{A}(E) = \int_{-1}^2 [x - (x^2 - 2)]dx.$$

On pose $h(x) = x - x^2 + 2$. Une primitive de h est donnée par $H(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 2x$. Finalement,

$$\mathcal{A}(E) = H(2) - H(-1) = (2 - \frac{8}{3} + 4) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2) = 8 - 3 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \text{ cm}^2.$$



7.6 Exercices

Exercice 183

1. Calculer l'aire du domaine E en unités d'aire avec $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 1$:
   (a) $[a; b] = [-1; 1]$, $f(x) = x^2 + 1$,
   (b) $[a; b] = \left[\frac{1}{3}; 1\right]$, $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$,
2. Calculer l'aire du domaine E en unités d'aire avec $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 1$:
   (a) $[a; b] = [-1; 1]$, $f(x) = x^2 - 1$,
   (b) $[a; b] = [-4; -2]$, $f(x) = x + 2$,
3. Calculer l'aire du domaine E en unités d'aire avec $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 1$:
   (a) $[a; b] = [0; 2]$, $f(x) = x^2 - 1$,
   (b) $[a; b] = [-2; 2]$, $f(x) = x + 1$,

Exercice 184 Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Soit x la quantité produite en tonnes. Le coût total de production pour x unités est exprimé en milliers d'euros par :

$$C_T(x) = x^3 - 15x^2 + 76x.$$

Soit E le domaine plan limité par la courbe, la droite des abcisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 5$.

1. Représenter graphiquement le domaine plan E.
2. Déterminer l'aire du domaine plan E, en unités d'aire (ex : si $\| \vec{i} \| = 1$ cm, $\| \vec{j} \| = 2$ cm, u.a=2cm^2 ; si $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 2$ cm, u.a=4cm^2).

Exercice 185 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \dfrac{x}{x^2+1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe reprsentative dans un repère orthonormal (unité : 2 cm). La droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ à l'infini. Soit (E) le domaine limité par $\mathcal{C}$, Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

1. Sans tracer $\mathcal{C}$, situer $\mathcal{C}$ par rapport à Δ sur $[0; 2]$.
2. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine (E). Donner une valeur approchée de l'aire (E) au mm^2 près.

Exercice 186 À la rentrée scolaire, une étude statistique s'intéresse au prix des classeurs. Les fonctions f et g définies par

$$f(x) = 4\ln\left(\frac{6}{x}\right) \text{ et } g(x) = 4\ln(2x - 1)$$

représentent respectivement les quantités demandées et offertes, c'est-à-dire :

– pour les quantités de classeurs exprimées en milliers, que les consommateurs sont prêts à acheter en fonction du prix unitaire x du classeur exprimé en euros ;
– pour les quantités de classeurs exprimées en milliers, que les producteurs sont prêts à vendre en fonction du prix unitaire x du classeur exprimé en euros.

Partie A.

1. Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{array}\right.$.
   L'intervalle I, solution du système, est l'intervalle d'étude du modèle.
2. Étudier les variations de f et de g sur I.
   Tracer les représentations graphiques respectives et de f et de g, dans un plan muni d'un repère orthogonal : on prendra 2 cm pour 1 euro en abscisse et 2 cm pour 1 millier de classeurs en ordonnée.
3. Déterminer les coordonnées du point K intersection de f et g sur I. La valeur est appelée prix d'équilibre.
4. Quel est le revenu total des producteurs pour le prix d'équilibre ?

Partie B.

1. Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = 4\left(x\ln\left(\dfrac{6}{x}\right) + x\right)$. Montrer que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.
2. Les consommateurs se procurent les quantités offertes à un prix supérieur à celui d'équilibre. La somme totale alors perçue en plus par les producteurs est représentée par l'aire de la partie du plan située entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_0$ et $x = 6$, où x_0 est le prix d'équilibre ; elle traduit le surplus des consommateurs. Calculer ce surplus en euros

Exercice 187 Sachant que le coût marginal de la production d'un bien est donné par la relation

$$C_{ma}(q) = 3q^2 - 8q$$

en fonction de la quantité produite et que les coûts fixes sont évalués à $C_T(0) = 4$, déterminer l'expression du coût total de la production $C_T(q)$ et du coût moyen $C_m(q)$.

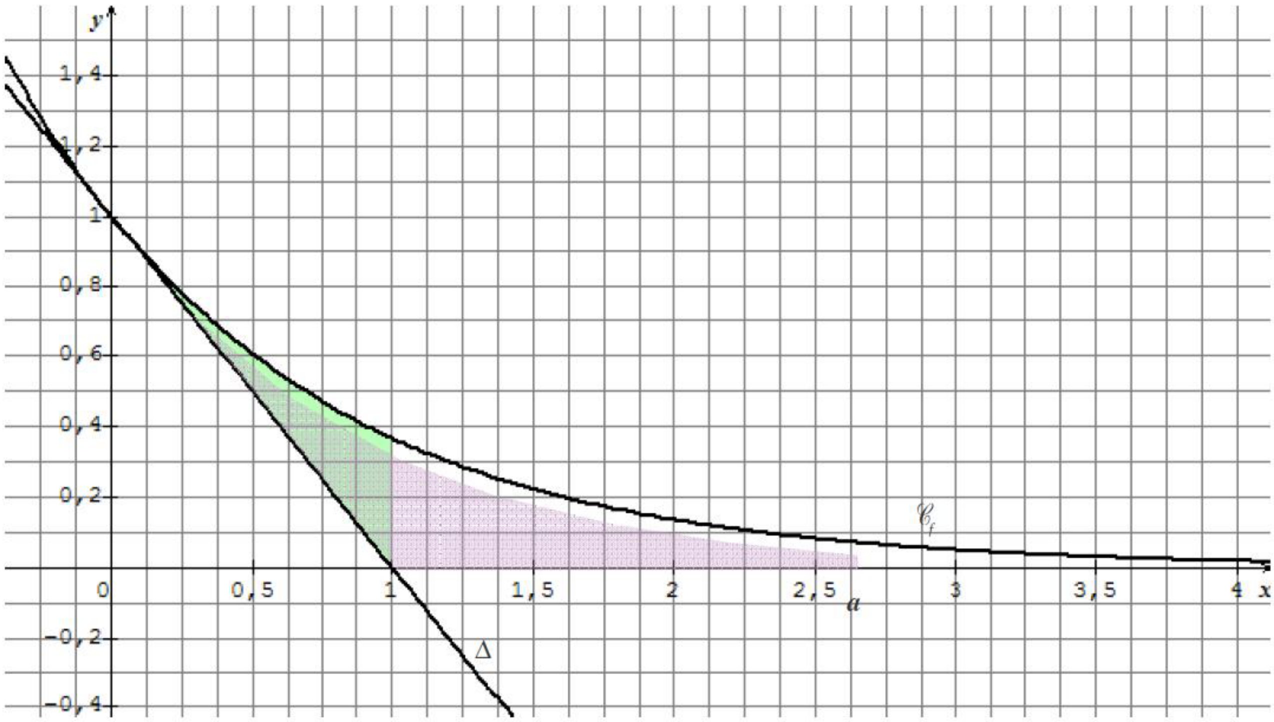
Exercice 188 On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = -x + 1$ et $h(x) = f(x) - g(x)$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et Δ la droite représentant la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Partie A. Position relative de $\mathcal{C}_f$ et de l'une de ses tangentes.

1. Vérifier, par le calcul, que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite Δ.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 1 - e^{-x}$.
   (b) Étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.
   (c) En déduire le sens de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
3. En utilisant les questions 1. et 2., étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B. Calcul d'aire.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$.
2. Soit a un nombre réel vérifiant $a > 1$. On appelle D le domaine colorié sur le graphique en annexe. On note A l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine D.
   (a) Déterminer en fonction de a la valeur de A.
   (b) Déterminer la limite de A lorsque a tend vers $+\infty$.



Exercice 189 On considère la fonction f définie sur $[-2;2]$ par $f(x) = (x-1)e^x + 2$. On note f' sa dérivée.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $f(-2)$, $f(0)$ et $f(2)$.
2. Calculer $f'(x)$. Donner le tableau de variations de f sur $[-2;2]$.
3. On considère les points $A(1;2)$ et $B(0;2-e)$. Démontrer que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.
4. Construire avec précision la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de f dans un repère orthogonal (unités : 4 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).
5. On admet que la fonction F définie par $F(x) = (x-2)e^x + 2x$ est une primitive de la fonction f sur $[-2;2]$. Hachurer la partie $\mathcal{A}$ du plan délimitée par les axes du repère, la droite d'équation $x = 2$ et la courbe $\mathcal{C}_f$. Calculer la mesure en cm^2 de l'aire $\mathcal{A}$.

Chapitre 8

Les fonctions à plusieurs variables

8.1 Définitions et exemples

Définition 8.1.1 *Une fonction de deux variables est définie par*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

Exemple 8.1.1

- Soit
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{2x+y}{x^2+y^2-1} \end{array}$$
Le domaine de définition de f est défini par $\mathcal{D}_f = \{(x,y)/x^2+y^2-1 \neq 0\}$. Or $x^2+y^2=1$ est l'équation du cercle de centre 0 et de rayon 1 donc $\mathcal{D}_f$ est par conséquent le plan privé des points du cercle $\mathcal{C}(0,1)$.
- Soit
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \sqrt{x+y-1} \end{array}$$
On a dans ce cas $\mathcal{D}_f = \{(x,y)/x+y-1 \geq 0\}$. Soit D la droite d'équation $x+y-1=0$. Cette droite partage le plan en deux demi-plans (I) et (II). Alors, pour tout point $M(x,y)$ situé dans le demi-plan (I), $x+y-1>0$. Finalement, le domaine définition est le demi-plan (I) avec sa frontière, la droite D.

