ISCID - Prépa 1 - ULCO, 2013/2014

CORRECTION Exercices Chapitre 4 - Les fonctions économiques.

4.1.5 Exercice

1. Soit C_M le coût moyen. On a, pour $q > 0$, $C_M(q) = \dfrac{C_T(q)}{q} = \dfrac{q^3 - 12q^2 + 48q}{q} = q^2 - 12q + 48$.
2. Soit C_m le coût marginal. On a pour $q > 0$, $C_m(q) = C_T'(q) = 3q^2 - 24q + 48$.
3. Étudions les variations du coût moyen. $\forall q > 0$, $C_M'(q) = 2q - 12$ ce qui induit le tableau de variations suivant :

q	0		6		$+\infty$
signe $C_M'(q)$		$-$	0	$+$	
variations C_M	0	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Par conséquent, le coût moyen minimal est égal à 12 et est atteint pour $q = 12$.

4. Soit R la recette et B le bénéfice. Alors, si $p = 36$, $R(q) = 36q$ et $B(q) = R(q) - C_T(q) = 36q - (q^3 - 12q^2 + 48q) = -q^3 + 12q^2 - 12q$. On a pour tout $q > 0$, $B'(q) = -3q^2 + 24q - 12$. Déterminons les racines du trinôme : on a $\Delta = (24)^2 - 4(-3)(-12) = 432 = (12\sqrt{3})^2$. Le trinôme admet donc deux racines distinctes :

$$q_1 = \frac{-24 - 12\sqrt{3}}{2(-3)} = 4 + 2\sqrt{3} \text{ et } q_2 = \frac{-24 + 12\sqrt{3}}{2(-3)} = 4 - 2\sqrt{3}.$$

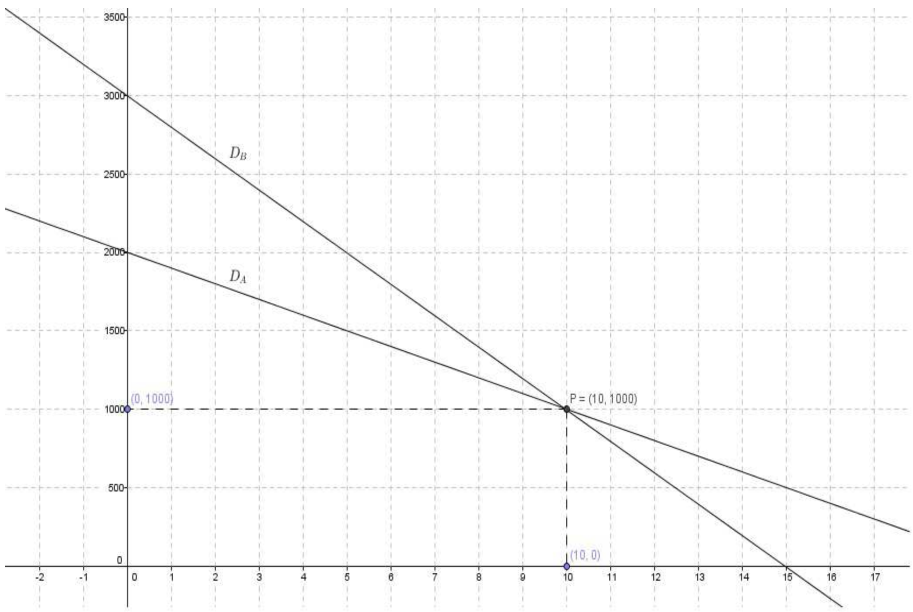
On en déduit le tableau de variations suivant :

q	0		$4 - 2\sqrt{3}$		$4 + 2\sqrt{3}$		$+\infty$
signe $B'(q)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations B	0	$\searrow$	$80 - 48\sqrt{3}$	$\nearrow$	$80 + 48\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$

La production qui optimise le bénéfice est d'après le tableau $q = 4 + 2\sqrt{3}$. Pour cette valeur de q, le bénéfice vaut $B(q) = 80 + 48\sqrt{3} \simeq 163,14$.

