CORRECTION Exercices Chapitre 7 - Intégration.

Exercice 184

1. (a) $f(x) > 0, \forall x \in [-1;1]$ donc $A = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}(x^2+1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3}+1\right) - \left(-\frac{1}{3}-1\right) = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$ unité d'aire.

   (b) $f(x) > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{3};1\right]$ donc $A = \displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{1} f(x)dx = \int_{\frac{1}{3}}^{1}(2x^3+x^2+1)dx = \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x\right]_{\frac{1}{3}}^{1} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1\right) - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{6} - \frac{19}{54} = \frac{40}{27}$ unités d'aire.

   (a) $f(x) \leq 0, \forall x \in [-1,1]$ donc $A = -\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = -\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} = \left(-\frac{1}{3}+1\right) - \left(\frac{1}{3}-1\right) = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$ unités d'aire.

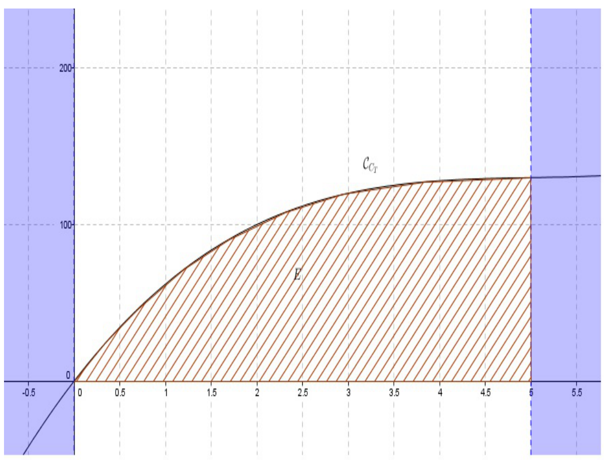
   (b) $f(x) \leq 0, \forall x \in [-4,-2]$ donc $A = -\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+2)dx = -\left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-4}^{-2} = \left(-\frac{4}{2}+4\right) + \left(\frac{16}{2}-8\right) = 2.$

   (a) $f(x) = (x-1)(x+1)$ donc $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ et $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1,1]$. Par conséquent, $A = -\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{0}^{1} + \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{1}^{2} = \left(\left(-\frac{1}{3}+1\right) - 0\right) + \left(\left(\frac{8}{3}-2\right) - \left(\frac{1}{3}-1\right)\right) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$ unités d'aire.

   (b) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1,2]$ et $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2,-1]$. Ainsi, $A = -\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{2} f(x)dx = -\left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{2} = \left(\left(-\frac{1}{2}+1\right) + \left(\frac{4}{2}-2\right)\right) + \left(\left(\frac{4}{2}+2\right) - \left(\frac{1}{2}-1\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$ unités d'aire.

Exercice 185

1. Étudions les variations de la fonction C_T : $C'_T(x) = 3x^2 - 30x + 76 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ donc C_T est croissante sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $[0;5]$). On a le graphique suivant :



2. On a ici $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 100$ donc u.a. $= 100\text{cm}^2$. Ensuite, comme $C_T(x) = x(x^2-15x+76) \geq 0, \forall x \in [0;5]$, on a $A = \displaystyle\int_{0}^{5}\left(x^3 - 15x^2 + 76x\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 5x^3 + 38x^2\right]_{0}^{5} = \frac{1}{4}(625) - 625 + 950 = \frac{1925}{4} = 481,25$ u.a. soit 48125cm^2.

Exercice 186

1. Pour situer $\mathcal{C}$ par rapport à Δ, on étudie le signe de $f(x) - 2x = \left(2x - \frac{x}{x^2+1}\right) - 2x = -\frac{x}{x^2+1}$. On en déduit que $f(x) - 2x$ est du signe de $-x$ qui est négatif sur $[0;2]$. Conclusion, $\mathcal{C}$ est en dessous de Δ sur $[0;2]$.
2. Comme $f(x) - 2x \leq 0$, $\forall x \in [0;2]$, $A_E = -\displaystyle\int_0^2 (f(x) - 2x)dx = \int_0^2 \frac{x}{x^2+1}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\ln(5)$ u.a. donc $A_E = \dfrac{1}{2}\ln(5) \times 4\text{cm}^2 = 2\ln(5) = \ln(25)\text{cm}^2 \simeq 3,22\text{cm}^2$.

Exercice 187 **Partie A.**

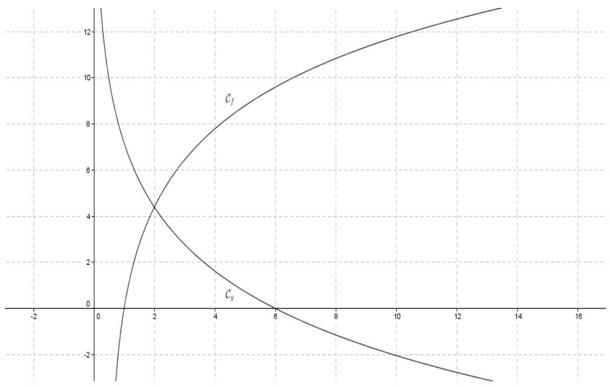
1. x est un prix unitaire donc $x \geq 0$.
   – On a dans un premier temps $4\ln\left(\dfrac{6}{x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{6}{x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{6}{x} \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 6$.
   – On a ensuite $4\ln(2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$.
   Par conséquent, on a $\left\{\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leq 6 \\ x \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [1;6] = I$
2. • $f'(x) = 4\dfrac{-\frac{6}{x^2}}{\frac{6}{x}} = -\dfrac{4}{x} \leq 0$, $\forall x \in I$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1	6
signe de $f'(x)$	$-$	
variations de f	$4\ln(6)$ ↘	0