8.2 Graphe d'une fonction de deux variables

Une première façon de visualiser une fonction de deux variables est de se tourner vers sa représentation graphique. On rappelle que le graphique de f est une surface d'équation $z=f(x,y)$.

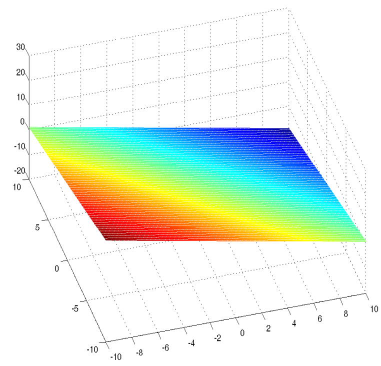
Définition 8.2.1 *Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. Le* ***graphe*** *de cette fonction est l'ensemble des triplets $(x,y,f(x,y))$ avec $(x,y)\in\mathcal{D}_f$.*

Définition 8.2.2 *Si on considère un repère orthonormé $\mathcal{R}=(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, la* ***surface*** *est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ dont l'équation est donnée par $z=f(x,y)$.*

Exemple 8.2.1 Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 1-x-y \end{array}$$

La surface a pour équation $z=1-x-y$ ou $x+y+z=1$. Cette surface est un plan qui rencontre les axes de coordonnées aux points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$:



Exercice 190 Tracer le graphique de $g(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$.
Une autre façon de visualiser des fonctions, empruntée aux cartographes, est un diagramme de courbes de niveau où des points d'élévation constante sont reliés pour former une courbe de niveau.

Définition 8.2.3 *On appelle* ***ligne (ou courbe) de niveau de côte*** c *l'ensemble des points* $M(x,y)$ *tels que* $f(x,y)=c$. *Cette ligne de niveau est notée* Γ_c. *C'est encore l'ensemble des couples* (x,y) *antécédents du réel* c *par la fonction* f.

L'exemple le plus familier de courbes de niveau est celui des cartes topographiques des régions montagneuses. Les courbes de niveau sont des courbes d'altitude constante au dessus du niveau de la mer. Un autre exemple très commun est la fonction de température. Les courbes de niveau dans ce contexte sont appelées des courbes isothermales. Elles joignent des points de même température.

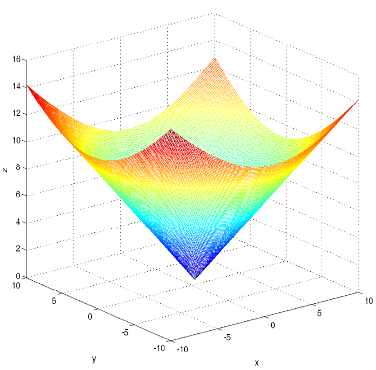
Remarque 8.2.1 L'ensemble des points $N(x,y,c)$ est l'intersection de la surface S et du plan parallèle à $(0,\vec{i},\vec{j})$, d'équation $z=c$.

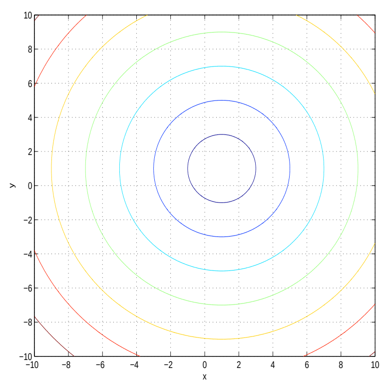
Exemple 8.2.2
– Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} \end{array}$$

$f(x,y)=c \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=c$. On a alors les cas suivants :
. $c<0$, $\Gamma_c=\emptyset$, les plans d'équations $z=c$ avec $c<0$ ne rencontrent pas la surface S.
. $c=0$, le plan d'équation $z=0$ (donc le plan $(0,\vec{i},\vec{j})$) rencontre la surface S en un seul point $(1,1,0)$.
. $c>0$, $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=c \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=c^2$, qui est l'équation d'un cercle de centre $(1,1)$ et de rayon c. Le plan d'équation $z=c$ (plan parallèle à $(0,\vec{i},\vec{j})$) rencontre la surface S suivant un cercle de centre $(1,1,c)$ de rayon c.

On a les graphiques suivants :





– Soit

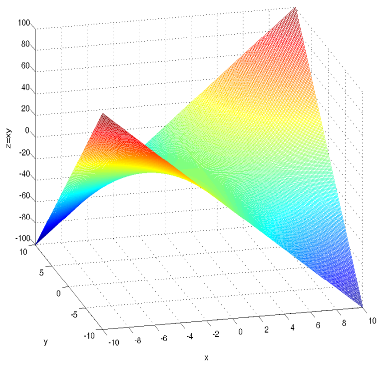
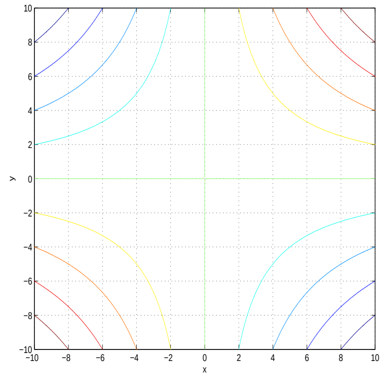
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & ax+by+d \end{array}$$

La ligne de niveau Γ_c est l'ensemble des points N tels que $ax + by + d = c$ qui est l'équation d'une droite.

– Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$$

La ligne de niveau Γ_c avec $c \neq 0$ a pour équation $xy = c$, équation d'une famille d'hyperboles.

Exercice 191 Dessiner les courbes de niveau de la fonction $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

Exercice 192 Dessiner quelques courbes de niveau de la fonction $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

Remarque 8.2.2 Une fonction de trois variables f est une règle qui assigne à chaque triplet ordonné (x, y, z) dans le domaine de définition $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^3$ un unique nombre réel, noté $f(x, y, z)$. Par exemple, comme la température en un point de la Terre dépend de la longitude x, de la latitude y du point et du moment t, on peut écrire $T = f(x, y, t)$. Il est très difficile de visualiser une fonction de trois variables par son graphique, vu que celui-ci devrait se trouver dans un espace à quatre dimensions. Néanmoins, examiner ses **surfaces de niveau** permet de comprendre un peu mieux le comportement de f. Ce sont les surfaces d'équations $f(x, y, z) = k$, où k est une constante. Tant que (x, y, z) se déplace sur une surface de niveau, la valeur de $f(x, y, z)$ reste inchangée.

8.3 Dérivées partielles

8.3.1 Définition

Soient f une fonction de deux variables admettant $\mathcal{D}_f$ pour domaine de définition et $M_0(x_0, y_0)$ un point intérieur à $\mathcal{D}$.

Définition 8.3.1 *On considère la fonction*

$$\varphi_{y_0} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi_{y_0}(x) = f(x, y_0) \end{array}.$$

Si la fonction φ_{y_0} est dérivable en x_0,

$$\varphi'_{y_0}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi_{y_0}(x_0 + h) - \varphi_{y_0}(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

*$\varphi'_{y_0}(x_0)$ est appelée **dérivée partielle de f par rapport à la variable** x en (x_0, y_0). Cette dérivée est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.*

Exemple 8.3.1 Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$. On pose $\varphi_{y_0}(x) = x^2 + y_0^2$. La dérivée partielle de f par rapport à la variable x en $(x, 1)$ est égale à la dérivée de $\varphi_1(x) = x^2 + 1$ soit $\varphi'_1(x) = 2x$.

Définition 8.3.2 *On considère la fonction*

$$\begin{array}{rccl} \phi_{x_0}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \phi_{x_0}(y) = f(x_0, y) \end{array}.$$

Si la fonction ϕ_{x_0} est dérivable en y_0,

$$\phi'_{x_0}(y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{\phi_{x_0}(y_0+k) - \phi_{x_0}(y_0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

$\phi'_{x_0}(y_0)$ est appelée ***dérivée partielle de f par rapport à la variable y en*** *(x_0, y_0). Cette dérivée est notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.*

Exemple 8.3.2 Soit $f(x,y) = x^3 + 2y^2$. On considère $x_0 = 2$. Alors, $\phi_2(y) = 8 + 2y^2$ et $\phi'_2(y) = 4y$. Par conséquent, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2, y) = 4y$.

8.3.2 Dans la pratique

Lorsqu'on détermine la dérivée partielle par rapport à la variable x, on suppose que x varie, l'autre variable y restant fixe donc constante.

Exemple 8.3.3 Soit $f(x,y) = e^{x^2y}$ alors, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xye^{x^2y}$.

Lorsqu'on détermine la dérivée partielle par rapport à la variable y, on suppose que y varie, l'autre variable x restant fixe donc constante.

Exemple 8.3.4 Soit $f(x,y) = e^{x^2y}$ alors, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x^2y}$.

Exercice 193 Calculer $f'_x(2,1)$ et $f'_y(2,1)$ si $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$.