Exercice 140

1. On a les courbes représentatives suivantes :



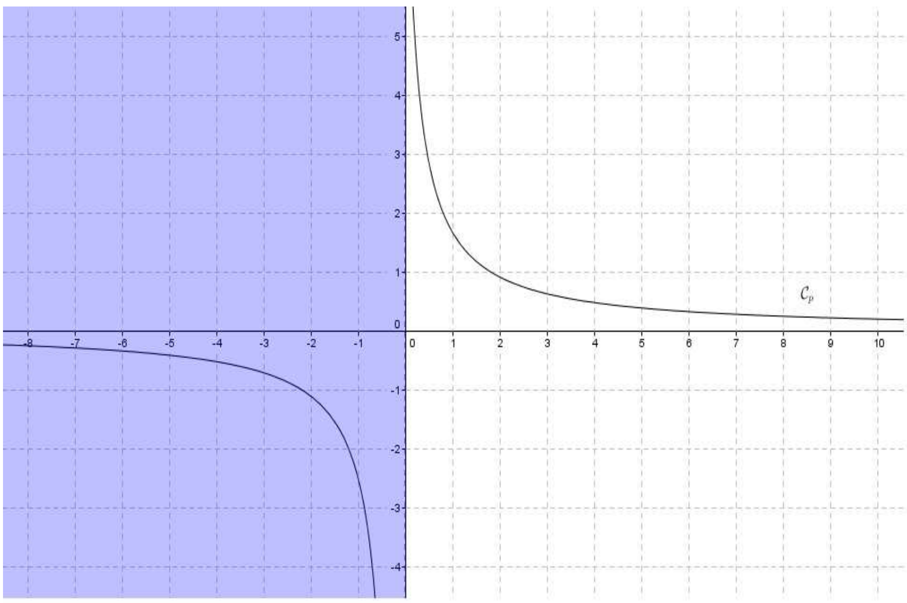
2. • $e[D_A](p) = \dfrac{pD'_A(p)}{D_A(p)} = \dfrac{-100p}{100(20-p)} = \dfrac{p}{p-20}$,
   • $e[D_B](p) = \dfrac{pD'_B(p)}{D_B(p)} = \dfrac{-200p}{200(15-p)} = \dfrac{p}{p-15}$.
3. • $O(p) = D_A(p) \Leftrightarrow 1100 = 100(20-p) \Leftrightarrow p = 9$. Dans ce cas,
$$e[D_A](9) = \frac{9}{9-20} = -\frac{9}{11}$$
ce qui signifie que pour une variation du prix de $t\%$, la demande D_A variera de $-\dfrac{9}{11}t\%$.
   • $O(p) = D_B(p) \Leftrightarrow 1100 = 200(15-p) \Leftrightarrow p = \dfrac{19}{2}$. Dans ce cas,
$$e[D_B]\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{2}-15} = -\frac{11}{19}$$
ce qui signifie que pour une variation du prix de $t\%$, la demande D_B variera de $-\dfrac{11}{19}t\%$.
4. On cherche p tel que $O(p) = D(p) = 1150$.
   • $O(p) = D_A(p) \Leftrightarrow 1150 = 100(20-p) \Leftrightarrow p = \dfrac{17}{2}$. La recette est égale à $R_A = \dfrac{17}{2} \times 1150 = 9775$,
   • $O(p) = D_B(p) \Leftrightarrow 1150 = 200(15-p) \Leftrightarrow p = \dfrac{7}{2}$. La recette est égale à $R_B = \dfrac{7}{2} \times 1150 = 4025$.
5. $p = -0,01D + 25 \Leftrightarrow D(p) = 100(25-p)$. Si $O = 1100$, $O(p) = D(p) \Leftrightarrow 1100 = 100(25-p) \Leftrightarrow p = 14$. Dans ce cas, comme l'élasticité de la demande est égale à
$$e[D](p) = \frac{pD'(p)}{D(p)} = \frac{-100p}{100(25-p)} = \frac{p}{p-25},$$
on obtient $e[D](14) = -\dfrac{14}{11}$.

Exercice 141

1. q représente une quantité donc la fonction p est définie sur $\mathcal{D}_p = \mathbb{R}_+^\star$. $\forall q \in \mathcal{D}_p$, $p'(q) = -\dfrac{50}{(1+5q)^2} < 0$. On en déduit le tableau de variations ci-dessous :

q	0 $\quad$ $+\infty$
signe $p'(q)$	$-$
variations p	$10 \searrow 0$

ce qui donne la courbe suivante :