   • $g'(x) = 4\dfrac{2}{2x-1} = \dfrac{8}{2x-1} \geq 0$, $\forall x \in I$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1	6
signe de $g'(x)$	$+$	
variations de g	0 ↗	$4\ln(13)$

   On a le graphique suivant :



3. L'abscisse de de $K(x,y)$ vérifie l'égalité : $4\ln\left(\dfrac{6}{x}\right) = 4\ln(2x-1) \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{6}{x}\right) = \ln(2x-1) \Leftrightarrow \dfrac{6}{x} = 2x - 1 \Leftrightarrow 6 = x(2x-1) \Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ car x ne peut être négatif ou nul. On en déduit que $K(2, 4\ln(3))$ (car $f(2) = g(2) = 4\ln(3)$). $x_0 = 2$ est le prix d'équilibre exprimé en euros.
4. Le revenu total des producteurs pour le prix d'équilibre est égal à $f(x_0) = g(x_0) = 4\ln(3) \simeq 4,394$ milliers d'unités.

Partie B.

1. F est une prmitive de f sur $]0;+\infty[$ si et seulement si $F' = f$. Comme $F'(x) = \left(4\left(x\ln\left(\dfrac{6}{x}\right) + x\right)\right)' = 4\ln\left(\dfrac{6}{x}\right) - \dfrac{4x}{x} + 4 = f(x)$, F est bien une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

2. Puisque $f(x) \geq 0$, $\forall x > 0$, on a $A = \displaystyle\int_{x_0}^{6} f(x)dx = \left[4\left(x\ln\left(\frac{6}{x}\right)+x\right)\right]_2^6 = 24 - (8\ln(3)+8) = 8(2-\ln(3))$.
Le surplus est estimé à $8(2-\ln(3)) \simeq 7,211$ milliers d'euros (l'u.a. est ici $1 \times 1000 = 1000$€).

Exercice 188

- On sait que $C_T' = C_{ma}$. Il suffit donc pour répondre à la question de trouver la primitive C_T de C_{ma} qui vérifie $C_T(0) = 4$. On vérifie aisément que les primitives de C_{ma} sont données par $C_T(q) = q^3 - 4q^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Mais $C_T(0) = 4 \Leftrightarrow c = 4$ donc $C_T(q) = q^3 - 4q^2 + 4$.
- On en déduit que $C_m(q) = \dfrac{C_T(q)}{q} = \dfrac{q^3-4q^2+4}{q} = q^2 - 4q + \dfrac{4}{q}$.

Exercice 189 **Partie A.**

1. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f(0)+f'(0)(x-0) = 1-1(x-0) = -x+1$.
2. (a) $h'(x) = (f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x) = -e^{-x}-(-1) = 1-e^{-x}$.
   (b) $h(x) = f(x)-g(x) = e^{-x}-(-x+1) = e^{-x}+x-1$ donc $h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.
   (c) On a alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $h'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de sa tangente au point d'abscisse 0 revient à déterminer le signe de $f(x)-g(x) = h(x)$ (ou de $g(x)-f(x) = -h(x)$). D'après le tableau de variations précédent, on a $h(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. On en déduit donc que $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et donc que finalement $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de sa tangente (et on retrouve bien le fait que f est convexe c'est-à-dire que $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

Partie B.

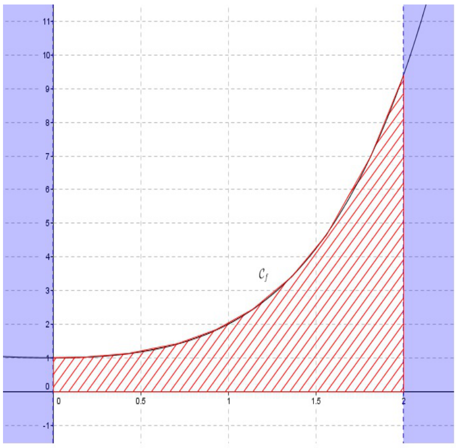
1. $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 (e^{-x}+x-1)dx = \left[-e^{-x}+\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{e}+\frac{1}{2}-1\right)-(-1) = -\frac{1}{e}+\frac{1}{2}$.
2. (a) On a $A(a) \overset{h(x),f(x)\geq 0}{=} \displaystyle\int_0^1 h(x)dx + \int_1^a f(x)dx \overset{1.}{=} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)+[-e^{-x}]_1^a = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)+\left(-\frac{1}{e^a}+\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{e^a}$.
   (b) On déduit aisément du résultat précédent que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} A(a) = \frac{1}{2}$.

Exercice 190

1. • $f(-2) = (-2-1)e^{-2}+2 = -\dfrac{3}{e^2}+2 = 1,59$ à 10^{-2} près,
   • $f(0) = (0-1)e^0+2 = -1+2 = 1$,
   • $f(2) = (2-1)e^2+2 = e^2+2 = 9,39$ à 10^{-2} près.
2. On a $f'(x) = xe^x$ donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	-2		0		2
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$f(-2)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$f(2)$

3. Déterminons une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(1,2)$: $y = f(1)+f'(1)(x-1) = 2+e^1(x-1) = ex+(2-e)$. Comme cette droite contient A et B (les coordonnées des deux points points vérifient l'équation de la droite), on en déduit que (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.
4. On a le graphique suivant :



5. L'u.a. est ici égale à $4 \times 1 = 4\text{cm}^2$. L'aire recherchée vaut donc : $\mathcal{A} \overset{f(x)\geq 0}{=} \int_0^2 ((x-1)e^x + 2)dx = [(x-2)e^x + 2]_0^2 = (0+2) - (-2e^0 + 2) = 2$u.a. donc $\mathcal{A} = 2 \times 4 = 8\text{cm}^2$.