Remarque 8.3.1 L'interprétation géométrique des dérivées partielles passe par la surface S représentative de f d'équation $z = f(x,y)$. Si $f(x_0, y_0) = z_0$ alors le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ se trouve sur S. Fixer $y = y_0$ revient à restreindre l'attention à la courbe C_x selon laquelle le plan vertical $y = y_0$ coupe S (autrement dit C_x est la trace de S dans le plan $y = y_0$). De même le plan vertical $x = x_0$ coupe S selon la courbe C_y. On remarquera que la courbe C_x n'est autre que le graphique de la fonction $\phi_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ et que la pente de la tangente T_x en M_0 est donnée par $\phi'_{y_0}(x) = f'_x(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. La courbe C_y est le graphe de la fonction $\varphi_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ et la pente de la tangente T_y en M_0 est $\varphi'_{x_0}(y) = f'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Par conséquent les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ peuvent être interprétées comme les pentes des tangentes en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ aux traces C_x et C_y de S dans les plans $y = y_0$ et $x = x_0$.

Exercice 194 Soit $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Calculer $f'_x(1,1)$ et $f'_y(1,1)$ et interpréter ces nombres en tant que pentes.

Remarque 8.3.2 On peut aussi définir les dérivées partielles des fonctions de trois variables ou plus. Par exemple, si $f(x,y,z) = e^{xy}\ln z$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy}\ln z$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy}\ln z$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{z}$.

8.3.3 Dérivée d'ordre supérieur

Soit f une fonction de domaine de définition $\mathcal{D}$ et $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ l'ensemble des points intérieurs à $\mathcal{D}$. On suppose que f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en tout point de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$.

(a) Si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ admet une dérivée partielle par rapport à la variable x en tout point de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, on note

$$\boxed{\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$$

Exemple 8.3.5 Soit $f(x,y) = 2x^2y + 3xy^3 + y + 5$. On a $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 = \overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy + 3y^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4y.$$

(b) Si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ admet une dérivée partielle par rapport à la variable y en tout point de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, on note

$$\boxed{\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$$

Exemple 8.3.6 Soit $f(x,y) = 2x^2y + 3xy^3 + y + 5$. Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy + 3y^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4x + 9y^2.$$

(c) Si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ admet une dérivée partielle par rapport à la variable y en tout point de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, on note

$$\boxed{\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

Exemple 8.3.7 Soit $f(x,y) = 2x^2y + 3xy^3 + y + 5$. Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 9xy^2 + 1 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 18xy.$$

(d) Si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ admet une dérivée partielle par rapport à la variable x en tout point de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, on note

$$\boxed{\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}$$

Exemple 8.3.8 Soit $f(x,y) = 2x^2y + 3xy^3 + y + 5$. Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 9xy^2 + 1 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4x + 9y^2.$$

Remarque 8.3.3 On a pu noter dans l'exemple précédent que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Ce n'est pas fortuit, il s'avère que les dérivées partielles mixtes sont égales pour la plupart des fonctions que l'on rencontre couramment.

Exercice 195 Calculer les dérivées secondes partielles de $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$.

8.3.4 Théorème de Schwarz (admis)

Théorème 8.3.1 *Soit une fonction f admettant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 en tout point (x_0, y_0) de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Si les fonctions $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues en (x_0, y_0) alors*

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)}.$$

Exemple 8.3.9 Soit $f(x, y) = 2x^2 + 3y + x^2 y$. On a $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 = \overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x + 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3 + x^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x.$$

8.3.5 Le plan tangent

Soit f une fonction de deux variables d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. La surface est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ avec $z = f(x, y)$. En général, cette surface admet en chacun de ses points (sauf peut-être en des points exceptionnels) un plan tangent.

Définition 8.3.3 *L'équation du plan tangent en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est donnée par :*

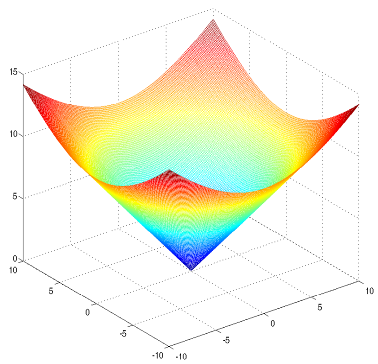
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0}$$

Rappel : $ax + by + cz + d = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$ est l'équation d'un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}(a, b, c)$.

Le plan tangent en $M_0(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ a pour vecteur normal $\vec{n}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$.

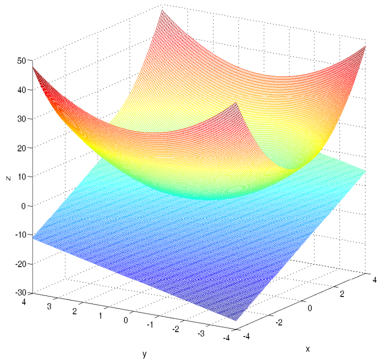
Exemple 8.3.10

- Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$, la surface a pour équation $z = x^2 + y^2$. Les dérivées partielles du premier ordre sont données par $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$. Soit $M_0(1, 2, 5)$ un point de cette surface (puisque $f(1, 2) = 5$). On obtient $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4$. Le plan tangent en M_0 à la surface a pour équation $2(x - 1) + 4(y - 2) - (z - 5) = 0$ ou encore $2x + 4y - z - 5 = 0$.
- Soit $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. La surface est un cône de sommet O.



Les dérivées partielles ne sont pas définies au point $(0,0)$. On peut déterminer l'équation du plan tangent en tout point de $\mathbb{R}^2$ sauf en l'origine.

– Déterminons le plan tangent au paraboloïde elliptique $z = 2x^2 + y^2$ au point $(1,1,3)$. Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$. Par conséquent, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 4$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2$. L'équation du plan tangent en $(1,1,3)$ s'écrit alors $z = 4x + 2y - 3$. La figure ci-dessous exhibe le paraboloïde elliptique et son plan tangent en $(1,1,3)$.



8.4 Les extréma libres

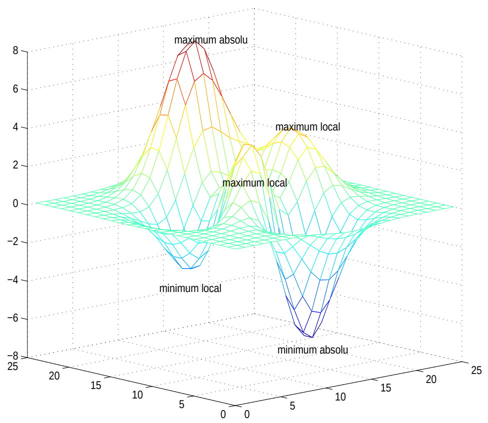
Ainsi que nous l'avons vu au premier semestre, un des principaux usages des dérivées ordinaires est de détecter des valeurs extrêmes. Dans cette section, nous allons voir comment les dérivées partielles conduisent aux valeurs maximales et minimales des fonctions de deux variables.

8.4.1 Définitions

Définition 8.4.1 *Une fonction f de deux variables présente un* ***maximum local*** *en (x_0, y_0) si $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ lorsque (x,y) est à proximité de (x_0,y_0) (plus précisément $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ pour tous les points (x,y) dans un certain disque centré en (x_0,y_0)). Le nombre $f(x_0,y_0)$ est la valeur du maximum local.*
Une fonction f de deux variables présente un ***minimum local*** *en (x_0,y_0) si $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ lorsque (x,y) est proche de (x_0,y_0). Le nombre $f(x_0,y_0)$ est la valeur du minimum local.*

Définition 8.4.2 *Au cas où les inégalités de la définition 8.4.1 ont lieu pour tous les points (x,y) du domaine de définition de f alors f admet un* ***maximum absolu*** *(ou un* ***minimum absolu****) en (x_0,y_0).*

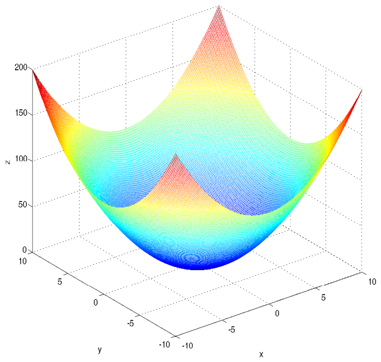
La figure ci-dessous présente le graphique d'une fonction qui a plusieurs maxima et minima. On peut imaginer les maxima locaux comme des sommets de montagnes et les minima locaux comme des fonds de vallée.



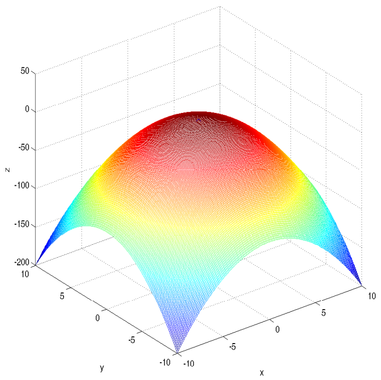
Remarque 8.4.1 Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de domaine de définition $\mathcal{D}_f$. On recherche donc les points $M_0(x_0, y_0)$ intérieurs au domaine tels que $f(M) - f(M_0)$ garde un signe constant lorsque M tend vers M_0 ou encore lorsque $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ garde un signe constant lorsque h et k tendent vers 0. M_0 est alors le point où f admet un **extrémum local**.

