LICENCE 2 SEG **Pôle Lamartine - ULCO**

MATHÉMATIQUES 2 Novembre 2011 - Contrôle Continu, Semestre 1, Session 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits.

(Les six exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 *Correction* :

1. Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0\}$. V est manifestement un sous-espace de $\mathbb{R}^3$. Montrons que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   – Le vecteur nul $\vec{0} = (0, 0, 0)$ appartient à V. En effet, $0 = 0$.
   – Soient deux vecteurs $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ dans V. On a alors $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ $(\star 1)$. Montrons maintenant que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$. On a $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (X, Y, Z)$. Si $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$, on a nécessairement $X = 0$. Comme $X = x_1 + x_2 = 0$ d'après l'hypothèse $(\star 1)$, on a bien $v_1 + v_2 \in V$.
   – Soit $\vec{v} = (x, y, z) \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors $x = 0$ $(\star 2)$. Montrons maintenant que $\lambda\vec{v} \in V$. On a $\lambda\vec{v} = \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (X, Y, Z)$. Si $\lambda\vec{v} \in V$, on a nécessairement $X = 0$. Comme $X = \lambda x = 0$ d'après l'hypothèse $(\star 2)$, on a bien $\lambda\vec{v} \in V$.

   Conclusion, V est sous-espace vectoriel de E.
2. Pour démontrer que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel, il suffit de démontrer qu'une propriété au moins parmi celles qui définissent un sous-espace vectoriel n'est pas vérifiée. On remarque aisément que $\vec{0} = (0, 0, 0)$ n'appartient pas à W car $0 + 0 \neq 1$. Donc, W n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et de ce fait n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 2 *Correction* :

1. On travaille dans $\mathbb{R}^3$. Toute famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ contient nécessairement au moins 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. Pour les 3 familles qui suivent, chacune étant constituée de 3 vecteurs, on peut tester le caractère générateur simplement à l'aide du déterminant de la matrice construite à l'aide des vecteurs donnés.
   Ainsi, puisque $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, la famille $\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ est génératrice.
3. On observe aisément que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, ce qui permet d'affirmer que la famille $\{(0, 1, -1), (1, 0, -1), (1, -1, 0)\}$ n'est pas génératrice.
4. Comme $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$, la famille $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$ n'est pas génératrice.
5. Déterminons le rang de $\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 1)\}$. Les 3 premiers vecteurs forment une famille génératrice (voir 2.) donc le rang de $\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ est égal à 3. Par conséquent, la famille $\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ est génératrice.

Exercice 3 *Correction* :

1. La famille $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ est libre car les deux vecteurs sont linéairement indépendants.
2. La famille $\{(1, 1, 0), (-1, -1, 0)\}$ n'est pas libre car les deux vecteurs sont linéairement indépendants ; en effet $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. La famille $\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ est libre car $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.
4. La famille $\{(0, 1, -1), (1, 0, -1), (1, -1, 0)\}$ n'est pas libre car $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$.
5. On travaille dans $\mathbb{R}^3$. Toute famille libre de $\mathbb{R}^3$ contient nécessairement au plus 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. La famille $\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ n'est donc pas libre.

Exercice 4 *Correction* :