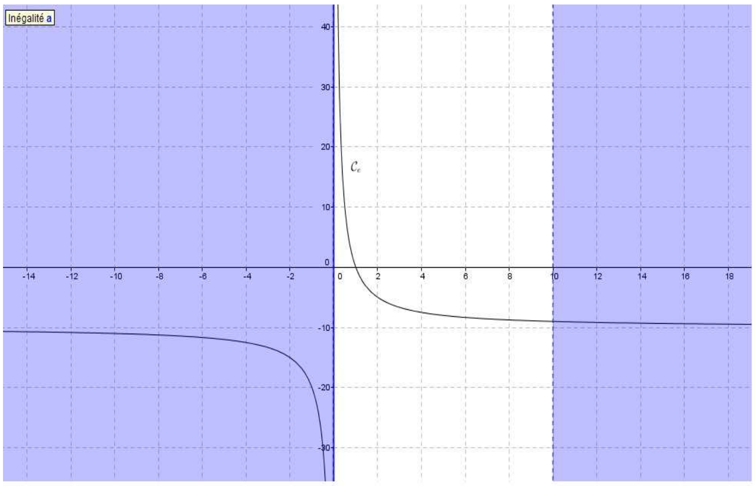
2. On souhaite exprimer q en fonction de p

$$p = \frac{10}{1+5q} \Leftrightarrow 1+5q = \frac{10}{p} \Leftrightarrow q(p) = \frac{10-p}{5p} \text{ avec } \mathcal{D}_q = \mathbb{R}_+^\star.$$

Ensuite, pour $p \neq 10$, $e[q](p) = \dfrac{pq'(p)}{q(p)} = \dfrac{p\left(\frac{-5p-5(10-p)}{(5p)^2}\right)}{\frac{10-p}{5p}} = \dfrac{-50}{5(10-p)} = \dfrac{10}{p-10}$. Ainsi, pour $p \in [0;10[$, $e[q]'(p) = \dfrac{10}{(p-10)^2}$ et on a en déduit les variations de $e[q]$ suivantes :

p	0		10
signe $e[q]'(p)$		$+$	
variations $e[q]$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

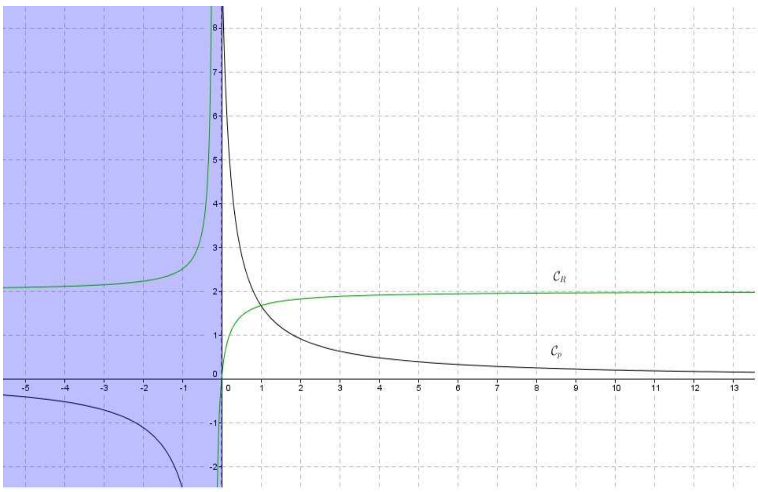
On a ainsi la courbe représentative demandée :



3. On a $R(q) = p(q)q = \dfrac{10q}{1+5q}$. Ensuite, $\forall q > 0$, $R'(q) = \dfrac{10(1+5q)-5(10q)}{(1+5q)^2} = \dfrac{10}{(1+5q)^2} > 0$. On a donc le tableau suivant :