8.4.2 Exemples

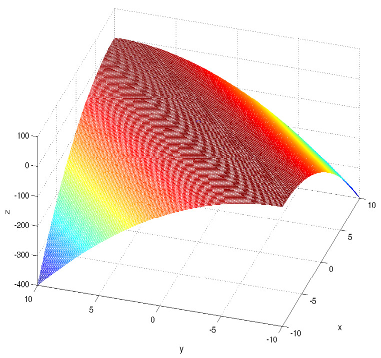
1. $f(x, y) = x^2 + y^2$. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq 0$, f admet un minimum absolu au point $(0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.



2. $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \leq 1$, f admet un maximum absolu au point $(0, 0)$ et $f(0, 0) = 1$.



3. $f(x, y) = 1 - (x - y)^2$. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \leq 1$, f admet un maximum absolu qui vaut 1. Ce maximum est atteint en une infinité de points, tous les points de la forme (x, x).



8.4.3 Les conditions nécessaires du premier ordre

Supposons que f admette des dérivées partielles premières définies et continues en tout point de $\mathcal{D}_f$.
De la même façon que pour les fonctions d'une variable, si f admet un extrémum local au point $M_0(x_0, y_0)$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

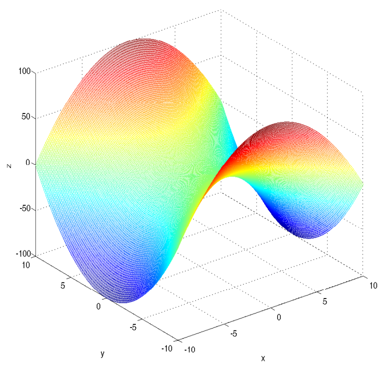
Cette condition est nécessaire mais non suffisante. Les conditions

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}}$$

sont appelées **conditions du premier ordre**. Le point $M_0(x_0, y_0)$ est alors un **point critique** (ou **point stationnaire**).

Théorème 8.4.1 *Si f passe par un maximum ou un minimum local en (x_0, y_0) et si les dérivées partielles premières de f y existent alors (x_0, y_0) est un point critique de f.*

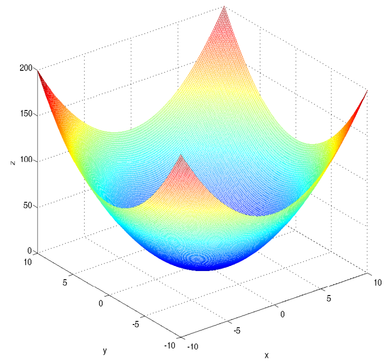
Remarque 8.4.2 Toutefois, comme dans le cas des fonctions à une variable, tous les points stationnaires ne donnent pas lieu à des maxima ou des minima. En un point stationnaire, une fonction peut avoir un maximum local ou un minimum local ou aucun des deux.
Illustrons ce dernier point en cherchant les valeurs extrêmes de $f(x, y) = y^2 - x^2$ dont le graphe figure à la page suivante :



Puisque $f'_x(x, y) = -2x$ et $f'_y(x, y) = 2y$, le seul point critique est $(0, 0)$. Or, en des points de l'axe $0x$, $y = 0$ et $f(x, 0) = -x^2 < 0$ (si $x \neq 0$) tandis qu'en des points de l'axe $0y$, $x = 0$ et $f(0, y) = y^2 > 0$ (si $y \neq 0$). N'importe quel disque centré à l'origine contient des points en lesquels f prend aussi bien des valeurs strictement positives que strictement négatives. Par conséquent, $f(0, 0) = 0$ ne peut être une valeur extrême de f et f n'a pas de valeur extrême.
Cet exemple illustre le fait qu'une fonction n'a pas nécessairement un maximum ou un minimum local en un point critique. La figure précédente permet de visualiser comment cela est possible. Le graphique de f est le paraboloïde hyperbolique qui à l'origine admet un plan tangent horizontal ($z = 0$). On observe que $f(0, 0) = 0$ est un maximum dans la direction de l'axe $0x$ mais un minimum dans la direction de l'axe $0y$. Au voisinage de l'origine, la surface représentative de f a la forme d'une selle et c'est la raison pour laquelle $(0, 0)$ est appelé un **point selle** (ou **point col**) de f.

Exemple 8.4.1

- Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$. Les dérivées partielles du premier ordre sont égales à $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$. Au point $(0, 0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. L'origine est un point critique.



– Soit $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^3$. Les dérivées partielles du premier ordre sont égales à $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4xy + 3y^2$. On recherche les points critiques en résolvant le système

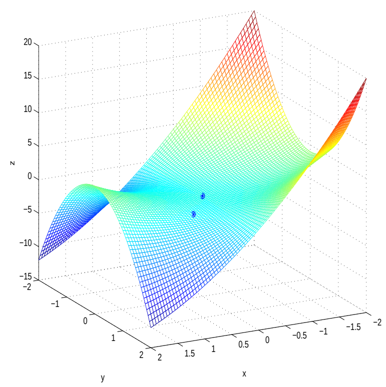
$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - 2y^2 = 0 \\ -4xy + 3y^2 = 0 \end{array} \right. .$$

Par conséquent,

$$(1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y^2 \\ -4y^2y + 3y^2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y^2 \\ y^2(3-4y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y^2 \\ y = 0 \text{ ou } y = \dfrac{3}{4} \end{array} \right.$$

d'où deux points critiques $(0,0)$ et $\left(\dfrac{9}{16}, \dfrac{3}{4}\right)$.

Illustration grâce au graphique ci-dessous :



Exemple 8.4.2

– Soit $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x - 3y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x + 2y \end{array} \right.$$

Les conditions du premier ordre sont $\left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{array} \right.$, système homogène de déterminant égal à $-1 \neq 0$ donc admettant une unique solution $(0,0)$.

Rappel : le déterminant d'un système de deux équations à deux inconnues du type

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{array} \right.$$

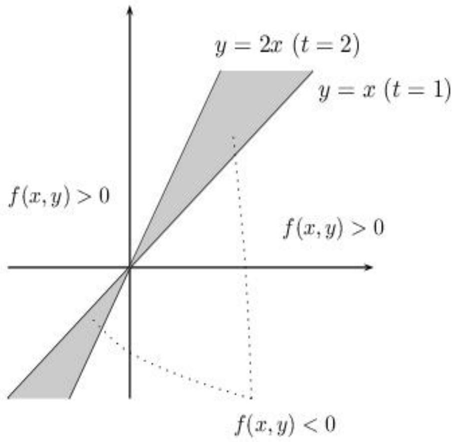
est égal à $ad - bc$. Si $ad - bc \neq 0$, le système admet une unique solution.

Si extrémum il y a, cet extrémum ne peut-être qu'au point $(0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
Étudions le signe de $f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2$, ce qui permettra de situer $f(x,y)$

par rapport à $f(0,0)$. Si $x=0$, $f(x,y)=f(0,y)=y^2\neq 0$. Pour $x\neq 0$, $f(x,y)=x^2\left[\left(\frac{y}{x}\right)-3\frac{y}{x}+2\right]$. On pose ensuite $\frac{y}{x}=t$ et $f(x,y)=x^2[t^2-3t+2]=x^2(t-1)(t-2)$. L'intérêt de cette écriture est que le signe de $f(x,y)$ dépend des valeurs prises par t et plus précisément de la position de t par rapport à 1 et 2. On a le tableau de signes suivant :

t	$-\infty$		1		2		$+\infty$
t^2-3t+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut visualiser les différents cas à l'aide du graphique :



Au voisinage de $(0,0)$, $f(x,y)$ ne garde pas un signe constant, f n'a donc pas d'extrémum en $(0,0)$. Ce point $(0,0)$ est un point selle.

– Soit $f(x,y)=2x^2+3xy+5y^2+1$, on a
$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x+3y\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x+10y\end{cases}$$
Les conditions du premier ordre sont $\begin{cases}4x+3y=0\\3x+10y=0\end{cases}$, système homogène de déterminant égal à $21\neq 0$ donc admettant une unique solution $(0,0)$.
Si extrémum il y a, cet extrémum ne peut-être qu'au point $(0,0)$ et $f(0,0)=1$.
Étudions le signe de $f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)-1=2x^2+3xy+5y^2$. Si $x=0$, $f(x,y)-1=f(0,y)-1=5y^2\geq 0\Rightarrow f(0,y)\geq 1$. Pour $x\neq 0$, $f(x,y)-1=x^2\left[5\left(\frac{y}{x}\right)^2+3\left(\frac{y}{x}\right)+2\right]$. On pose ensuite $\frac{y}{x}=t$ et $f(x,y)-1=x^2(5t^2+3t+2)$. Or, $\forall t\in\mathbb{R}$, $5t^2+3t+2>0$ $(\Delta=-31<0)$. Conclusion, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)-1\geq 0\Leftrightarrow f(x,y)\geq 1$. f admet un minimum au point $(0,0)$ qui vaut 1.
– Soit $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+d$, une fonction de degré 2 à deux variables quelconque. On a
$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2ax+2by\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2bx+2cy\end{cases}$$
Les conditions du premier ordre sont $\begin{cases}ax+by=0\\bx+cy=0\end{cases}$, système homogène de déterminant égal à $D=ac-b^2$. Si $D\neq 0$, ce système admet une unique solution, en l'occurence le couple $(0,0)$.
Étudions le signe de $f(x,y)-f(0,0)=ax^2+2bxy+cy^2$. Pour $x=0$, $f(x,y)-f(0,0)=cy^2$, qui dépend du signe de c. Pour $x\neq 0$, $f(x,y)-f(0,0)=x^2\left[c\left(\frac{y}{x}\right)^2+2b\frac{y}{x}+a\right]$. On pose ensuite $t=\frac{y}{x}$ et $f(x,y)-f(0,0)=x^2[ct^2+2bt+a]$. Par conséquent, $f(x,y)-f(0,0)$ admet le signe de $P(t)=ct^2+2bt+a$, trinôme du second degré de discriminant $\Delta=4b^2-4ac$.

