ISCID-CO - Prépa 1- Dunkerque - 2013/2014

CORRECTION Exercices Chapitre 1 - Trinômes du seconde degré.

Exercice 91

1. Déterminons les racines de $2x^2+x+1$. $\Delta=(1)^2-4(2)(1)=-7<0$ donc le trinôme n'admet pas de racines (dans $\mathbb{R}$).
2. Déterminons les racines de $2x^2-2\sqrt{2}x+1$. $\Delta=(-2\sqrt{2})^2-4(2)(1)=0$ donc le trinôme admet une racine double $x_0=-\dfrac{(-2\sqrt{2})}{2(2)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Déterminons les racines de $2x^2+x-3$. $\Delta=(1)^2-4(2)(-3)=25>0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
$$x_1=\frac{-(1)-\sqrt{25}}{2(2)}=-\frac{3}{2} \text{ et } x_2=\frac{-(1)+\sqrt{25}}{2(2)}=1.$$
4. Déterminons les racines de $3x^2+5x-1$. $\Delta=(5)^2-4(3)(-1)=37>0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
$$x_1=\frac{-(5)-\sqrt{37}}{2(3)}=-\frac{5+\sqrt{37}}{6} \text{ et } x_2=\frac{-(5)+\sqrt{37}}{2(3)}=\frac{-5+\sqrt{37}}{6}.$$

Exercice 92

1. $P(x)=x^2+2x-8=(1)\left[(x+1)^2-9\right]=(x+1)^2-3^2=(x+1-3)(x+1+3)=(x-2)(x+4)$.
2. $P(x)=x^2-3x+5=(1)\left[\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+5\right]=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$ (pas de factorisation possible).
3. $P(x)=x^2+x-3=(1)\left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}-3\right]=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4}=\left(x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$.
4. $P(x)=2x^2-3x-5=(2)\left[\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{9}{16}-\dfrac{5}{2}\right]=2\left[\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{49}{16}\right]=2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)(x+1)$.
5. $P(x)=9x^2-6x+1=(9)\left[\left(x-\dfrac{3}{9}\right)^2-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}\right]=9\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2$.

Exercice 93

1. Déterminons les racines de $3x^2-2x-16$. $\Delta=(-2)^2-4(3)(-16)=196=14^2$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
$$x_1=\frac{-(-2)-14}{2(3)}=-2 \text{ et } x_2=\frac{-(-2)+14}{2(3)}=\frac{8}{3}.$$
Si $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation, on a ici $\mathcal{S}=\left\{-2;\dfrac{8}{3}\right\}$.
2. Déterminons les racines de $-5x^2+x-1$. $\Delta=(1)^2-4(-5)(-1)=-19<0$ donc $\mathcal{S}=\emptyset$.
3. Déterminons les racines de $-4x^2+20x-25$. $\Delta=(20)^2-4(-4)(-25)=0$ donc le trinôme admet une racine double $x_0=-\dfrac{20}{2(-4)}=\dfrac{5}{2}$. Finalement, $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$.
4. Déterminons les racines de $\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{3}x-4$. $\Delta=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-4\left(\dfrac{1}{6}\right)(-4)=\dfrac{25}{9}>0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
$$x_1=\frac{-\left(\frac{1}{3}\right)-\sqrt{\frac{25}{9}}}{2\left(\frac{1}{6}\right)}=-6 \text{ et } x_2=\frac{-\left(\frac{1}{3}\right)+\sqrt{\frac{25}{9}}}{2\left(\frac{1}{6}\right)}=4.$$
Finalement, $\mathcal{S}=\{-6;4\}$.
5. Déterminons les solutions de $2x^2+3x=1$ c'est-à-dire les racines de $2x^2+3x-1=0$. $\Delta=(3)^2-4(2)(-1)=17>0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(3)-\sqrt{17}}{2(2)} = -\frac{3+\sqrt{17}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{-(3)+\sqrt{17}}{2(2)} = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}.$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3+\sqrt{17}}{4}; \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

6. Déterminons les racines de $7x^2+3x$:
   - 1ère façon. On a $\Delta = (3)^2 - 4(7)(0) = 9 > 0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
   $$x_1 = \frac{-(3)-\sqrt{9}}{2(7)} = -\frac{3}{7} \text{ et } x_2 = \frac{-(3)+\sqrt{9}}{2(7)} = 0.$$
   - 2ème façon. On factorise directement le trinôme :
   $$7x^2+3x = 0 \Leftrightarrow x(7x+3) = 0.$$
   Comme un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, on retrouve $x_1 = -\frac{3}{7}$ et $x_2 = 0$.

