CORRECTION Exercices Chapitre 2 - Sens de variation. Dérivation.

Exercice 16

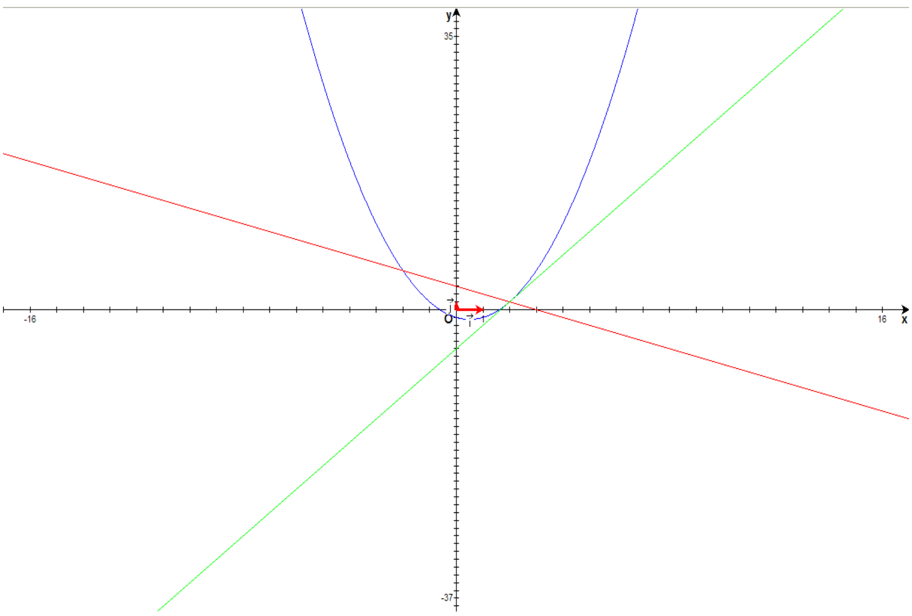
1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 5.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{\sqrt{x}}{x^2}.$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ k'(x) = \dfrac{(1)(x^2+1) - 2x(x+5)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2 - 10x + 1}{(x^2+1)^2}.$

Exercice 17

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 8x - 3.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (2)(3x-7) + (2x+3)(3) = 12x - 5.$
3. $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\},\ k'(x) = \dfrac{2(3x-1) - 3(2x+4)}{(3x-1)^2} = -\dfrac{14}{(3x-1)^2}.$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ k'(x) = 5(4x+3)(2x^2+3x+1)^4.$

Exercice 18

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x - 1.$
2. L'équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point x_0 est donnée par
$$T_{x_0} : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
Par conséquent,
$$T_2 : y = f(2) + f'(2)(x-2) = 1 + 3(x-2) = 3x - 5.$$
3. $g(x) = f(x) \Leftrightarrow 3 - x = x^2 - x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2).$
4. Les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ sont donnés par
$$(2, f(2)) = (2, 1) \text{ et } (-2, f(-2)) = (-2, 5).$$
5. On se donne le graphique ci-dessous :



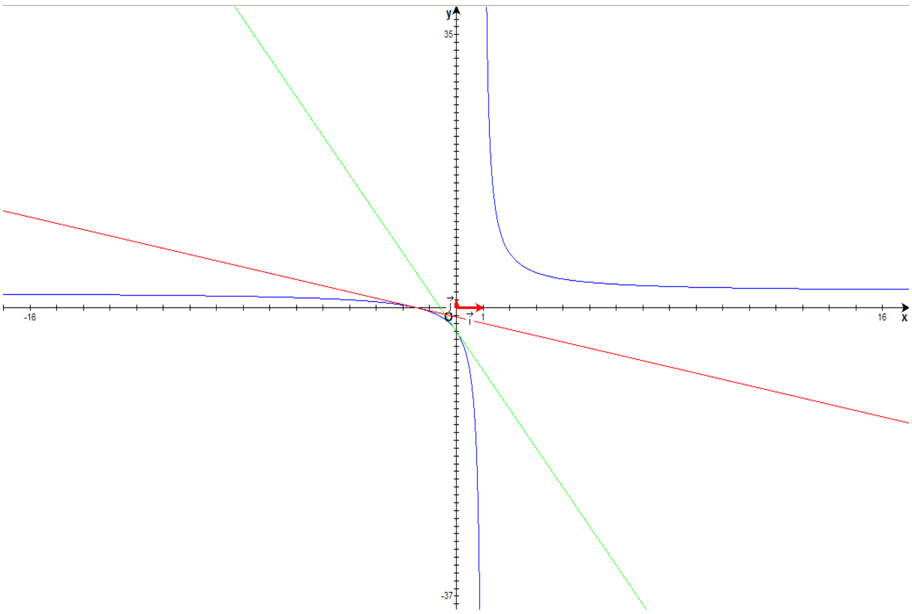
Exercice 19

1. $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\},\ f'(x) = \dfrac{2(x-1) - (2x+3)(1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-5}{(x-1)^2}.$

2. Soient $(x_A, 0)$ les coordonnées de A. On cherche par conséquent x_A vérifiant $f(x_A) = 0$:
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}.$$
Finalement, $A\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.
L'équation de la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A est donnée par
$$T_A : y = f\left(-\frac{3}{2}\right) + f'\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 + \frac{-5}{(-\frac{3}{2}-1)^2}\left(x + \frac{3}{2}\right) = -\frac{4}{5}\left(x + \frac{3}{2}\right).$$

3. Soient $(0, y_B)$ les coordonnées de B. y_B correspond à l'ordonnée à l'origine et vérifie $y_B = f(0) = \dfrac{3}{(-1)} = -3$.
On en déduit que $B\,(0; -3)$.
L'équation de la tangente T_B à la courbe $\mathcal{C}_f$ en B est donnée par
$$T_B : y = f(0) + f'(0)(x-0) = -3 + (-5)(x-0) = -3 - 5x.$$

4. On se donne le graphique ci-dessous :



Exercice 20

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 3$.