q	0		$+\infty$
signe $R'(q)$		$+$	
variations R	0	$\nearrow$	2

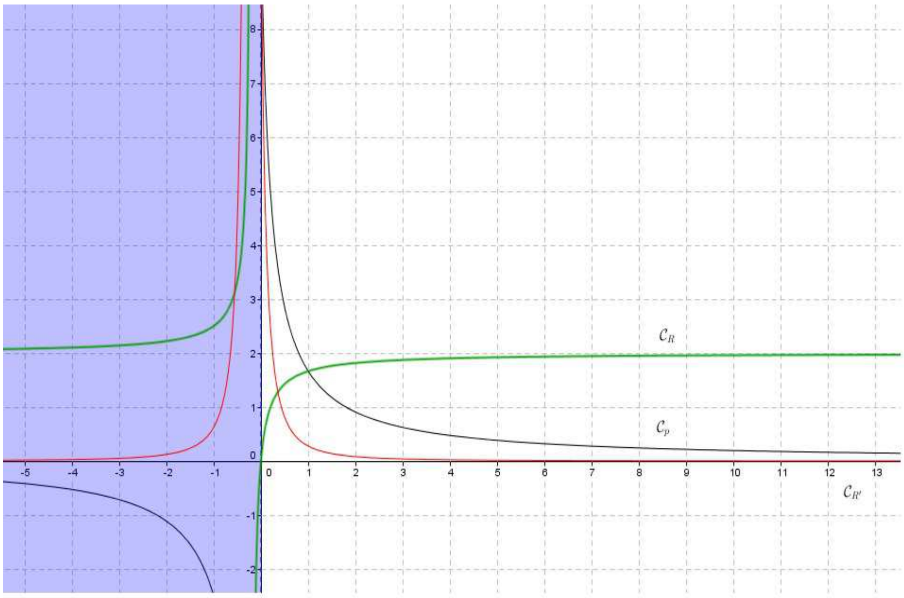
ainsi que les courbes ci-dessous :



4. On a vu précédemment que $R'(q) = \dfrac{10}{(1+5q)^2}$ donc, $\forall q > 0$, $R''(q) = \dfrac{-100}{(1+5q)^3} < 0$. On en déduit les variations de R' :

q	0 $\qquad$ $+\infty$
signe $R''(q)$	$-$
variations R'	$10 \searrow 0$

ainsi que le graphe de R' :



Exercice 142

1. Tout d'abord, $e[D](p) = \dfrac{-0,4p}{50000-0,4p} = \dfrac{p}{p-125000}$. Ainsi, $e[D](100000) = \dfrac{100000}{100000-125000} = -4$. Cela signifie par exemple que si le prix augmente d'1%, la demande va baisser de 4%.
2. $O(p) = D(p) \Leftrightarrow 50000 - 0,4p = -10000 + 0,2p \Leftrightarrow p = 100000$. Le prix de vente et d'achat s'établissant sur le marché est de 100000 €.
3. La fonction d'offre s'écrit maintenant $\tilde{O}(p) = -10000 + 0,2(p - 10000) = -12000 + 0,2p$ (les promoteurs ont bénéficié d'une subvention de 10000 € par logement ce qui diminue le prix de vente de 10000 € "théoriquement"). On a par conséquent
$$\tilde{O}(p) = D(p) \Leftrightarrow -12000 + 0,2p = 50000 - 0,4p \Leftrightarrow 62000 = 0,6p \Leftrightarrow p \simeq 103333,33$$
qui est le nouveau prix d'équilibre qui s'établit sur le marché.
4. Considérons un ménage qui souhaite acheter un logement puis le revendre un an plus tard. Le coût total annuel de cette démarche est égal à
$$C_1 = 100000\left(1 + \frac{10}{100}\right) - 90000 = 20000 \text{ €},$$
Considérons ensuite un ménage qui souhaite être seulement locataire. Le coût total annuel de cette démarche est égal à
$$C_2 = 10000 \text{ €}.$$
Sur une durée si courte, il vaut donc mieux être locataire.

Exercice 143

1. On note P_1 le prix payé pour n matchs au tarif A, P_2 le prix payé pour n matchs au tarif B et P_3 le prix payé pour n matchs au tarif C.
   (a) Pour 8 matchs, $P_1 = 8 \times 8 = 64$ €, $P_2 = 40 + 4 \times 8 = 72$ euro et $P_3 = 120$ euro. Le tarif le plus avantageux est le tarif A.