   Conclusion, $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{7}, 0\right\}$.

Exercice 94 On cherche dans chacun des cas, en premier lieu, à annuler les trinômes.

1. Déterminons les racines de x^2-5x+6. $\Delta = (-5)^2-4(1)(6) = 1$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2(1)} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2(1)} = 3.$$
Le trinôme est donc du signe de $a = 1$, c'est-à-dire positif, à l'extérieur des racines. Finalement, si $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des solutions de l'inéquation, on a $S =]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$.
2. Déterminons les racines de x^2+x+1. $\Delta = (1)^2-4(1)(1) = -3 < 0$ donc le trinôme est toujours du signe de $a = 1$ c'est-à-dire positif. On en déduit que $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.
3. Déterminons les racines de $2x^2+5x-3$. $\Delta = (5)^2-4(2)(-3) = 49$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-(5)-\sqrt{49}}{2(2)} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-(5)+\sqrt{49}}{2(2)} = \frac{1}{2}.$$
Le trinôme est donc du signe de $a = 2$, c'est-à-dire positif, à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur. Finalement on a $\mathcal{S} = \left[-3; \frac{1}{2}\right]$.
4. Déterminons les racines de $2x^2+9x-5$. $\Delta = (9)^2-4(2)(-5) = 121 = 11^2$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-(9)-11}{2(2)} = -5 \text{ et } x_2 = \frac{-(9)+11}{2(2)} = \frac{1}{2}.$$
Le trinôme est donc du signe de $a = 2$, c'est-à-dire positif, à l'extérieur des racines. On a $\mathcal{S} =]-\infty; -5] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
5. Déterminons les racines de $-x^2+10x-25$. $\Delta = (10)^2-4(-1)(-25) = 0$ donc le trinôme admet une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a} = 5$ et est du signe de $a = -1$ c'est-à-dire négatif. On en déduit donc que $\mathcal{S} = \{5\}$.
6. On peut procéder de deux façons :
   - En développant l'expression : $(x+1)^2+2 = x^2+2x+3$. Comme $\Delta = (2)^2-4(1)(3) = -8 < 0$, le trinôme est toujours du signe de $a = 1$ c'est-à-dire positif.
   - En remarquant directement que $(x+1)^2+2$ est une quantité positive quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

   Conclusion, on a $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.
7. On peut procéder de deux façons :
   - En développant l'expression : $-(4(x+2)^2+3) = -4x^2-16x-19$. Comme $\Delta = (-16)^2-4(-4)(-19) = -48 < 0$, le trinôme est toujours du signe de $a = -4$ c'est-à-dire négatif.
   - En remarquant directement que $-(4(x+2)^2+3)$ est une quantité négative quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

   Conclusion, on a $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice 95

1. On se donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{4}$	$+\infty$
$4x-9$	$-$	$-$	0	$+$
$3x-7$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{4x-9}{3x-7}$	$+$	$\|$	$-$ 0	$+$

On en déduit que, si $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des solutions de l'inéquation, $\mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{7}{3}\right[\cup \left[\frac{9}{4}; +\infty\right[$.

2. $\dfrac{-5x+3}{2x+1} \geq -1 \Leftrightarrow -5x+3 \geq -2x-1 \Leftrightarrow 3x-4 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{4}{3}$. Conclusion, $\mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{4}{3}\right]$.