- si $\Delta \leq 0$, $f(x,y)-f(0,0)$ a le signe de c pour tout couple (x,y) donc f admet un extrémum au point $(0,0)$,
- si $\Delta > 0$, $f(x,y)-f(0,0)$ est du signe de c à l'intérieur des racines de P et du signe de $-c$ à l'extérieur donc f n'admet pas d'extrémum en $(0,0)$.

Proposition 8.4.1

(a) *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Les conditions du premier ordre sont :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

Soit (x_0, y_0) un couple solution. Le point $M_0(x_0, y_0)$ est appelé point critique. Si extrémum il y a, il est situé en M_0.

(b) *Dans ce cas, l'équation du plan tangent à la surface au point (x_0, y_0, z_0) est $z = z_0$. Ce plan est parallèle à $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.*

- il y a minimum si au voisinage du point (x_0, y_0, z_0), la surface est située au dessus de ce plan tangent,

- il y a maximum si au voisinage du point (x_0, y_0, z_0), la surface est située en dessous de ce plan tangent,

- il n'y a pas d'extrémum lorsque la surface traverse le plan tangent. Le point est alors appelé point col ou point selle.

Exercice 196 Déterminer la nature des points critiques de $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

8.4.4 Les conditions du second ordre - Méthodologie

Il est nécessaire de pouvoir déterminer si une fonction a ou non une valeur extrême en un point critique. Le test que voici répond à cette demande, il utilise les conditions du second ordre.

- Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point critique alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.
- On détermine ensuite les trois quantités

$$\boxed{r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0),\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \text{ et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)}$$

puis on calcule $\Delta' = s^2 - rt$.

. Si $\Delta' > 0$, il n'y a pas d'extrémum, M_0 est un point col ou un point selle,

. Si $\Delta' < 0$ et $r < 0$, f admet un maximum local en M_0,

. Si $\Delta' < 0$ et $r > 0$, f admet un minimum local en M_0,

. Si $\Delta' = 0$, on ne peut pas conclure sur la nature de M_0.

Exemple 8.4.3 Recherchons les valeurs maximales et minimales et les points selles de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

On localise tout d'abord les points stationnaires : on a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x$. L'égalisation à 0 de ces dérivées partielles conduit au système d'équations

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases}$$

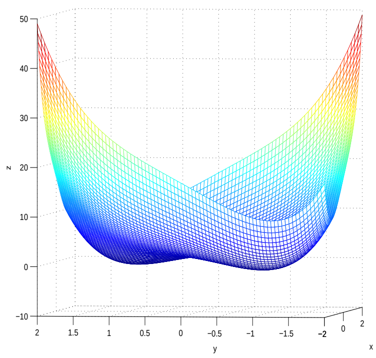
On résout ce système en substituant $y = x^3$ de la première équation dans la deuxième. Cela donne

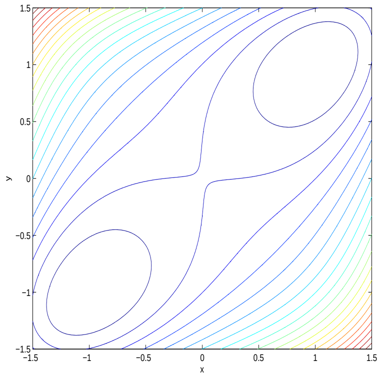
$$0 = x^9 - x = x(x^8-1) = x(x^4-1)(x^4+1) = x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1).$$

Il y a donc 3 racines $x = 0, 1, -1$. Les trois points stationnaires sont $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$.
On calcule ensuite les dérivées secondes partielles et Δ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2,$$

et $\Delta(x,y) = 144x^2y^2 - 16$. Puisque $\Delta(0,0) = -16 < 0$, on peut affirmer que le point $(0,0)$ est un point selle. Puisque $\Delta(1,1) = 128 > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12 > 0$, $f(1,1) = -1$ est un minimum local. De même, $\Delta(-1,-1) = 128 > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12 > 0$ entraînent que $f(-1,-1) = -1$ est aussi un minimum local. On a les graphiques suivants :





Le diagramme des courbes de niveau de la fonction f met en évidence des courbes de niveau de forme ovale à proximité de $(1,1)$ et $(-1,-1)$. Cela indique que, quelle que soit la direction dans laquelle on s'éloigne de $(1,1)$ ou de $(-1,-1)$, les valeurs de f augmentent. Les courbes de niveau près de $(0,0)$ ont plutôt l'air d'hyperboles. Elles révèlent que quand on quitte l'origine (où f vaut 1), les valeurs de f décroissent dans certaines directions et croissent dans d'autres. Le diagramme des courbes de niveau laisse donc deviner la présence des minima et du point selle identifiés précédemment.

Exemple 8.4.4 Déterminer les points critiques des fonctions suivantes et préciser leur nature lorsque cela est possible.

(a) Soit $f(x,y) = xy^2 + 2x^2 + y^2$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 4x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + 2y$$

Les conditions du premier ordre fournissent le système suivant :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + y^2 = 0 \\ y(x+1) = 0 \end{array} \right.$$

Ensuite,

$$(1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y^2 = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x,y) = (0,0) \text{ ou} \\ (x,y) = (-1,2) \text{ ou} \\ (x,y) = (-1,-2) \end{array} \right.$$

d'où l'existence de trois points critiques et trois extréma eventuels. On détermine alors les dérivées d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x + 2$$

. Pour le point $(0,0)$, $r = 4$, $s = 0$, $t = 2$ donc $\Delta' = s^2 - rt = -8 < 0$. Par conséquent, f a un extrémum au point $(0,0)$. De plus, $r = 4 > 0$ donc l'extrémum est un minimum. En effet, comme $r > 0$, $f(M) - f(0,0) \geq 0$ et $f(M) \geq f(0,0) = 0$.
. Pour le point $(-1,2)$, $r = 4$, $s = 4$, $t = 0$ donc $\Delta' = s^2 - rt = 16 > 0$. Par conséquent, le point $(-1,2)$ est un point col.
. Pour le point $(-1,-2)$, $r = 4$, $s = -4$, $t = 0$ donc $\Delta' = s^2 - rt = 16 > 0$. Par conséquent, le point $(-1,-2)$ est un point col.

(b) Soit $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^3$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4xy + 3y^2.$$

Les conditions du premier ordre fournissent le système suivant :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y^2 = 0 \\ y(-4x + 3y) = 0 \end{array} \right.$$

Ensuite,

$$(1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y^2 \\ y(-4y^2 + 3y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y^2 \\ y^2(-4y + 3) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y^2 \\ y = 0 \text{ ou } y = \dfrac{3}{4} \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x,y) = (0,0) \text{ ou} \\ (x,y) = \left(\dfrac{9}{16}, \dfrac{3}{4}\right) \end{array} \right.$$

d'où l'existence de deux points critiques. On détermine ensuite les dérivées d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4y \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -4x + 6y.$$

. Pour le point $\left(\dfrac{9}{16}, \dfrac{3}{4}\right)$, $r = 2$, $s = -3$, $t = -\dfrac{9}{4} + \dfrac{9}{2} = \dfrac{9}{4}$ donc $\Delta' = s^2 - rt = 9 - \dfrac{9}{2} = \dfrac{9}{2} > 0$. Par conséquent, $\left(\dfrac{9}{16}, \dfrac{3}{4}\right)$ est un point col.
. Pour le point $(0,0)$, $r = 2$, $s = 0$, $t = 0$ donc $\Delta' = s^2 - rt = 0$ et on ne peut pas conclure. Par contre, $f(0,y) = y^3$ ce qui implique que $f(0,y)$ change de signe : pour $y > 0$, $f(0,y) > 0$ et pour $y < 0$, $f(0,y) < 0$. Comme $f(0,0) = 0$, $f(x,y) - f(0,0)$ n'a pas de signe constant au voisinage du point $(0,0)$ et ce point est un point col.