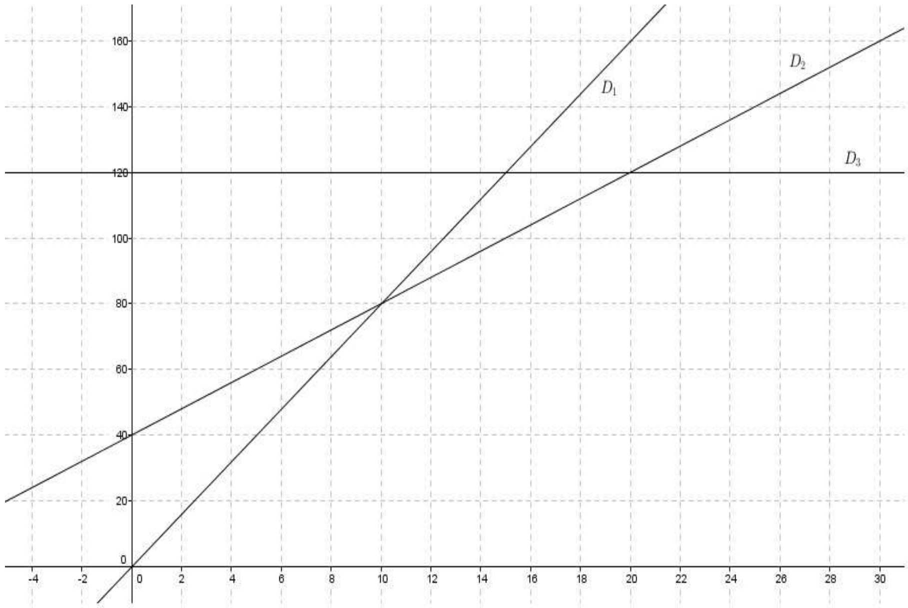
(b) Pour 14 matchs, $P_1 = 8 \times 14 = 112$ €, $P_2 = 40 + 4 \times 14 = 96$ euro et $P_3 = 120$ euro. Le tarif le plus avantageux est le tarif B.

(c) Pour 24 matchs, $P_1 = 8 \times 24 = 192$ €, $P_2 = 40 + 4 \times 24 = 136$ euro et $P_3 = 120$ euro. Le tarif le plus avantageux est le tarif C.

2. (a) $P_1 = 8 \times n$.

   (b) $P_2 = 40 + 4 \times n$.

3.



4. (a) le nombre maximal de matchs pour lequel le tarif A est le plus avantageux est $n = 9$.

   (b) Les nombres minimal et maximal de matchs pour lesquels le tarif B est le plus avantageux sont respectivement $n = 11$ et $n = 19$.

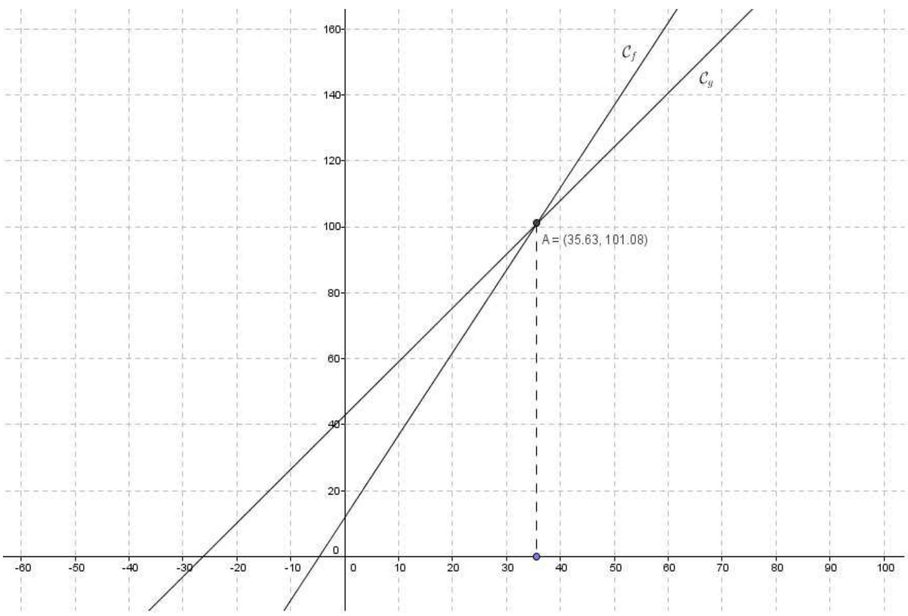
   (c) Le nombre minimal de match pour lequel le tarif C est le plus avantageux est $n = 21$.

Exercice 144

1. (a) $C_1 = 2,5 \times 30 + 12 = 82$ €.

   (b) Les coûts fixes sont égaux à $36 + 7 = 43$ €, tandis que les coûts variables dépendant du nombre mensuel d'heures de connexion sont égaux à $2,5\left(1 - \dfrac{35}{100}\right)n = 1,63n$. Finalement, $C_2 = 1,63n + 43$.

2.



   (a) Graphiquement, $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \leq 36$.

(b) $2,5x+12 \leq 1,63x+43 \Leftrightarrow 0,87x \leq 31 \Leftrightarrow x \leq 35,63$.