   (b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$.

   (c) On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$-9/4$	$\nearrow$	$+\infty$

   Voici les détails :
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 3x = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2\left(1 - \frac{3}{x}\right) = +\infty$.
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
   - $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}$.

2. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 - 3$

   (b) On remarque que $g'(x) = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$ ce qui permet d'en déduire le signe de la dérivée. $g'(x)$ est donc strictement positif (du signe de $a = 3$) dans $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ (à l'extérieur des racines) et strictement négatif (du signe de $-a$) dans $]-1; 1[$ (à l'intérieur des racines).

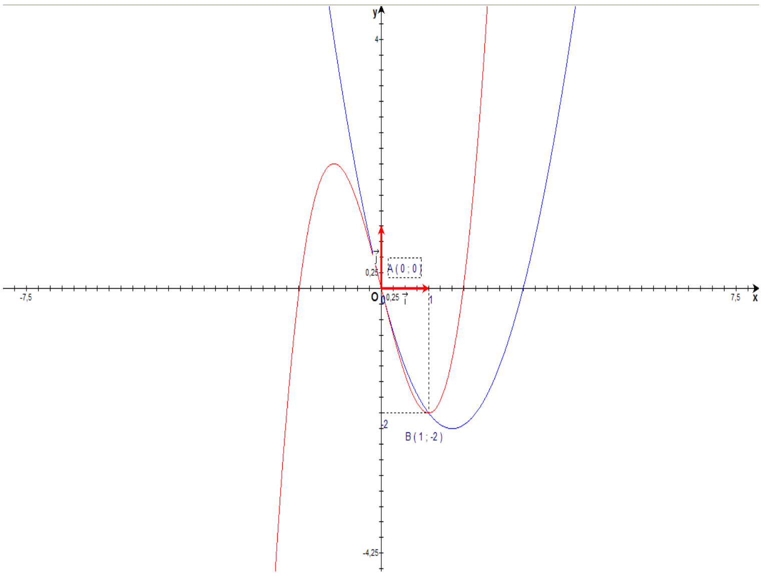
(c) On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Voici les détails :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 - 3x = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 \left(1 - \dfrac{3}{x^2}\right) = -\infty.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$
- $g(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2.$
- $g(1) = (1)^3 - 3(1) = -2.$

3. (a) i. On a le graphique suivant :



ii. D'après le graphique, il semble qu'il y ait deux points d'intersection entre les deux courbes, situés approximativement en $(0,0)$ et $(1,-2)$.

(b) i. On a les équivalences

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x = x^3 - 3x \Leftrightarrow x^2 = x^3 \Leftrightarrow x^2(1-x) = 0.$$

On en déduit que

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

ii. On vient donc de trouver les deux abscisses des deux points d'intersection. Pour récupérer les ordonnées de ces points, il suffit de remplacer x par 0 et par 1 dans $f(x)$ ou $g(x)$. On trouve aisément $f(0) = g(0) = 0$ et $f(1) = g(1) = -2$ ce qui permet d'affirmer que les points d'intersection sont $A(0,0)$ et $B(1,-2)$.

Exercice 21

1. Soit $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f. On rappelle que f est une fonction impaire si et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f$,
$$-x \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(-x) = -f(x).$$
Ici $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$. Ensuite, $f(-x) = \dfrac{(-x)}{(-x)^2+1} = -\dfrac{x}{x^2+1} = -f(x)$. On en déduit donc que f est impaire, ce qui signifie que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine (on peut donc se contenter de travailler sur $[0;+\infty]$ et en déduire le comportement de la fonction sur $]-\infty;0]$).
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{(x)'(x^2+1) - (x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^2+1) - (2x^2)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$
3. Le carré d'un nombre réel étant toujours positif, le dénominateur de $f'(x)$ est positif pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$ revient d'après la question précédente à résoudre l'inéquation $1 - x^2 \geq 0$ (le dénominateur ne joue aucun rôle quant au signe de $f'(x)$). On remarque aisément que $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$ ce qui permet d'affirmer que $1 - x^2$ est strictement négatif dans $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ (signe de "a" à l'extérieur des racines) et positif ou nul dans $[-1;1]$ (signe de "$-a$" à l'intérieur des racines). Finalement,

$$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1].$$

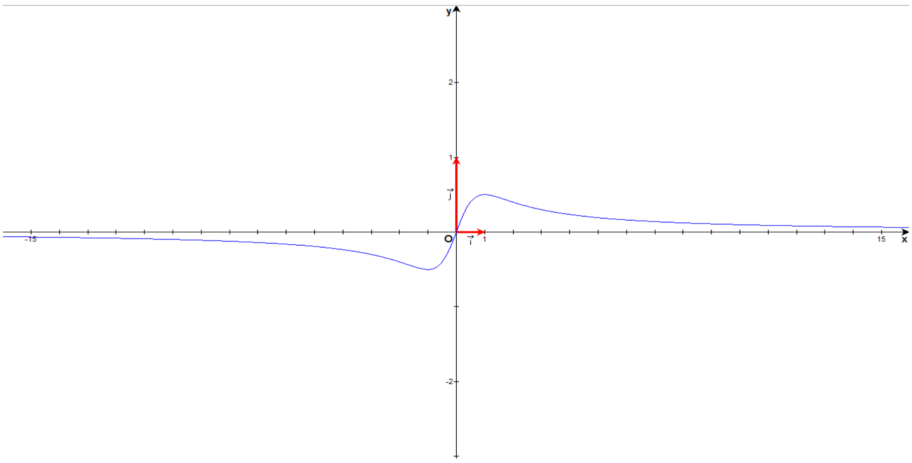
5. On a d'après les réponses aux questions précédentes le tableau de variations

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
signe $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	0^-	$\searrow$	$m = -\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$M = \frac{1}{2}$	$\searrow$	0^+

On donne les détails :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x(1+\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0^-$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$,
- $m = f(-1) = \dfrac{-1}{(-1)^2+1} = -\dfrac{1}{2}$,
- $M = f(+1) = \dfrac{+1}{(+1)^2+1} = \dfrac{1}{2}$.