Exercice 96

1. Déterminons les racines de $12x^2 - 8x - 15$. $\Delta = (-8)^2 - 4(12)(-15) = 784 = 28^2 > 0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-(-8)-28}{2(12)} = -\frac{5}{6} \text{ et } x_2 = \frac{-(-8)+28}{2(12)} = \frac{3}{2}.$$
On retrouve bien le fait que $P = \left(-\frac{5}{6}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{15}{12} = \frac{c}{a}$ et $S = \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = -\frac{b}{a}$.
2. Déterminons les racines de $12x^2 - 13x - 25$. $\Delta = (-13)^2 - 4(12)(-25) = 1369 = 37^2 > 0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-(-13)-37}{2(12)} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-(-13)+37}{2(12)} = \frac{25}{12}.$$
On retrouve bien le fait que $P = (-1)\left(\frac{25}{12}\right) = -\frac{25}{12} = \frac{c}{a}$ et $S = (-1) + \left(\frac{25}{12}\right) = -\frac{13}{12} = -\frac{b}{a}$.

Exercice 97

1. Il suffit, pour étudier algébriquement la position relative de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$, de comparer les équations :
$$3x^2 > 2x+5 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 5 > 0.$$
On se ramène ainsi à un problème de détermination de signe d'un trinôme du second degré. Déterminons les racines du trinôme. $\Delta = (-2)^2 - 4(3)(-5) = 64 = 8^2 > 0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-(-2)-8}{2(3)} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-(-2)+8}{2(3)} = \frac{5}{3}.$$
Le trinôme est du signe de $a = 3$, c'est-à-dire positif, à l'extérieur des racines. On en déduit donc que $3x^2 > 2x+5 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; -1\right] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right[$. Cela signifie que la courbe $\mathcal{P}$ est au-dessus de la droite $\mathcal{D}$ lorsque $x \in \left]-\infty; -1\right] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right[$ et en-dessous sinon.
Les points d'intersection sont au nombre de deux et admettent comme coordonnées $(-1; 3)$ (où 3 est obtenu en remplaçant x par -1 dans l'équation de la courbe $\mathcal{P}$ ou de la courbe $\mathcal{C}$) et $\left(\frac{5}{3}; \frac{25}{3}\right)$ (où $\frac{25}{3}$ est obtenu en remplaçant x par $\frac{5}{3}$ dans l'équation de la courbe $\mathcal{P}$ ou de la courbe $\mathcal{C}$).
2. On a le graphique de la page suivante :

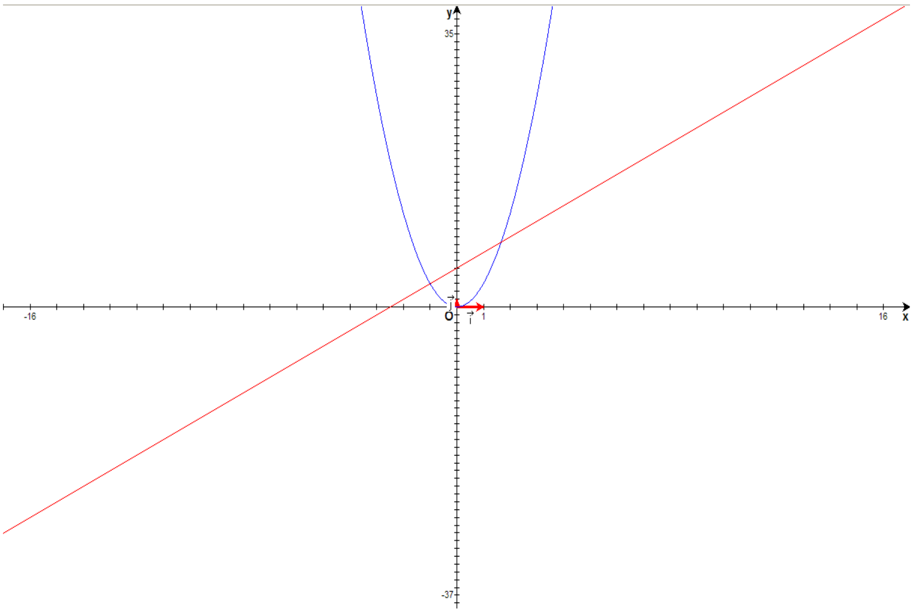
Exercice 98

1. La parabole est tournée vers le haut, on peut en déduire que $a > 0$, ce qui nous permet d'exclure f_2 et f_4.
2. La courbe ne coupant pas l'axe des abscisses, on peut en déduire que $\Delta < 0$. En effet, le trinôme ne s'annule pour aucune valeur de x. Ce constat nous permet d'exclure f_1 car dans le cas de cette fonction, $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$.
3. On déduit des deux points précédents que la parabole $\mathcal{P}$ est représentée par la fonction f_3.