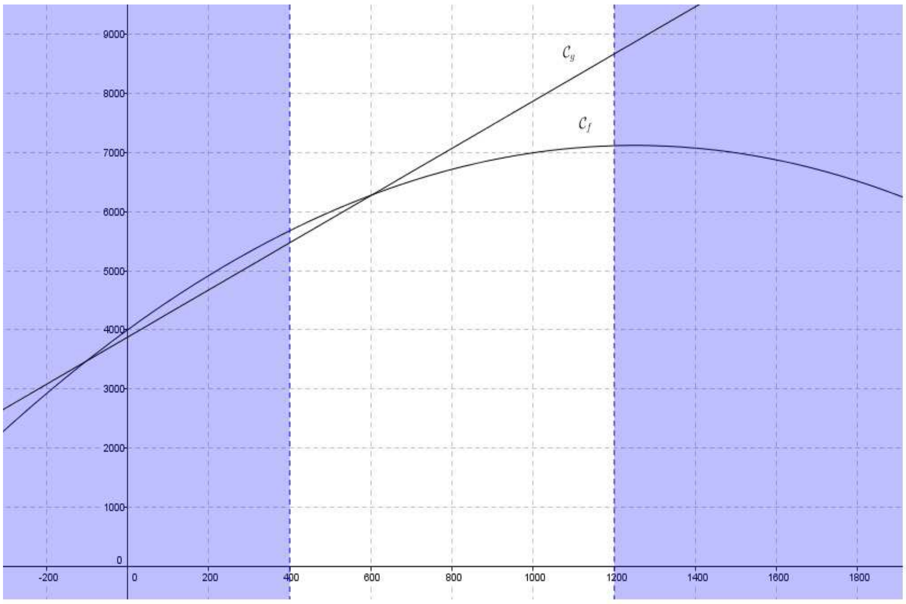
3. f et g représentant graphiquement les fonctions C_1 et C_2 respectivement, C_1 est inférieur à C_2 si et seulement si le nombre mensuel d'heures de connexion est inférieur ou égal à 35. Conclusion, le nombre d'heures de connexion à Internet à partir duquel l'utilisation d'une ligne Numéris est plus intéressante financièrement que l'utilisation d'une ligne classique est de 36 heures.

Exercice 145

1. (a) On a les valeurs suivantes :

x	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
$f(x)$	5680	6000	6280	6520	6720	6880	7000	7080	7120

(b)