6. On a le graphique suivant :



Exercice 22

1. (a) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1$.
   (b) 1 étant une constante positive, $f'(x) \geq 0$, $\forall x > 0$.
   (c) On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Voici les détails

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x - 1 = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = -\infty$.

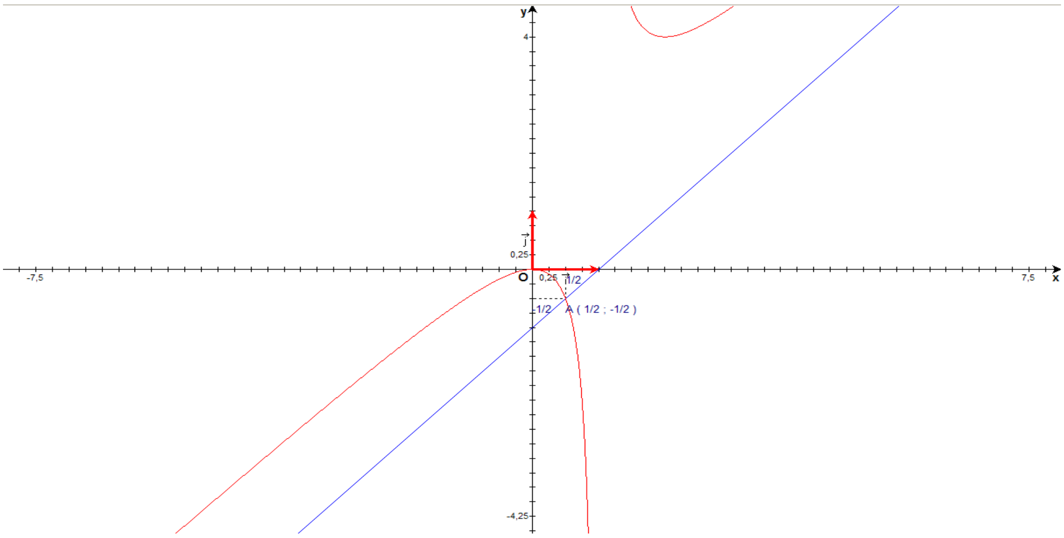
2. (a) $\forall x \neq 1$, $g'(x) = \dfrac{(x^2)'(x-1) - (x^2)(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.
   (b) Le dénominateur étant strictement positif sur $\mathbb{R} - \{1\}$, le signe de la dérivée dépend du signe du numérateur. Comme le numérateur s'annule en 0 et 2, on peut affirmer que $f'(x)$ est positif sur l'intervalle $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$ et négatif sur $]0; 1[\cup]1; 2[$.
   (c) On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

On donne les détails :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x(1-\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{(1-\frac{1}{x})} = -\infty$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$,
- $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty$,
- $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = +\infty$,
- $g(0) = \dfrac{(0)^2}{0+1} = 0$,
- $g(2) = \dfrac{(2)^2}{2-1} = 4$.

3. (a) i. On a le graphique suivant :



ii. Visuellement, on dénombre un unique point d'intersection situé approximativement au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

(b) i. $\forall x \neq 1$,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x-1 = \frac{x^2}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1 = x^2 \Leftrightarrow 1-2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Cela confirme l'abscisse du point d'intersection trouvé à la question précédente.

ii. L'ordonnée du point A est égale à $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2}$. Cela confirme l'ordonnée du point d'intersection trouvé à la question précédente.

Exercice 23

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$.
2. On est ramené à l'étude du signe d'un trinôme du second degré. $\Delta = (-8)^2 - 4(3)(4) = 16 = 4^2 > 0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :

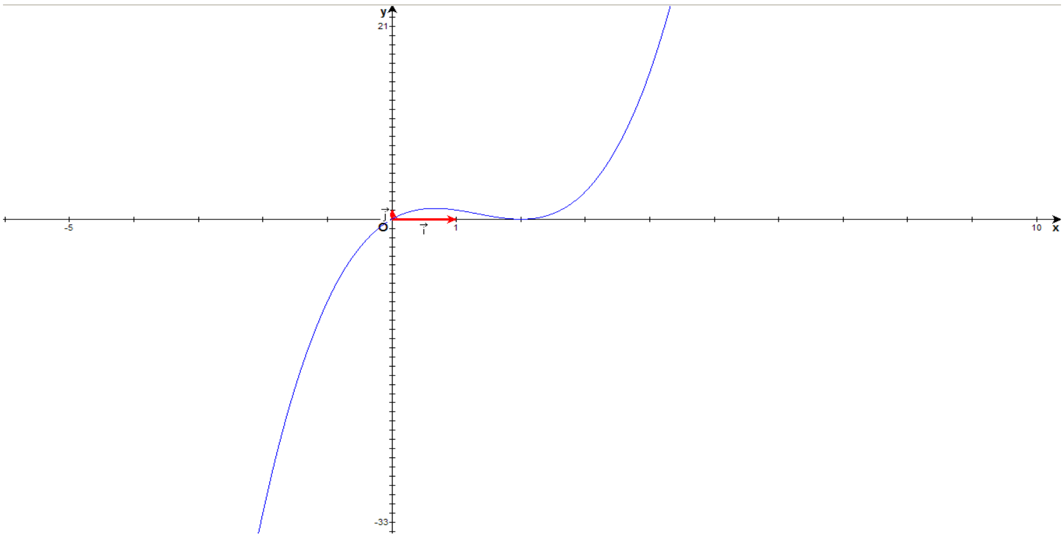
$$x_1 = \frac{-(-8)-4}{2(3)} = \frac{2}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-(-8)+4}{2(3)} = 2.$$

Le trinôme est du signe de $a = 3 > 0$ à l'extérieur des racines et du signe de $-a = -3 < 0$ à l'intérieur.