Exemple 8.4.5 On souhaite fabriquer une boîte rectangulaire sans couvercle avec 12m^2 de carton. Quel est le volume maximal de cette boîte ?
On désigne par x, y et z respectivement la longueur, la largeur et la hauteur de la boîte en mètres. Le volume est alors donné par $V = xyz$. Il peut être exprimé en fonction de deux variables x et y seulement en exploitant le fait que l'aire des quatre faces et du fond totalise 12m^2 : $2xz + 2yz + xy = 12$. Pour cela, on résout cette équation par rapport à z : $z = \dfrac{12 - xy}{2(x+y)}$ et on introduit l'expression de z dans celle de V :

$$V = xy\frac{12 - xy}{2(x+y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}.$$

On calcule maintenant les dérivées partielles de V :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x+y)^2}, \ \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x+y)^2}.$$

Quand V est maximum, $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0$. Mais $x = 0$ ou $y = 0$ conduisent à $V = 0$. Donc les équations à résoudre sont

$$12 - 2xy - x^2 = 0 \text{ et } 12 - 2xy - y^2 = 0$$

Elles impliquent $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ car x et y ne peuvent être que positives. On pose $x = y$ dans l'une ou l'autre des équations et on obtient $12 - 3x^2 = 0$ ce qui donne $x = 2$, $y = 2$ et $z = \dfrac{12 - 2.2}{2.(2+2)} = 1$. On pourrait ensuite faire appel au test de la dérivée seconde pour certifier qu'il s'agit bien d'un maximum local de V mais, plus simplement, il suffit de remarquer qu'intuitivement, vu le contexte physique du problème, il ne peut y avoir qu'un maximum absolu, qui se produit en un point stationnaire de V. Il a donc lieu quand $x = 2$, $y = 2$ et $z = 1$. Dans ce cas, $V = 4$, le volume maximum est de 4m^3.

Exercice 197 Déterminer et classer les points stationnaires de la fonction $f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$. Déterminer le point le plus haut du graphique de f.

Exercice 198 Quelle est la plus courte distance du point $(1, 0, -2)$ au plan $x + 2y + z = 4$?

8.4.5 Un exemple économique

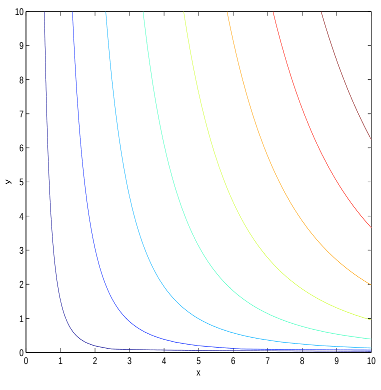
1. Généralités

Une entreprise fabrique un produit à partir de différentes combinaisons de deux matières premières X et Y, appelées **facteurs de production**. Un facteur de production peut être de la matière première, du travail, du capital, etc, en somme tout élément utile à la production. Toute combinaison d'une quantité x de X et y de Y permettra d'obtenir une quantité $Q(x, y)$ du produit, la fonction Q est appelée **fonction de production**.

Définition 8.4.3 *On appelle* ***isoquante*** *une ligne de niveau de la fonction Q définie par*

$$\boxed{\Gamma_{q_0} = \{(x, y)/Q(x, y) = q_0\}}$$

On trace ci-dessous quelques isoquantes :



On suppose que l'entreprise est assurée de vendre toute sa production Q à un produit unitaire p, sa recette sera $p \times Q$. Soient p_X et p_Y les prix unitaires des facteurs de production X et Y, C_0 les coûts fixes, le coût de production est alors

$$\boxed{xp_X + yp_Y + C_0}$$

pour x unités de X et y unités de Y utilisées. Le bénéfice de l'entreprise est

$$\boxed{B(x, y) = pQ(x, y) - (C_0 + xp_X + yp_Y)}$$

Maximisation du bénéfice : On détermine les dérivées partielles de B :

$$\frac{\partial B}{\partial x}(x, y) = p\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - p_X$$
$$\frac{\partial B}{\partial y}(x, y) = p\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) - p_Y$$

On impose alors les conditions

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial B}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{p_X}{p} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{p_Y}{p} \end{cases}$$

La fonction de production étant connue, on obtient un système qui permet de déterminer les points critiques de B.
Interprétation économique :

- $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ sont les **productivités marginales** en volume, relatives aux facteurs X et Y et représentent respectivement les productions supplémentaires obtenues par l'utilisation d'une unité supplémentaire du facteur X ou Y.
- $p\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $p\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ sont les **valeurs marginales**.

Conditions du second ordre : On a

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = p\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\ ,\ \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} = p\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \ \text{ et } \ \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = p\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}$$

On obtient $\Delta' = s^2 - rt = p^2\left[\left(\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right]$. Le bénéfice est maximum pour $\Delta' < 0$ et $r < 0$ donc pour

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2} < 0 \text{ et} \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} < 0 \end{cases}$$

Remarque 8.4.3 $r = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{\partial x} < 0$. Par conséquent, la productivité marginale $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ est une fonction décroissante de la variable x.

2. La fonction de Cobb-Douglas

En 1928, Charles COBB et Paul DOUGLAS ont publié une étude dans laquelle apparaissait une modélisation de la croissance de l'économie américaine entre 1899 et 1922. Ils y avaient adopté une vue simplifiée de l'économie selon laquelle la quantité produite n'est fonction que de la quantité de travail réalisé et du montant des capitaux investis. Même si beaucoup d'autres facteurs affectent les performances économiques, leur modèle s'est avéré remarquablement précis. La fonction qu'ils ont employée pour modéliser la production était de la forme :

$$P(L,K) = bL^\alpha K^{1-\alpha},$$

où P est la production totale (la valeur monétaire de tous les biens produits en un an), L la quantité de travail (le nombre total d'heures de travail prestées en un an) et K la quantité de capital investi (la valeur monétaire de toutes les machines, équipement et bâtiments). Les données économiques sont celles de la table ci-dessous publiée par le gouvernement.

Année	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

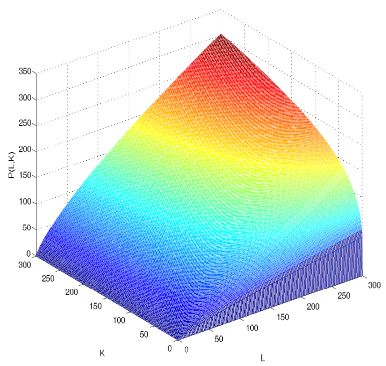
Ils prirent délibérément l'année 1899 comme base, c'est-à-dire qu'ils attribuèrent le niveau 100 à chacun des facteurs et exprimèrent les valeurs des autres années en pourcentage de cette année là. Cobb et Douglas utlisèrent le critère des moindres carrés pour ajuster leur modèle aux données de la table précédente et aboutirent à la fonction

$$P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$$

Vérifions la précision de ce modèle en calculant par exemple la production des années 1910 et 1920 :

$$P(147; 208) = 1,01(147)^{0,75}(208)^{0,25} \simeq 161,9 \;\; ; \;\; P(194; 407) = 1,01(194)^{0,75}(407)^{0,25} \simeq 235,8$$

Ces valeurs sont assez proches des valeurs réelles 159 et 231.
La fonction de production P a été ultérieurement utilisée dans d'autres cadres, depuis la petite unité commerciale jusqu'aux phénomènes économiques globaux. Elle est connue comme la **fonction de production de Cobb-Douglas**.
On donne ci-dessous le graphique de la fonction de production de Cobb-Douglas $P(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$:



On considère des fonctions Q et B s'exprimant respectivement sous la forme

$$\boxed{Q(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta} \text{ avec } A > 0,\ \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0},$$

$$\boxed{B(x, y) = pAx^{\alpha}y^{\beta} - (c_0 + xp_X + yp_Y)}.$$

Les conditions du premier ordre donnent :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial B}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial B}{\partial y}(x,y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha pAx^{\alpha-1}y^{\beta}=p_X \ (1) \\ \beta pAx^{\alpha}y^{\beta-1}=p_Y \ (2) \end{array}\right.$$

La résolution du système est réalisée en divisant (1) par (2) :

$$\frac{p_X}{p_Y}=\frac{\alpha y}{\beta x} \Leftrightarrow y=\frac{\beta}{\alpha}\frac{p_X}{p_Y}x$$

On remplace ensuite y dans l'équation (1) et on obtient :

$$p_X=\alpha pAx^{\alpha-1}\left(\frac{\beta p_x}{\alpha p_Y}x\right)^{\beta} \Leftrightarrow p_X=\frac{1}{\alpha^{\beta-1}}pA\beta^{\beta}\frac{(p_X)^{\beta}}{(p_Y)^{\beta}}x^{\alpha+\beta-1}$$
$$\Leftrightarrow x^{\alpha+\beta-1}=K \text{ une constante.}$$

Donc, pour $\alpha+\beta-1\neq 0$, on obtient une valeur x_0 puis une valeur y_0 donc un couple (x_0,y_0) unique.

Les conditions du second ordre donnent :

- $\dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2}=\alpha(\alpha-1)pAx^{\alpha-2}y^{\beta}$
- $\dfrac{\partial^2 B}{\partial x\partial y}=\alpha\beta pAx^{\alpha-1}y^{\beta-1}$
- $\dfrac{\partial^2 B}{\partial y^2}=\beta(\beta-1)pAx^{\alpha}y^{\beta-2}$

On a alors $\Delta'=p^2A^2x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2}\alpha\beta(\alpha+\beta-1)$ et $\Delta'<0\Leftrightarrow\alpha+\beta<1$.
Conclusion : Pour $\alpha+\beta<1$, il existe un seul point critique qui est un maximum.

Application numérique : Soit la fonction de production Q définie par

$$Q(x,y)=\sqrt{2}x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$

On considère $p_X=4000$, $p_Y=1000$, $p=80000$ et enfin $c_0=100000$.
Que vaut le bénéfice maximum et pour quelles valeurs de x et y est-il atteint ?