Exercice 99 Les résultats du cours nous permettent d'affirmer que

- La propriété a désigne la courbe 6,
- la propriété b désigne la courbe 4,
- la propriété c désigne la courbe 1,
- la propriété d désigne la courbe 2,
- la propriété e désigne la courbe 3,

- la propriété ⓕ désigne la courbe ⑤.



Exercice 100 Soit V_0 la valeur initiale et V_f la valeur après deux semestres, on a l'égalité :

$$V_f = \left(1 + \frac{t_s}{100}\right)^2 V_0 = \left(1 + \frac{t_a}{100}\right) V_0$$

où t_s et t_a désignent les taux semestriel et annuel respectivement. Comme $t_a = 10$, on cherche t_s tel que

$$\left(1 + \frac{t_s}{100}\right)^2 = 1 + \frac{10}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{(100)^2}(100 + t_s)^2 = \frac{110}{100} \Leftrightarrow t_s^2 + 200t_s - 1000 = 0.$$

Déterminons les racines du trinôme. $\Delta = (200)^2 - 4(1)(-1000) = 44000 > 0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes

$$\frac{-(200) - \sqrt{44000}}{2(1)} = -(100 + \sqrt{11000}) < 0 \text{ et } \frac{-(200) + \sqrt{44000}}{2(1)} = -100 + \sqrt{11000} \simeq 4,88.$$

Par conséquent, le taux semestriel à intérêts composés équivalent à un taux annuel de 10% est approximativement égal à $4,88\%$.

Exercice 101 Soit V_0 la valeur initiale et V_f la valeur après les deux remises. On peut donc écrire que

$$V_f = \left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{y}{100}\right) V_0 \text{ avec } x, y > 0.$$

On a le système

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} \left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{y}{100}\right) & = & 0,9016 \\ x + y & = & 10 \end{array} \right. .$$

On a alors :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 1 - \frac{1}{100}(x+y) + \frac{xy}{100^2} & = & 0,9016 \\ x + y & = & 10 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{90}{100} + \frac{xy}{100^2} & = & 0,9016 \\ x + y & = & 10 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} xy & = & 16 \\ x + y & = & 10 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x(10 - x) & = & 16 \\ x + y & = & 10 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - 10x + 16 & = & 0 \\ x + y & = & 10 \end{array} \right.$$

Déterminons les racines du trinôme. $\Delta = (-10)^2 - 4(1)(16) = 36 > 0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{36}}{2(1)} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-(-10) + \sqrt{36}}{2(1)} = 8.$$

Par conséquent,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (x,y) & = & (2,8) \\ (x,y) & = & (8,2) \end{array} \right.$$

D'après l'énoncé, x est inférieur à y donc $(x,y) = (2,8)$.

Exercice 102

1. On décide de travailler en milliers d'euros. On a les informations suivantes :
$$\left\{ \begin{array}{rcll} x+y & = & 200 & (1) \\ x\left(\dfrac{t}{100}\right) & = & 8,4 & (2) \\ y\left(\dfrac{t+3}{100}\right) & = & 8 & (3) \end{array} \right.$$
$(2) \Rightarrow \dfrac{t}{100} = \dfrac{8,4}{x}$. En injectant cette information dans (3), on obtient :
$$y\left(\frac{8,4}{x} + \frac{3}{100}\right) = 8 \Leftrightarrow y\left(\frac{8,4 \times 100 + 3x}{100x}\right) = 8 \Leftrightarrow 840y + 3xy = 800x \Leftrightarrow 3xy + 840y - 800x = 0.$$
Or, $(1) \Leftrightarrow y = 200 - x$. En injectant cette information dans (3), on obtient :
$$3x(200-x) + 840(200-x) - 800x = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 1040x + 168000 = 0.$$
Déterminons les racines du trinôme. $\Delta = (-1040)^2 - 3(-3)(168000) = 1760^2 > 0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-(-1040) - 1760}{2(-3)} = 120 \text{ et } x_2 = \frac{-(-1040) + 1760}{2(-3)} < 0.$$
Par conséquent, $x = 120$ et on déduit de (1) que $y = 80$.
2. En remplaçant x dans (2) (ou y dans (3)), on obtient $t = 7$.