3. On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. On a la courbe suivante :



5. On cherche x tel que
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - 4x + 4 & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array} \right. .$$
On se ramène ainsi à un problème de détermination des racines d'un trinôme. $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$ donc le trinôme admet une racine double $x_0 = \dfrac{-(-4)}{2(1)} = 2$. Par conséquent, $(0, 0)$ et $(2, 0)$ sont les deux seuls points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

Exercice 24

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x - 3$.
2. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$. $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 1 > 0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2(1)} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2(1)} = 2.$$

Exercice 25

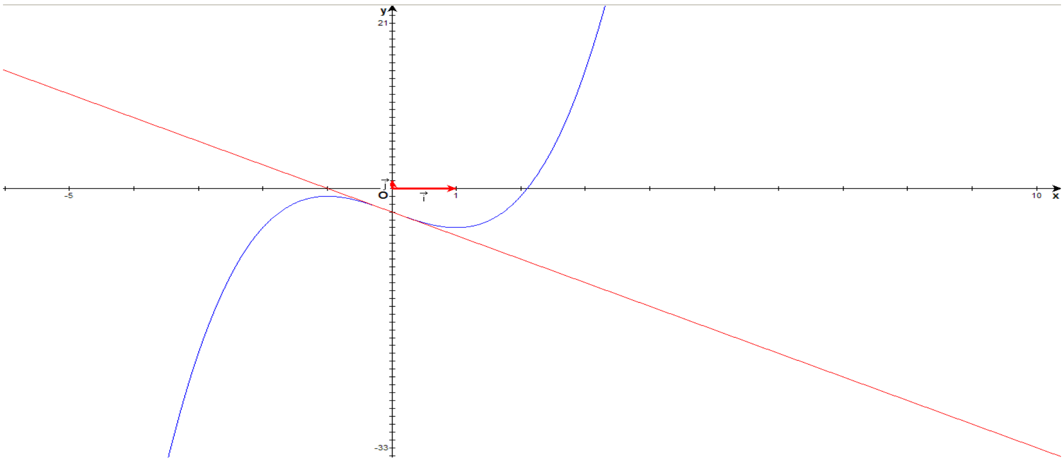
1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Le tableau de variations de la fonction f est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		1		α		$+\infty$
variations f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donnée par
$$T_0 : y = f(0) + f'(0)(x - 0) = -3 - 3(x - 0) = -3x - 3.$$
4. On a le graphique suivant :



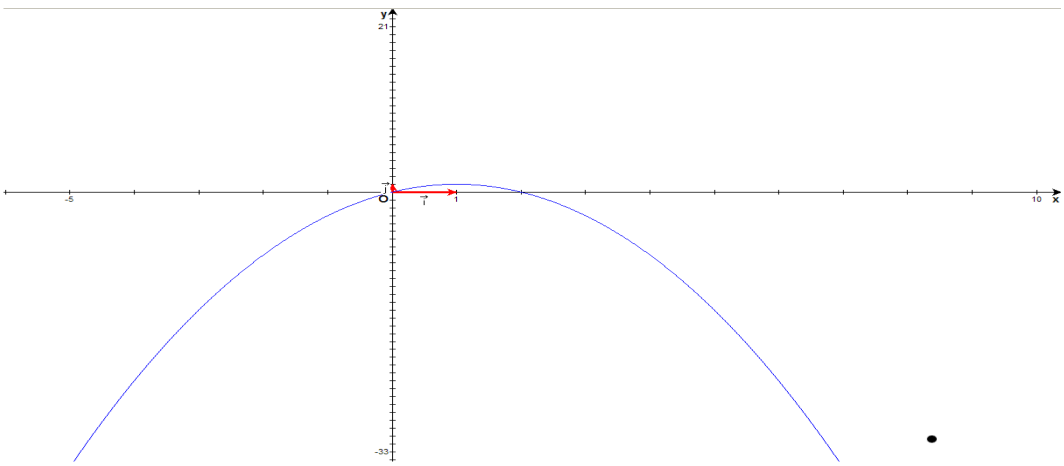
5. On remarque d'après le tableau de variations que $f(x)$ s'annule en une unique valeur $\alpha \in [1; +\infty[$. Comme $f(2) = -1$ et $f(3) = 15$, on en déduit que $\alpha \in [2; 3]$.
6. On trouve grâce à la calculatrice ou par dichotomie, que $\alpha = 2,1$ à 10^{-1} près par défaut.

Exercice 26

1. On a
$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} 2\ell + 2L & = & 4 \\ \ell \times L & = & \dfrac{3}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \ell + L & = & 2 \\ \ell & = & \dfrac{3}{4L} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3 + 4L^2 & = & 8L \\ \ell & = & \dfrac{3}{4L} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4L^2 - 8L + 3 & = & 0 \\ \ell & = & \dfrac{3}{4L} \end{array} \right.$$
Déterminons les racines du trinôme. $\Delta = (-8)^2 - 4(4)(3) = 16$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{16}}{2(4)} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-8) + \sqrt{16}}{2(4)} = \frac{3}{2}.$$
Par convention, $L > \ell$ donc on choisit $L = \dfrac{3}{2}$ et on obtient facilement $\ell = \dfrac{1}{2}$.
2. (a) $S = \ell \times L = \ell(2 - \ell)$ car le périmètre du rectangle est égal à 4 et de ce fait, $2(L + \ell) = 4 \Leftrightarrow L = 2 - \ell$.
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 - 2x$. On en déduit le signe de la dérivée et le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

On a la représentation graphique suivante :



(c) On en déduit que f atteint son maximum en $x = 1$ ce qui permet d'affirmer que le rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale est de largeur 1 et donc de longueur 1, c'est-à-dire que le rectangle est en fait un carré.