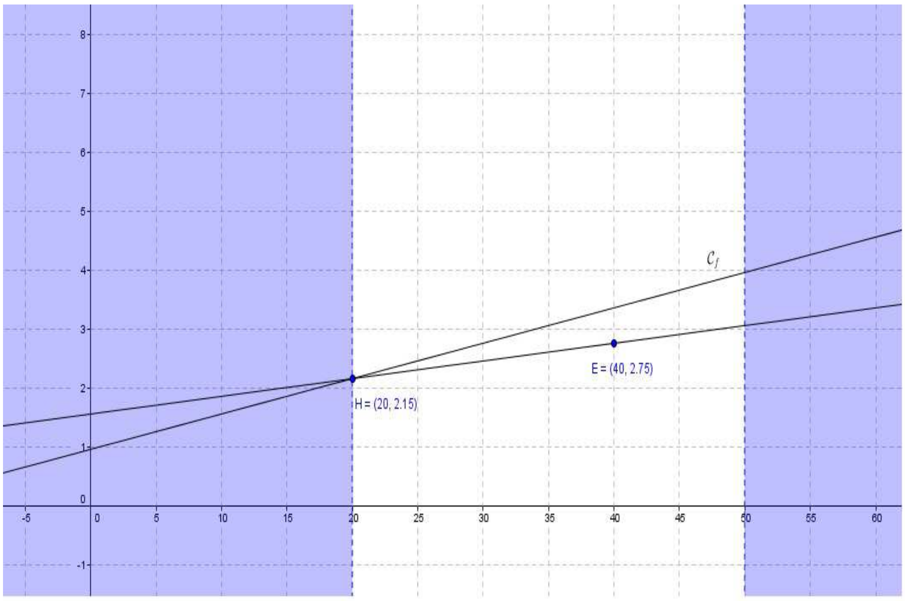


2. Voir ci-dessus.
3. L'entreprise réalise des bénéfices lorsque le prix de vente des objets est supérieur à leur coût de production donc lorsque la courbe représentative de g est au dessus de celle de f. Il faut alors, d'après le graphique, produire plus de 600 stylos.
4. $R(n) = P(n) - C(n) = 4n + 3880 - (-0,002n^2 + 5n + 4000) = 0,002n^2 - n - 120$.
5. On résout l'équation $R(n) = 600 \Leftrightarrow 0,002n^2 - n - 120 = 600 \Leftrightarrow 0,002n^2 - n - 720 = 0$. Comme $\Delta = (-1)^2 - 4(0,002)(-720) = 6,76 = (2,6)^2 > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes
$$n_1 = \frac{-(-1) - 2,6}{2(0,002)} = -400 \notin [400; 1200] \text{ et } n_2 = \frac{-(-1) + 2,6}{2(0,002)} = 900 \in [400; 1200].$$
Le nombre d'objets correspondant à la demande est égal à 850.

Exercice 146

- **Partie I**

1. $C(15) = 5 \times 0,13 + 10 \times 0,10 = 0,65 + 1 = 1,65$ €.
2. (a) $C(40) = 5 \times 0,13 + 15 \times 0,10 + 20 \times 0,06 = 3,35$ €.
   (b) $C(45) = 5 \times 0,13 + 15 \times 0,10 + 25 \times 0,06 = 3,65$ €.
3. Pour $n \in [20; 50]$, $C(n) = 5 \times 0,13 + 15 \times 0,10 + (n - 20) \times 0,06 = 0,06n + 0,95$.
4. Voir figure ci-dessous.
5. Voir figure ci-dessous.

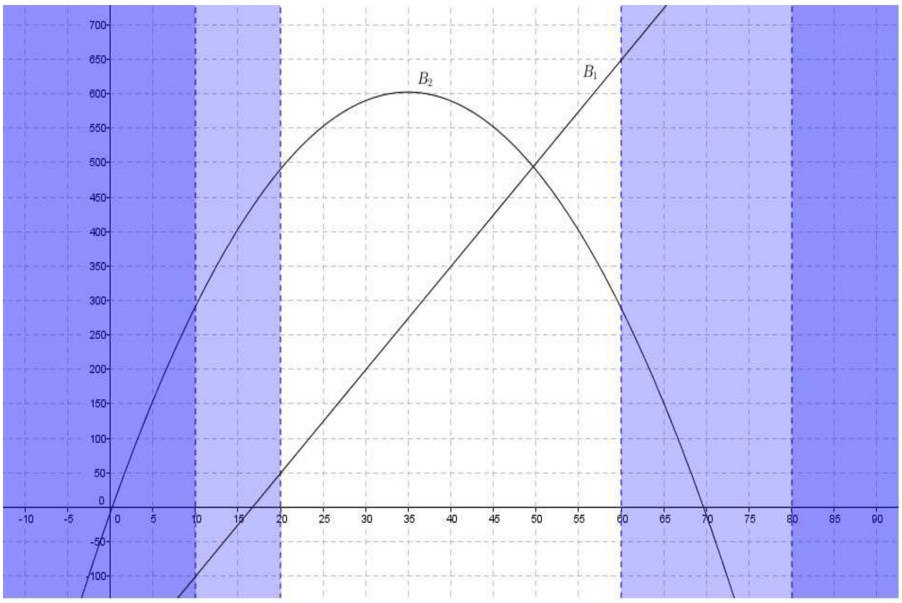


• **Partie II**

1. Voir ci-dessus.
2. La pente de la droite (HE) est donnée par $\dfrac{y_E - y_H}{x_E - x_H} = \dfrac{2,75 - 2,15}{40 - 20} = 0,03$.
3. Le coût unitaire TTC en euros des photocopies comprises entre la 21-ième et la 50-ième est donc de 0,03 €. La modification de tarification correspond au pourcentage $\dfrac{v_f - v_0}{v_0} \times 100 = \dfrac{0,03 - 0,06}{0,06} \times 100 = -50\%$ soit une réduction sur le coût unitaire de 50%.

Exercice 147

1. • $P_1(x) = 25x$
   • $B_1(x) = P_1(x) - C_1(x) = 25x - (10x + 250) = 15x - 250$.