La fonction profit est définie par

$$B(x,y)=80000\sqrt{2}x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}-[100000+4000x+1000y]$$

Les conditions du premier ordre donnent : $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial B}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial B}{\partial y}(x,y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1000[20\sqrt{2}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}-4]=0 \ (1) \\ 1000[20\sqrt{2}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{4}}-1]=0 \ (2) \end{array}\right.$

En combinant (1) et (2), on obtient :

$$\frac{20\sqrt{2}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{20\sqrt{2}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{4}}}=4\Leftrightarrow y=4x.$$

On remplace ensuite cette relation dans (1) et on obtient $x=100$ puis $y=400$. Il existe donc un seul point critique $(100,400)$. De plus, $\alpha+\beta=\dfrac{1}{2}<1$. Le point critique est donc un maximum. Finalement, le bénéfice est maximum pour $x=100$ et $y=400$ et vaut 700000.

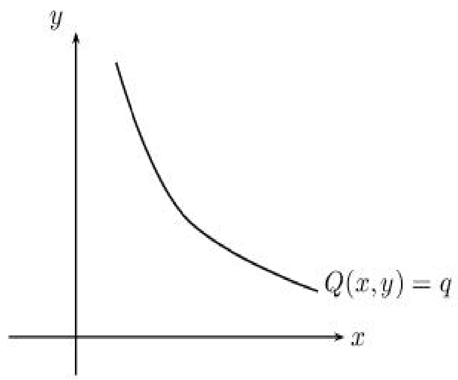
8.5 Les extréma liés

L'exemple 8.4.5 de la section 4.4 posait le problème de maximiser une fonction volume $V=xyz$ soumise à la contrainte $2xz+2yz+xy=12$, qui traduisait une condition annexe sur la surface, à savoir mesurer 12m^2. Dans cette section, on présente la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour maximiser ou minimiser une fonction générale $f(x,y,z)$ sujette à une contrainte (ou condition annexe) de la forme $g(x,y,z)=k$.

8.5.1 Exemple de la maximisation du bénéfice à production fixée

Soit une entreprise assujettie à produire une quantité $Q(x, y) = q$ fixée. On se pose le problème de la détermination du bénéfice maximum (ou du coût minimum).

1. On considère l'égalité $Q(x, y) = q$ où q est une quantité fixée. On peut représenter graphiquement cette ligne de niveau :



On recherche par conséquent un couple (x, y) où le profit est maximum, ce couple (x, y) appartenant à la ligne de niveau. Le coût variable est

$$\boxed{xp_X + yp_Y + c_0},$$

le bénéfice est

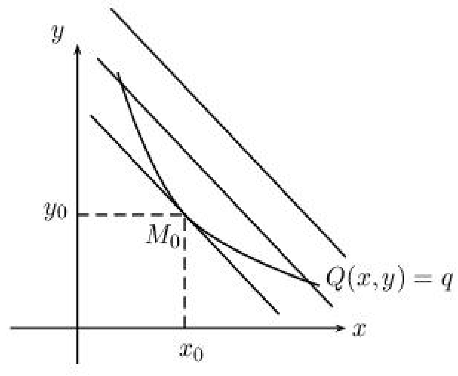
$$\boxed{B(x, y) = pq - (c_0 + xp_X + p_Y)}.$$

Remarque 8.5.1 $Q(x, y) = q$ est appelée **contrainte**. On cherche donc à maximiser le profit, les deux variables étant liées par une relation $Q(x, y) = q$. C'est un problème d'**extrémum lié** par une certaine contrainte $Q(x, y) = q$.

2. Comment procède t-on ? On trace les droites de coût constant

$$xp_X + yp_Y + c_0 = h.$$

Toutes ces droites sont parallèles entre-elles. Le coût est minimum lorsque l'ordonnée à l'origine est minimale. On obtient une droite de coût minimum lorsque la droite est tangente à l'isoquante.



La droite de coût a pour coefficient directeur $-\dfrac{p_X}{p_Y}$. La tangente à l'isoquante (en M_0) a pour équation

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

son coefficient directeur est $-\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)}$.

Ces deux droites ont le même coefficient directeur d'où $-\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)}{\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)} = -\dfrac{p_X}{p_Y}$, ce qui signifie que les prix des facteurs de production sont proportionnels aux productivités marginales. On obtient un système de 3 équations à 3 inconnues x_0, y_0 et λ (le facteur de proportionnalité) :

$$\begin{cases} p_X = \lambda \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) \\ p_Y = \lambda \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \\ Q(x_0,y_0) = q \end{cases}$$

le réel λ est appelé **multiplicateur de Lagrange**.

3. Illustration dans le cas de la fonction de Cobb-Douglas.
Soit $Q(x,y) = Ax^\alpha y^\beta$. Le système précédent s'écrit alors :

$$\begin{cases} p_X = \lambda A\alpha x^{\alpha-1}y^\beta \\ p_Y = \lambda A\beta x^\alpha y^{\beta-1} \\ Ax^\alpha y^\beta = q \end{cases}$$

En divisant la première ligne de ce système par la seconde, on obtient :

$$\frac{p_X}{p_Y} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{y}{x} \Leftrightarrow y = \frac{\beta}{\alpha}\frac{p_X}{p_Y}x.$$

On reporte ce résultat dans la troisième équation, on obtient $x^{\alpha+\beta} = k$ une constante. Pour $\alpha+\beta \neq 1$, on obtient x, y et λ.

Remarque 8.5.2 Ces trois équations sont les conditions nécessaires d'extrémum lié. Elles ne sont pas suffisantes.

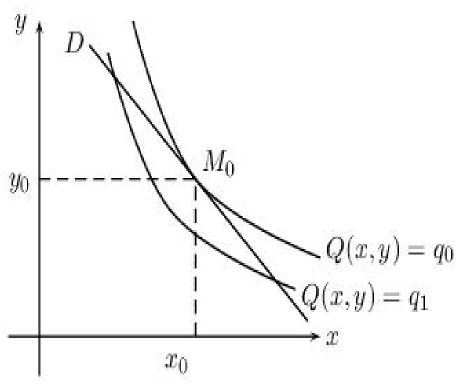
8.5.2 Exemple de la maximisation du bénéfice à coût fixé

1. Le coût est fixé soit

$$xp_X + yp_Y + c_0 = k \text{ où } k \text{ est un réel fixé.}$$

Maximiser le bénéfice est équivalent à minimiser le coût de production.

2. On trace la droite D de coût constant et les différentes isoquantes $q = Q(x,y)$, q variant.



La production est maximale lorsque la droite de coût est tangente à l'isoquante. Le point (x_0,y_0) est le point d'intersection de cette droite de coût et de l'isoquante.

3. Les équations :
– l'équation de la droite de coût est $xp_X + yp_Y + c_0 = k$,
– l'équation de la tangente à l'isoquante au point (x_0,y_0) est

$$(x-x_0)\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

Ces deux droites ont le même coefficient directeur d'où

$$-\frac{p_X}{p_Y} = -\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Cela implique le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = \lambda p_X \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda p_Y \\ x_0 p_X + y_0 p_Y + c_0 = k \end{cases}$$

Le réel λ est un multiplicateur de Lagrange.

4. Illustration dans le cas de la fonction de Cobb-Douglas

   On a $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = A\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = A\beta x^{\alpha} y^{\beta-1}$, ce qui implique le système

$$\begin{cases} A\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} = \lambda p_X & (1) \\ A\beta x^{\alpha} y^{\beta-1} = \lambda p_Y & (2) \\ x p_X + y p_Y + c_0 = k & (3) \end{cases}$$

   En divisant (1) par (2), on obtient

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_X}{p_Y} \Leftrightarrow y = \frac{\beta p_X}{\alpha p_Y} x$$

   On remplace ensuite y dans la troisième équation et on obtient :

$$x(p_X + p_X \frac{\beta}{\alpha}) = k - c_0$$

   d'où les valeurs de x, y puis λ.

8.5.3 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Pour déterminer les valeurs maximales et minimales de $f(x, y, z)$ soumises à la contrainte $g(x, y, z) = k$ (à supposer qu'elles existent) :

1. On cherche toutes les valeurs de x, y, z et λ telles que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ g(x, y, z) = k \end{cases}$$

2. On calcule la valeur de f en tous les points (x, y, z) repérés à l'étape précédente. La plus grande de ces valeurs est le maximum de f, la plus petite est le minimum de f.

Exemple 8.5.1 Reprenons l'exemple 8.4.5. x, y et z sont respectivement la longueur, la largeur et la hauteur de la boîte, exprimées en mètres. Il s'agit alors de maximiser $V = xyz$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$.
Selon la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on recherche les valeurs de x, y, z et λ telles que

$$\begin{cases} yz = \lambda(2z + y) & (1) \\ xz = \lambda(2z + x) & (2) \\ xy = \lambda(2x + 2y) & (3) \\ 2xz + 2yz + xy = 12 & (4) \end{cases}$$

On remarque qu'en multipliant (1) par x, (2) par y et (3) par z, les membres de gauche de ces équations deviennent identiques. On a ainsi

$$\begin{cases} xyz = \lambda(2xz + xy) & (5) \\ xyz = \lambda(2yz + xy) & (6) \\ xyz = \lambda(2xz + 2yz) & (7) \end{cases}$$

On observe que $\lambda \neq 0$ car dans le cas contraire, cela impliquerait $yz = xz = xy = 0$ en raison de (1), (2) et (3) et cela contredirait (4). Par conséquent (5) et (6) entraînent

$$2xz + xy = 2yz + xy \Leftrightarrow xz = yz.$$

Comme $z \neq 0$ (car sinon $V = 0$), cela implique $x = y$. Ensuite, (6) et (7) entraînent

$$2yz + xy = 2xz + 2yz \Leftrightarrow xy = 2xz.$$

Comme $x \neq 0$, ceci implique $y = 2z$. En substituant $x = y = 2z$ dans (4), on obtient

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12 \Leftrightarrow z^2 = 1.$$

Comme x, y et z sont positifs, cela donne finalement $z = 1$, $x = 2$ et $y = 2$.