Exercice 27

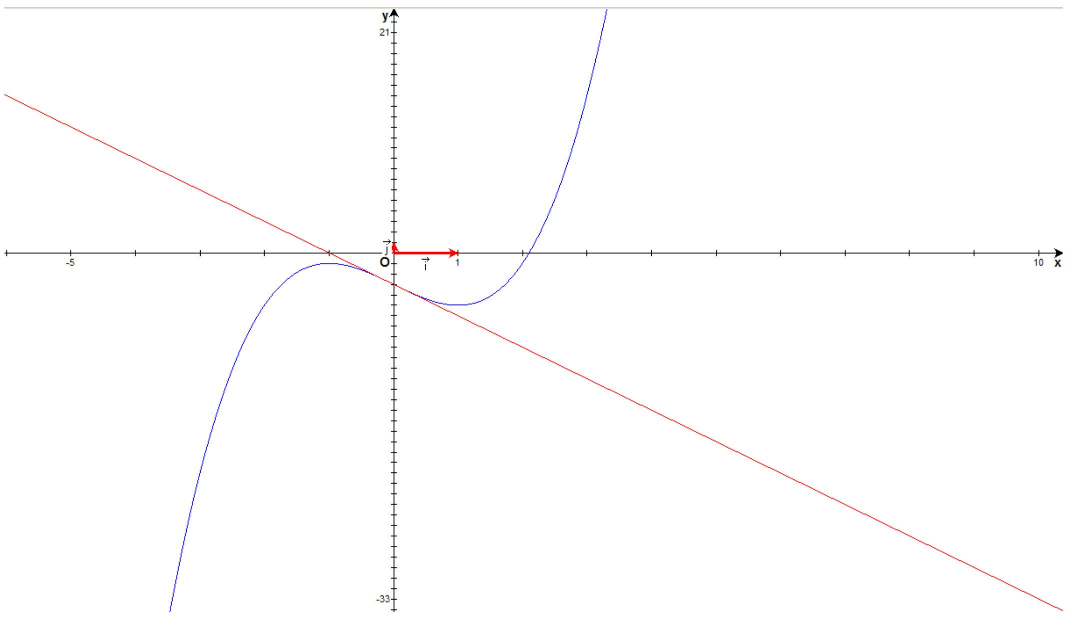
1. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2 - 120x + 450$. Déterminons les racines du trinôme. $\Delta = (-120)^2 - 4(6)(450) = 3600 = 60^2$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-(-120) - 60}{2(6)} = 5 \text{ et } x_2 = \frac{-(-120) + 60}{2(6)} = 15.$$
Le trinôme est du signe de $a = 6 > 0$ à l'extérieur des racines et négatif donc à l'intérieur. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		5		15		20
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations f	0	$\nearrow$	1000	$\searrow$	0	$\nearrow$	1000

(b) $T_0 : y = f(0) + f'(0)(x - 0) = 450x$.

(c) On résout $f(x) = 0$. On a $f(x) = x(2x^2 - 60x + 450)$. Intéressons-nous au trinôme du seconde degré. $\Delta = (-60)^2 - 4(2)(450) = 0$ donc le trinôme admet une racine double $x_0 = -\dfrac{(-60)}{2(2)} = 15$. Finalement $f(x) = 2x(x - 15)^2$ ce qui nous permet d'affirmer que les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses sont $(0; 0)$ et $(15; 0)$.

(d) On a les représentations graphiques suivantes :



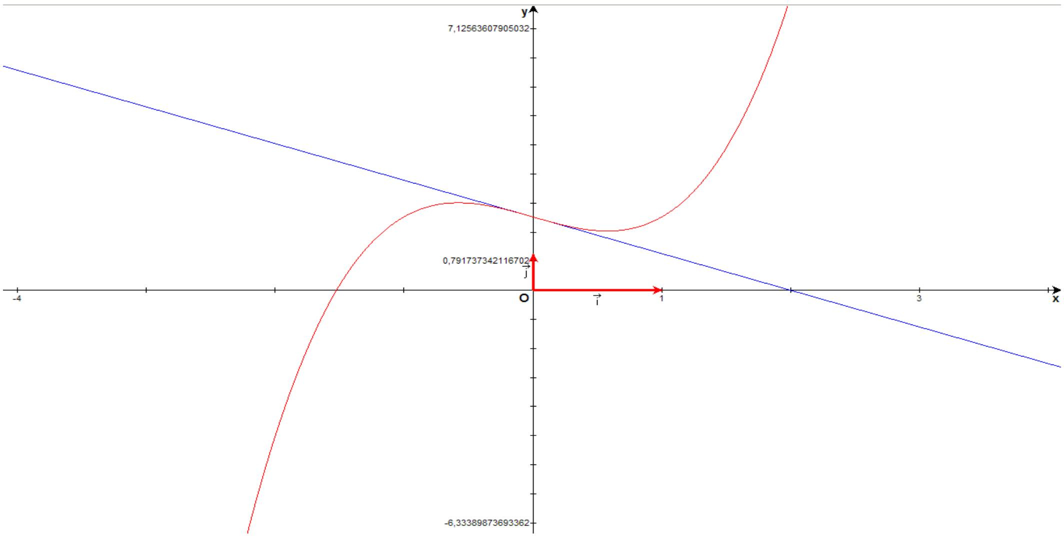
2. (a) Le volume d'un parallélépipède est égal à $V = \ell \times L \times h$ où ℓ, L, h désignent respectivement la largeur, la longueur et la hauteur de la "boîte". Dans notre cas, $\ell = x$, $L = \dfrac{1}{2}(30 - 2x) = 15 - x$ et $h = 30 - 2x$. Ainsi,
$$V(x) = x(15 - x)(30 - 2x) = 2x(15 - x)^2 = f(x).$$

(b) Le volume est maximal pour $x = 5$ d'après le tableau de variations précédent (le cas $x = 20$ est exclus car $0 < x < 15$). La valeur du volume maximal est égale à $V(5) = 1000\text{cm}^3$.

Exercice 28

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 1$. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est donnée par $y : f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Si $x_0 = 0$, l'équation recherchée est
$$T_0 : y = f(0) + f'(0)(x - 0) = 2 + (-1)(x - 0) = -x + 2.$$

2. On a les graphes ci-dessous :



Exercice 29 Il suffit pour déterminer les coordonnées du sommet S de $\mathcal{P}$ d'étudier les variations de f. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 3$. On en déduit les variations ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que S admet pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right)$.