Exercice 103

1. On remplace $(p;q)$ par $(25;50)$ et $(24,5;55)$ dans (1) et on obtient le système proposé.
2. Le système se résout très simplement par substitution ou par combinaison et on obtient $(a;b) = (-10;300)$.
3. Soient C, R, B le coût de fabrication, la recette et le bénéfice réalisés respectivement lors de la vente de q objets. On a $R(q) = pq$ et $B(q) = R(q) - C(q) = pq - 16q = (p-16)q$.
4. $B = (p-16)q = (p-16)(-10p+300) = -10p^2 + 460p - 4800$. Déterminons les racines du trinôme. $\Delta = (460)^2 - 4(-10)(-4800) = 19600 = 140^2$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
$$\frac{-(460) - 140}{2(-10)} = 30 \text{ et } \frac{-(460) + 140}{2(-10)} = 16.$$
Le trinôme est du signe de $-a = -(-10) = 10$, c'est-à-dire positif, à l'intérieur des racines. On en déduit que $B(p)$ est positif dans $]16;30[$.
5. Le trinôme est du signe de $a = -10$, c'est-à-dire négatif, à l'extérieur des racines. On en déduit que $B(p)$ est négatif dans $[0;16[\cup]30;+\infty[$ (un prix étant nécessairement positif).
6. On utilise l'indication : le sommet de la parabole d'équation $y = -10p^2 + 460p - 4800$ admet pour abscisse la demi-somme des racines du trinôme $-10p^2 + 460p - 4800$ soit $\dfrac{1}{2}(16+30) = 23$. Le bénéfice est maximal pour $p = 23$.

Exercice 104 Soit n le nombre de mois. On a
$$10000\left(1 + \frac{8}{12} \times \frac{n}{100}\right)\left(1 + \frac{12}{12} \times \frac{n}{100}\right) = 12650 \Leftrightarrow \frac{96}{144}n^2 + \frac{2000}{12}n - 2650 = 0 \Leftrightarrow 96n^2 + 24000 - 381600 = 0.$$
Déterminons les racines du trinôme. $\Delta = (24000)^2 - 4(96)(-381600) = 26880^2 > 0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
$$n_1 = \frac{-(24000) - 26880}{2(96)} < 0 \text{ et } n_2 = \frac{-(24000) + 26880}{2(96)} = 15.$$
On en déduit que la durée du placement est de 15 mois.

Exercice 105 Soient x et y les mises de fonds initiales des deux associés et $B(x)$ et $B(y)$ les bénéfices respectifs réalisés lors de la vente de la société. On a le système

$$\left\{\begin{array}{ccc} (x+B(x))+(y+B(y)) & = & 12000 \quad (1) \\ 1440 & = & \alpha x = B(x) \quad (2) \\ y+B(y) & = & 3840(1+\alpha) \quad (3) \end{array}\right.$$

On injecte (2) et (3) dans (1) : on obtient

$$x+\alpha x+3840(\alpha+1)=12000 \Leftrightarrow (\alpha+1)(x+3840)=12000 \ (4).$$

Or (2) $\Rightarrow \alpha=\dfrac{1440}{x}$. En injectant cette information dans (4), on obtient

$$\left(\frac{1440}{x}+1\right)(x+3840)=12000 \Leftrightarrow (1440+x)(x+3840)=12000x \Leftrightarrow x^2-6720x+5529600=0.$$

Déterminons les racines de ce trinôme. $\Delta=(-6720)^2-4(1)(5529600)=4800^2>0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{6720-4800}{2}=960 \text{ et } x_2=\frac{6720+4800}{2}=9120.$$

La seconde solution est incompatible avec les valeurs de l'énoncé donc $x=960$. Grâce au système on trouve $B(y)=5760$.