2. (a) $P_2(x) = 50x$.
   (b) $B_2(x) = P_2(x) - C_2(x) = 50x - \left(\dfrac{x^2}{2} + 15x + 10\right) = -\dfrac{x^2}{2} + 35x - 10$.
   (c) On a les valeurs

x	10	20	30	35	40	50	60
$B_2(x)$	290	490	590	602,5	590	490	290

   Voir figure ci-dessus.

(d) Graphiquement, la valeur du maximum est 605 et est obtenue en $x = 35$.

3. $B_1(x) = B_2(x) \Leftrightarrow 15x - 250 = -\dfrac{x^2}{2} + 35x - 10 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2} - 20x - 240 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 40x - 480 = 0$. On a $\Delta = (-40)^2 - 4(1)(-480) = 3520 > 0$. Le trinôme admet donc deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-40) - \sqrt{3520}}{2(1)} < 0 \text{ et } x_1 = \frac{-(-40) + \sqrt{3520}}{2(1)} = 20 + 4\sqrt{55} \simeq 50.$$

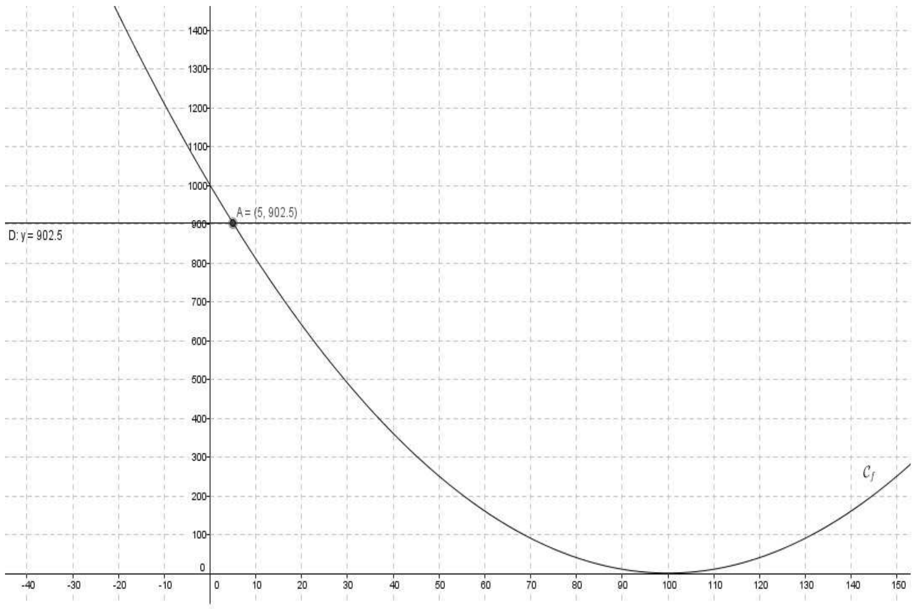
On doit donc produire approximativement 50 articles pour que les bénéfices B_1 et B_2 soient égaux. Pour $x = 20 + 4\sqrt{55}$, $B_1(x) = B_2(x) = 450 + 60\sqrt{55} \simeq 495$.

Exercice 148

1. (a) On a les valeurs

x	0	2	4	6	8
$f(x)$	1000	960,4	921,6	883,6	846,4

(b)



(c) – Il existe deux points d'intersection entre la courbe C et la droite d'équation dont un seul qui admette une abscisse dans l'intervalle $[0; 8]$. Donc l'équation d'inconnue x, $f(x) = 902,5$, semble posséder une et une seule solution dans $[0; 8]$.
– On estime graphiquement que $x = 5$.

(d) Pour tout x de l'intervalle $[0; 8]$,

$$f(x) = 1000\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = 1000\left(1 - \frac{2x}{100} + \frac{x^2}{100^2}\right) = 1000 - 20x + \frac{x^2}{10} = 0,1x^2 - 20x + 1000.$$

(e) On a $\Delta = (-20)^2 - 4(0,1)(97,5) = 361 = 19^2$. Donc le trinôme admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-(-20) - 19}{2(0,1)} = 5 \text{ et } x_2 = \frac{-(-20) + 19}{2(0,1)} = 195 \notin [0; 8].$$

(f) Soit $x \in [0; 8]$. On a dans ce cas, $f(x) = 902,5 \Leftrightarrow 0,1x^2 - 20x + 97,5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

2. Résoudre $f(x) = 902,5$ revient à résoudre le problème initial. Par conséquent, le pourcentage $t\%$ de remise qu'il faut effectuer est égal à 5%.