On pouvait retrouver ce résultat en se rappelant que le sommet d'une parabole admet pour abscisse la $\frac{1}{2}$-somme des racines de la fonction associée. $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(1) = 5 > 0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{5}}{2(1)} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{5}}{2(1)} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{3}{2}$ et on retrouve bien l'abscisse du sommet.

Exercice 30

1. Une vitesse est un rapport d'une distance au temps. Par conséquent, $\nu = \frac{150}{t} \Leftrightarrow t = \frac{150}{\nu}$.
2. On a $P(\nu) = \left[\left(6 + \frac{\nu^2}{300}\right) 0,9 + 12\right] \frac{150}{\nu} = \frac{9\nu}{20} + \frac{2610}{\nu}$.
3. Étudions les variations de P. $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$ (la vitesse est supposée strictement positive), $P'(\nu) = \frac{9}{20} - \frac{2610}{\nu^2}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

ν	0		$10\sqrt{58}$		$+\infty$
signe $P'(\nu)$	$\|$	$-$	0	$+$	
variations f	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$19\sqrt{58}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. On déduit du tableau précédent que la vitesse ν du camion qui rend le prix de revient $P(\nu)$ minimal est $\nu = 10\sqrt{58} \simeq 76,16\text{km/h}$.

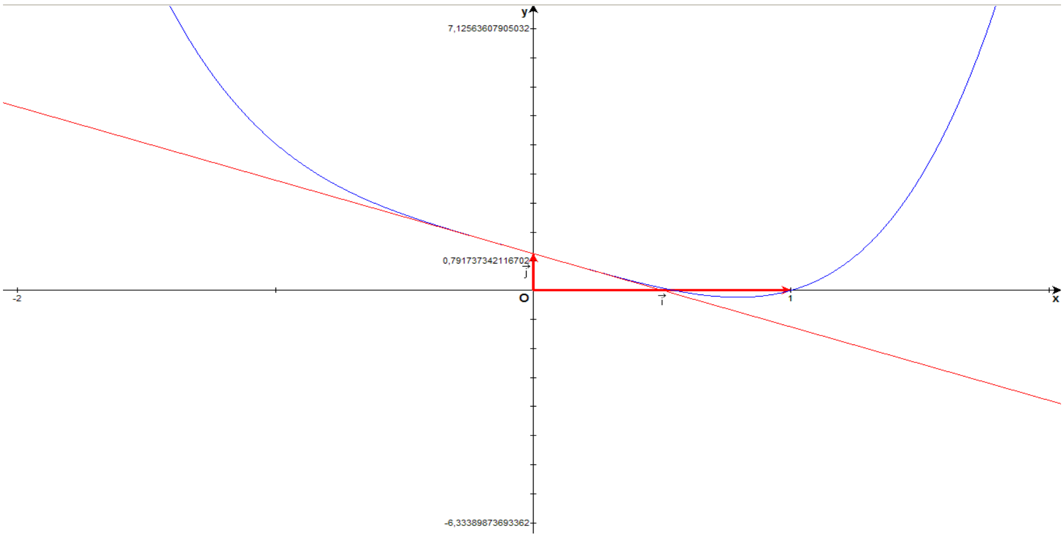
Exercice 31 On sait par définition que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ ou, en remplaçant x par $x_0 + h$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0).$$

1. $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=2005(1+x)^{2004}$ ce qui implique que $f'(0)=2005$.
2. L'accroissement moyen de la fonction f entre 0 et h est donné par
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{(1+h)^{2005}-1}{h}.$$
En utilisant le rappel précédent, on sait que
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^{2005}-1}{h}=f'(0)=2005.$$

Exercice 32

1. $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=4x^3-2$. L'équation demandée est alors
$$T_0: y=f(0)+f'(0)(x-0)=1+(-2)(x-0)=1-2x.$$
2. On a les courbes ci-dessous :



Exercice 33

1. • $\forall x\in\mathbb{R}_+^\star,\ f'(x)=\dfrac{(x+\sqrt{x})-x\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x+\sqrt{x})^2}=\dfrac{\sqrt{x}-\frac{x}{2\sqrt{x}}}{(x+\sqrt{x})^2}=\dfrac{\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^2}$.
   • $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\},\ g'(x)=3\left(-\dfrac{1}{(1+x)^2}\right)\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^3=-\dfrac{3}{(1+x)^5}$.
2. • $f'(16)=\dfrac{4}{2(16+4)^2}=\dfrac{1}{200}$.
   • $g'(2)=-\dfrac{1}{3^4}=-\dfrac{1}{81}$.

Exercice 34

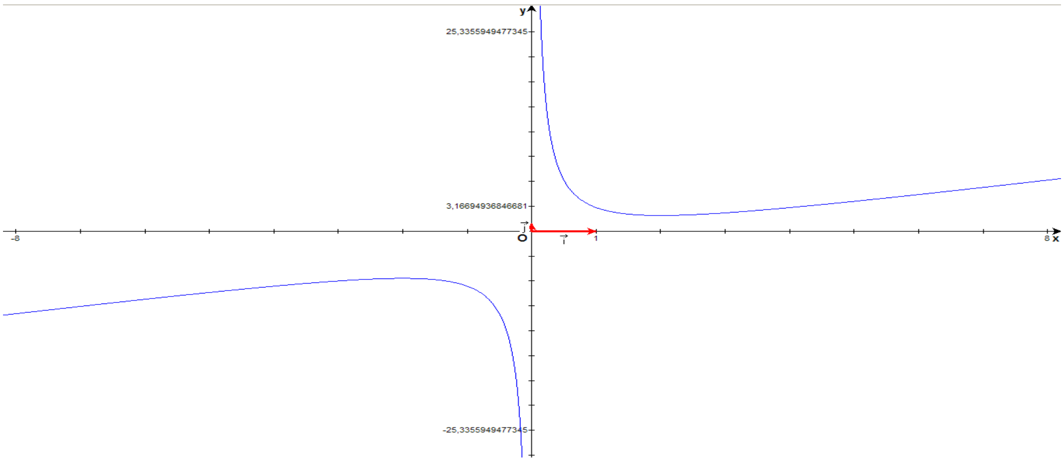
1. $\forall x\in\mathbb{R}^\star,\ f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}$. On en déduit le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