1. Soient $\vec{u}=(x_1,y_1),\vec{v}=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Montrons alors que $f(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})=\lambda f(\vec{u})+\mu f(\vec{v})$.
$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) &= f\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}\lambda x_1+\mu x_2\\ \lambda y_1+\mu y_2\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X+Y\\X-Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\lambda x_1+\mu x_2)+(\lambda y_1+\mu y_2)\\(\lambda x_1+\mu x_2)-(\lambda y_1+\mu y_2)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\lambda(x_1+y_1)+\mu(x_2+y_2)\\ \lambda(x_1-y_1)+\mu(x_2-y_2)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_1-y_1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}x_2+y_2\\x_2-y_2\end{pmatrix}=\lambda f(\vec{u})+\mu f(\vec{v})\end{aligned}$$
On a bien montré que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$).
2. – Par définition, $\mathrm{Ker}(f)=\{\vec{u}\in\mathbb{R}^2, f(\vec{u})=\vec{0}\}$. Soit $\vec{u}\in\mathrm{Ker}(f)$ alors
$$f(\vec{u})=\vec{0}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x+y&=&0\\x-y&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right.$$
ce qui prouve donc que le noyau de f est réduit au vecteur nul : $\mathrm{Ker}(f)=\{\vec{0}\}$. L'application f est donc injective.
   – Par définition, $\mathrm{Im}(f)=\{f(\vec{u}),\vec{u}\in\mathbb{R}^2\}$. Comme $f(x,y)=(x+y,x-y)=(x,x)+(y,-y)=x(1,1)+y(1,-1)$, on a $\mathrm{Im}(f)=\{x(1,1)+y(1,-1),x,y\in\mathbb{R}\}$. Les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ formant une famille génératrice (et libre) de $\mathbb{R}^2$, on peut affirmer que $\mathrm{Im}(f)$ engendre $\mathbb{R}^2$ et donc que f est une application surjective.
   – Comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ injectif et surjectif, l'application f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 *Correction* :

1. Soient $\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ et $\{\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. On a alors
$$A_1=\begin{array}{cc}\begin{array}{cc}f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2})\end{array} & \\ \begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\2&0\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\vec{f_1}\\\vec{f_2}\\\vec{f_3}\end{array}\end{array}.$$
2. Soit $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a alors
$$A_3=\begin{array}{cc}\begin{array}{ccc}f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3})\end{array} & \\ \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\vec{e_1}\\\vec{e_2}\\\vec{e_3}\end{array}\end{array}.$$
3. Soient $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4}\}$ et $\{\vec{f_1},\vec{f_2}\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement. On a alors
$$A_3=\begin{array}{cc}\begin{array}{cccc}f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) & f(\vec{e_4})\end{array} & \\ \begin{pmatrix}1&1&2&-1\\2&1&1&1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\vec{f_1}\\\vec{f_2}\end{array}\end{array}.$$
4. Soit $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a alors
$$A_4=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) & f(\vec{e_4})\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&-1&2&3\end{pmatrix}\end{array}.$$

Exercice 6 *Correction* : Soit $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\2&0&-1&3\\3&3&2&0\\-1&-2&1&-1\end{pmatrix}$ la matrice du système. Comme $\det(A)=58\neq0$, le système est bien inversible. Utilisons la méthode du pivot de Gauss :
$$\left\{\begin{array}{rcll}x-y-z-t&=&3&(L_1)\\2x-z+3t&=&9&(L_2)\leftarrow(L_2)-2(L_1)\\3x+3y+2z&=&4&(L_3)\leftarrow(L_3)-3(L_1)\\-x-2y+z-t&=&0&(L_4)\leftarrow(L_4)+(L_1)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}x-y-z-t&=&3&(L_1)\\2y+z+5t&=&3&(L_2)\\6y+5z+3t&=&-5&(L_3)\leftarrow(L_3)-3(L_2)\\-3y-2t&=&3&(L_4)\leftarrow2(L_4)+3(L_2)\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}x-y-z-t&=&3&(L_1)\\2y+z+5t&=&3&(L_2)\\2z-12t&=&-14&(L_3)\\3z+11t&=&15&(L_4)\leftarrow2(L_4)-3(L_3)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}x-y-z-t&=&3&(L_1)\\2y+z+5t&=&3&(L_2)\\2z-12t&=&-14&(L_3)\\58t&=&72&(L_4)\end{array}\right.$$
En remontant le système, on trouve $(x,y,z,t)=\left(\frac{166}{58},-\frac{106}{58},\frac{26}{58},\frac{72}{58}\right)$.