Exemple 8.5.2 On reprend l'exemple sur la maximisation du bénéfice en début de section.

1. Déterminer le budget mininimal nécessaire pour assurer une production de 30 unités.

   On résout le système

$$\begin{cases} \lambda\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = p_X \\ \lambda\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) = p_Y \\ Q(x_0, y_0) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\sqrt{2}x_0^{-\frac{3}{4}}y_0^{\frac{1}{4}} = 16000 \\ \lambda\sqrt{2}x_0^{\frac{1}{4}}y_0^{-\frac{3}{4}} = 4000 \\ \sqrt{2}x_0^{\frac{1}{4}}y_0^{\frac{1}{4}} = 30 \end{cases}$$

   En effectuant le rapport des deux premières équations, on obtient $\dfrac{y_0}{x_0} = 4$ soit $y_0 = 4x_0$. En remplaçant y_0 dans la troisième équation on obtient $x_0 = 225$, $y_0 = 900$ et $\lambda = 120000$ d'où possibilité d'extrémum lié par la contrainte $\sqrt{2}x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} = 30$, au point $(225, 900)$, le bénéfice étant de 500000 euros.

2. Déterminer la production maximale si on dispose d'un budget de fabrication de 1700000 euros.

   On résout le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \lambda p_X \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \lambda p_Y \\ xp_X + yp_Y + c_0 = 1700000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} = 16000\lambda \ (1) \\ \sqrt{2}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{4}} = 4000\lambda \ (2) \\ 4000x + 1000y = 1600000 \ (3) \end{cases}$$

   En divisant (1) par (2) on obtient $y = 4x$. On remplace y dans la troisième équation et on obtient $x = 200$ puis $y = 800$, le bénéfice est alors de 562742 euros.

Exemple 8.5.3 Déterminer les valeurs extrêmes de la fonction $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$. Il est demandé de chercher les valeurs extrêmes de f sous la contrainte $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Conformément à la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on résout les équations

$$\begin{cases} 2x = 2x\lambda & (1) \\ 4y = 2y\lambda & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

De (1) découle $x = 0$ ou $\lambda = 1$. Quand $x = 0$, alors (3) conduit à ± 1. Quand $\lambda = 1$, $y = 0$ par (2) et donc, $x = \pm 1$ grâce à (3). En résumé, f pourrait avoir des valeurs extrêmes aux points $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. Les valeurs prises par f en chacun des points sont

$$f(0,1) = 2 \quad , \quad f(0,-1) = 2 \quad , \quad f(1,0) = 1 \quad , \quad f(-1,0) = 1.$$

Par conséquent, le maximum de f sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$ est $f(0, \pm 1) = 2$ et le minimum $f(\pm 1, 0) = 1$.

Exercice 199 Quelles sont les valeurs extrêmes de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sur le disque $x^2 + y^2 \leq 1$?

Exercice 200 Quels sont les points de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ les plus proches et les plus éloignés du point $(3, 1, -1)$?

Exercice 201 La production totale P d'un certain produit est fonction de la main d'œuvre totale L et du capital investi K. On a vu dans les sections précédentes comment le modèle de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ découle de certaines hypothèses économiques, où b et α sont des constantes positives et $\alpha < 1$. Si m désigne le coût unitaire du travail et n celui du capital, et si la société a un budget limité à p euros, le problème se pose de produire le plus possible sous cette contrainte de budget $mL + nK = p$. Montrer que la production est maximale quand

$$L = \frac{\alpha p}{m} \text{ et } K = \frac{(1-\alpha)p}{n}.$$

Exercice 202 Dans le même cadre que celui de l'exercice 8.5.3, on suppose maintenant que la production est fixée à $bL^{\alpha}K^{1-\alpha} = Q$ où Q est une constante. Quelles sont les valeurs de L et de K qui vont diminuer le plus la fonction coût $C(L,K) = mL + nK$?

8.5.4 Problème d'optimisation à deux contraintes

On veut maintenant déterminer les valeurs maximales et minimales de $f(x,y,z)$ lorsque (x,y,z) est soumis à deux contraintes $g(x,y,z) = k$ et $h(x,y,z) = c$. Géométriquement, cela revient à chercher les valeurs extrêmes de f lorsque (x,y,z) se trouve sur la courbe intersection des surfaces de niveau $g(x,y,z) = k$ et $h(x,y,z) = c$. La méthode des multiplicateurs de Lagrange consiste dans ce cas à chercher les valeurs extrêmes de f en résolvant un système de 5 équations à 5 inconnues x, y, z, λ et μ soit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial h}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z} + \mu \dfrac{\partial h}{\partial z} \\ g(x,y,z) = k \\ h(x,y,z) = c \end{cases}$$

Exemple 8.5.4 Déterminer le valeur maximale de $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ sur la courbe d'intersection du plan $x - y + z = 1$ et du cylindre $x^2 + y^2 = 1$.
Il s'agit de chercher le maximum de la fonction $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ sous les contraintes $g(x,y,z) = x - y + z = 1$ et $h(x,y,z) = x^2 + y^2 = 1$. On a donc à résoudre :

$$\begin{cases} 1 = \lambda + 2x\mu & (1) \\ 2 = -\lambda + 2y\mu & (2) \\ 3 = \lambda & (3) \\ x - y + z = 1 & (4) \\ x^2 + y^2 = 1 & (5) \end{cases}$$

En injectant $\lambda = 3$ dans (1), on a $2x\mu = -2$, ou $x = \dfrac{-1}{\mu}$. De même, (2) donne $y = \dfrac{5}{2\mu}$. La substitution de ces expressions de x et y dans (5) conduit à

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1,$$

de sorte que $\mu^2 = \dfrac{29}{4}$ soit $\mu = \pm\dfrac{\sqrt{29}}{2}$. Ensuite, $x = \mp\dfrac{2}{\sqrt{29}}$, $y = \pm\dfrac{5}{\sqrt{29}}$ et, de (4), $z = 1 - x + y = 1 \pm \dfrac{7}{\sqrt{29}}$. Les valeurs correspondantes de f sont

$$\mp\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm\frac{5}{29}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}.$$

Le maximum de f sur la courbe donnée est finalement $3 + \sqrt{29}$.

8.6 Exercices

Exercice 203 Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{2x+y}{x^2+y^2-1} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x+y-1} \end{array}$$

Exercice 204 Représenter le graphe de la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 1-x-y \end{array}$$

Exercice 205 Déterminer les lignes de niveau Γ_c des fonctions :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & ax+by+d \end{array}$
3. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$

Exercice 206 Déterminer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions :

1. $f(x,y) = 2x^2y + 3xy^3 + y + 5$
2. $f(x,y) = 2x^2 + 3y + x^2y$

Dans les deux cas, vérifier que le lemme de Schwarz s'applique.

Exercice 207 Calculer les dérivée partielles à l'ordre 1 et 2 des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = 4x^2y + 2x^3 - 3xy + 2x + 1$,
2. $g(x,y,z) = \ln(x+y) - 2x$,
3. $h(u,v,w) = \sqrt{u+v} - 3w^\alpha$.

Exercice 208

1. Déterminer l'équation du plan tangent au point $M(1,2,5)$ à la surface de la fonction f définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$.
2. Peut-on déterminer l'équation du plan tangent en tout point de la surface de la fonction g définie par $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$?

Exercice 209 On se donne la fonction à deux variables suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy^2 + 2x^2 + y^2 \end{array}$$

1. Déterminer les dérivees partielles du premier ordre de f.
2. Résoudre le système $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$ et déterminer ainsi le(s) point(s) critique(s) de f.
3. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
4. Vérifier le théorème de Schwarz.
5. Préciser la nature du ou des points critiques.

Exercice 210 Étudier les points critiques des fonctions définies par :

1. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^3$,
2. $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^4$,
3. $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + 2x - 2y - 4z + 5$.

Exercice 211 Étudier les extréma des fonctions définies par

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ avec la contrainte $x + 2y = 2$,
2. $g(x,y) = x^2 - y^2$ avec la contrainte $x + 2y = 2$.
3. $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ avec la contrainte $x + y + z = 1$.

Exercice 212 On considère la fonction f définie par $f(x,y) = x^2y^2(1 + x + y)$.

1. Étudier, suivant la position du point $M = (x,y)$ dans le plan, le signe de f.
2. Rechercher les extréma locaux de f.
3. On suppose dans cette question que x et y sont assujettis à vérifier la relation $xy = a^2$ ($a > 0$ donné). Étudier les extréma de f.