2. Le tableau de variations de f en découle :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
variations f	$-\infty$	↗	$-3\sqrt{2}-2$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$3\sqrt{2}-2$	↗	$+\infty$

3. Les graphiques sont donnés ci-dessous :



Exercice 35

1. On a $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$,
$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x-2) - (x^2+ax+b)(1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 2a - b}{(x-2)^2}.$$
2. $y = 8$ est l'équation d'une droite (tangente) horizontale, donc de pente nulle ce qui signifie que $f'(3) = 0$. On a également $f(3) = 8$. Cela nous amène au système
$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(3) & = & 8 \\ f'(3) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 9+3a+b & = & 8 \\ -3-2a-b & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2a+b & = & -3 \\ 3a+b & = & -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b & = & -7 \end{array} \right.$$
Par conséquent, la droite d'équation $y = 8$ est tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x = 3$ si et seulement si $a = 2$ et $b = -7$.
On suppose à partir de maintenant que $a = 2$ et $b = -7$.
3. • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x-7}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$,
   • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$,
   • $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$,
   • $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$.
4. Les deux dernières limites nous permettent d'affirmer que la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote (verticale) de $\mathcal{C}$.
5. On cherche à annuler $f'(x)$:
$$\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0.$$
Déterminons les racines du trinôme. $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4 > 0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2(1)} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2(1)} = 3.$$
On retrouve bien le fait que la tangente à $\mathcal{C}$ en $x = 3$ est horizontale. Cependant il existe une autre valeur de x en laquelle la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ est horizontale, en l'occurence $x = 1$.

Exercice 36

1. On remarque aisément que $x = 1$ et $x = -3$ sont des racines de $P(x)$ donc $P(x) = (x-1)(x+3)$.
2. On a $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathcal{D}$, $-x \in \mathcal{D}$.
   • $f(-x) = -2(-x)^2 + 1 = -2x^2 + 1 = f(x)$ ce qui signifie que f est paire,
   • $g(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 1 = -x^3 + 3x + 1$ ce qui signifie que g n'est ni paire ni impaire.
3. • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,
   • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$,
   • $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$,
   • $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

4. • $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4x + 1$. On a alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$. On a alors le tableau de signes suivant :

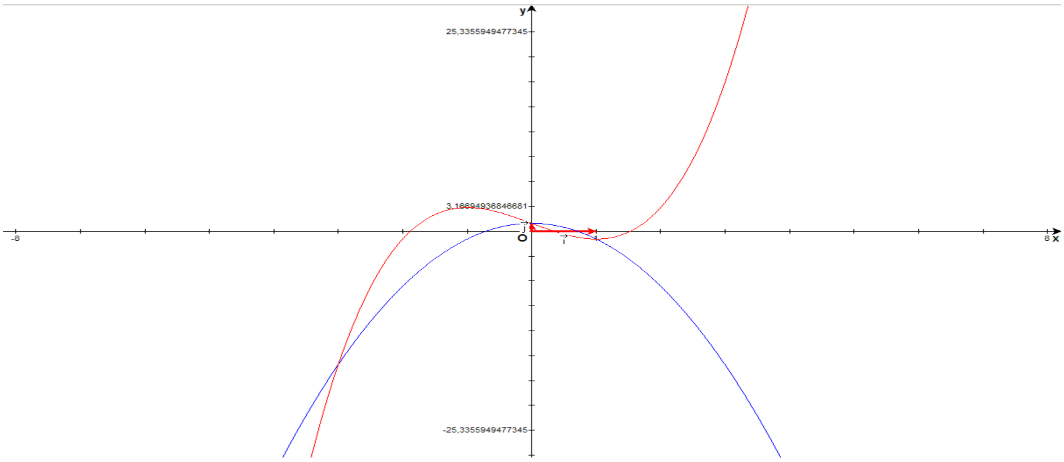
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. Les tableaux de variation des fonctions f et g sont donnés ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
variations f			$\frac{7}{8}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
variations g			3				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-1		

6. On a les graphiques suivants :



7. $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow -2x^2+1 \leq x^3-3x+1 \Leftrightarrow x^3+2x^2-3x \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2+2x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+3) \geq 0$.
On dresse ensuite un tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
signe x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe $(x-1)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe $(x+3)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe $x(x-1)(x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Finalement, $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \in [-3;0] \cup [1;+\infty[$.

Exercice 37

1. • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3x+6}{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$,
• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$,
• $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$,
• $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$.
Les deux dernières limites nous permettent d'affirmer que la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote (verticale) de $\mathcal{C}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$, $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-2)-(x^2-3x+6)(1)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

3. On déduit du tableau de signes précédent les variations de f :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
variations f	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{ax^2 + (b-2a)x + (-2b+c)}{x-2} = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-2}.$$

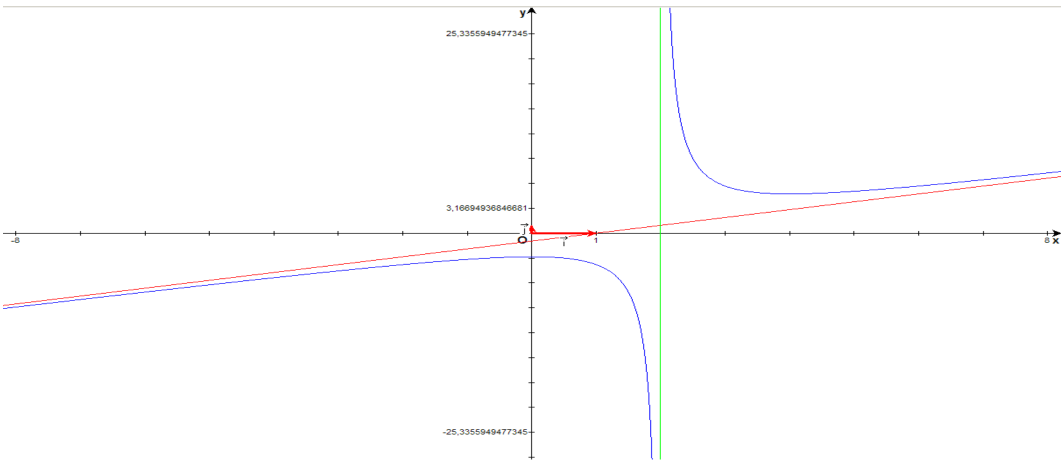
Par identification, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b - 2a & = & -3 \\ -2b + c & = & 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & -1 \\ c & = & 4 \end{array} \right.$$

Finalement, $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-2}$.

(b) Comme $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x-2} = 0$, la droite D d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

(c) On a les graphiques ci-dessous :



Exercice 38

1. Pour prouver la dérivabilité de f en 2, on calcule

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\left(\frac{1}{x} + 2\right) - \left(\frac{1}{2} + 2\right)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2} = \frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2} = \lim_{x \to 2} -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{4}.$$

Comme la limite existe et est finie, f est dérivable en 2 et vaut $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$.

2. L'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ représentant f au point d'abscisse 2 est donnée par

$$T_2 : y = f(2) + f'(2)(x-2) = \left(\frac{1}{2} + 2\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)(x-2) = -\frac{1}{4}x + 3.$$

Exercice 39

1. • $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3}{x+4} + 2 = 2$,
   • $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$,
   • $\displaystyle\lim_{x \to -4^-} f(x) = +\infty$,
   • $\displaystyle\lim_{x \to -4^+} f(x) = -\infty$.

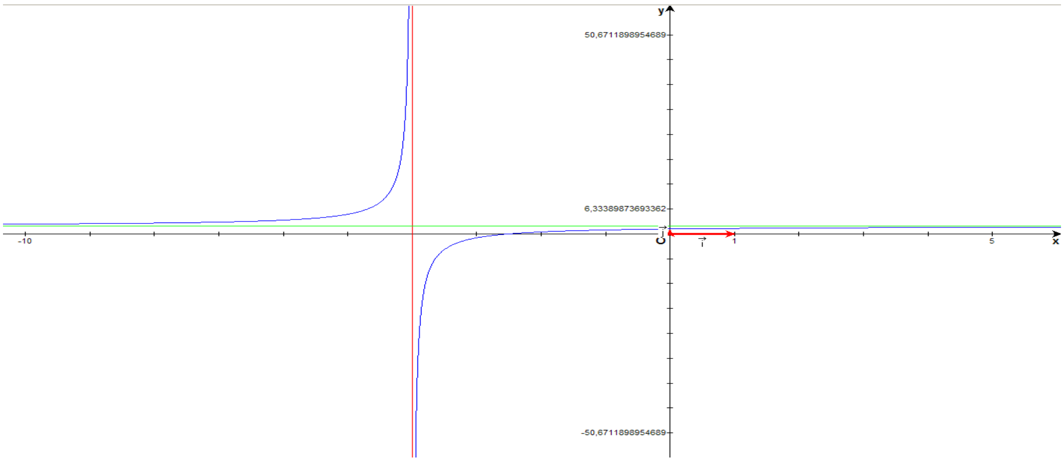
   Les deux premières limites nous permettent d'affirmer que la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote (verticale) de $\mathcal{C}$. Les deux dernières limites nous permettent d'affirmer que la droite d'équation $y = -4$ est une asymptote (horizontale) de $\mathcal{C}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-4\}$, $f'(x) = \dfrac{3}{(x+4)^2} > 0$.

3. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
variations f	$-\infty \nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow +\infty$

4. On a les courbes suivantes :

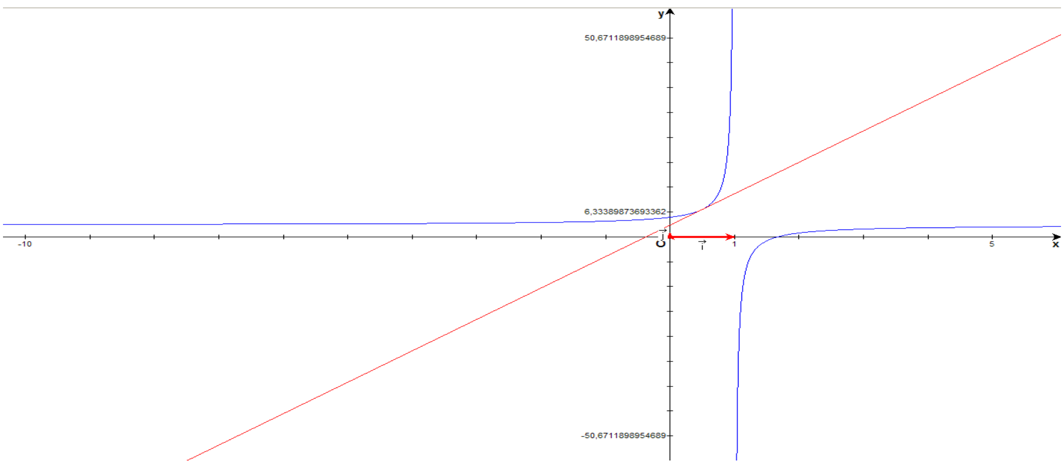


Exercice 40

1. • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2}{x-1} + 3 = 3,$
   • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3,$
2. • $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty,$
   • $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty.$
3. $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\},\ f'(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2} > 0.$
4. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
variations f	$-\infty \nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow +\infty$

5. $T_{\frac{1}{2}} : y = f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = 7 + 8\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = 8x + 3.$
6. On a les courbes suivantes :



7. Graphiquement, la courbe représentative de f est au dessus de la droite d'équation $y = 1$ lorsqu'approximativement, $x \in]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$.