ISCID-CO - Prépa 2 **ULCO - Dunkerque**

MATHÉMATIQUES Novembre 2012 - Contrôle Continu, Semestre 1, Session 1

Durée de l'épreuve : 3h00 Documents interdits.

(Les six exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 5pts *Correction* : Définissons par C, L, N les montants respectifs de la contribution à la Croix Rouge, de l'impôt local, et de l'impôt national.

1pt - Le bénéfice après impôts est de $100000-(L+N)$, d'où $C=0,1(100000-(L+N))$ qui peut également s'écrire $C+0,1L+0,1N=10000$.

1pt - L'impôt local est 5% du bénéfice net de la donation, ce qui nous donne une équation $L=0,05(100000-C)$ soit $C+0,05L=5000$.

1pt - L'impôt national est de 40% du bénéfice après déduction de C et de L. Cela donne $N=0,4[100000-(C+L)]$ ou $0,4C+0,4L+N=40000$.

Nous pouvons résumer les paiements à effectuer par le système d'équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{rcl} C+0,1L+0,1N &=& 10000 \\ 0,05C+L &=& 5000 \\ 0,4C+0,4L+N &=& 40000 \end{array}\right. .$$

2pts En utilisant Cramer par exemple, on obtient $\left\{\begin{array}{l} C=5956 \\ L=4702 \\ N=35737 \end{array}\right.$, à l'Euro le plus proche.

Remarquons que le bénéfice après impôts et après contribution est de 53605€. Nous pouvons utiliser ce modèle linéaire pour déterminer que l'entreprise aurait réalisé un bénéfice de 57 000€ si elle n'avait pas fait de donation à la Croix Rouge.

Exercice 2 5pts *Correction* :

0,5pt . $A+B$: impossible vu la dimension des matrices,

0,5pt . BA : impossible vu la dimension des matrices,

0,5pt . $B+C=\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$,

0,5pt . $AB=\begin{pmatrix} 28 & 64 \\ 6 & 0 \\ 13 & 8 \end{pmatrix}$,

0,5pt . $A+D$: impossible vu la dimension des matrices,

0,5pt . $CB=\begin{pmatrix} 20 & 16 \\ 21 & 24 \end{pmatrix}$,

0,5pt . $-A=\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -3 & -0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$,

0,5pt . $BC=\begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 69 & 30 \end{pmatrix}$.

0,5pt . $2B-3C=\begin{pmatrix} -17 & -6 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$,

0,5pt . $B^2=BB=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 30 & 64 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 6pts *Correction* :

1. 1pt Considérons une unité de X : sa production demande - en partie - $0,3$ unité de X. Donc, si on produit x unités de X, on a besoin - en partie - de $0,3x$ unités de X. De la même manière, fabriquer

y unités de Y et z unités de Z nécessite aussi l'utilisation du bien X, en quantités $0,4y$ et $0,1z$ respectivement. Il faut donc -en partie - $0,3x + 0,4y + 0,1z$ unités de X pour fabriquer x unités de X, y unités de Y et z unités de Z. Il faut donc produire x unités de X de manière à ce que la production à laquelle on soustrait les besoins de production en X équivaille à la demande soit 20. On a donc $x - (0,3x + 0,4y + 0,1z) = 20$ ce qui nous donne la première ligne du système. Les deux autres lignes proviennent bien-évidemment des productions relatives à Y et Z.

2. $\boxed{\text{1pt}}$ Le système (S) s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = C + AX,$$

si on pose $X = (x,y,z)$, $C = (20,10,30)$ et $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$. On obtient bien l'égalité matricielle demandée à savoir : $X = AX + C$.

3. $\boxed{\text{0,5pt}}$ $X = AX + C \Leftrightarrow AX - X = -C \Leftrightarrow (A - I_3)X = -C$.

4. On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,7 & 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & -0,8 & 0,6 \\ 0,1 & 0,3 & -0,9 \end{pmatrix}$

   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ Vérifions que $A - I_3$ est inversible : $\det(A - I_3) = -\frac{151}{1000} \neq 0$.
   - $\boxed{\text{2pts}}$ On en déduit d'après la méthode des cofacteurs

$$(A - I_3)^{-1} = \frac{1}{-\frac{151}{1000}} \begin{pmatrix} 0,54 & 0,51 & 0,23 \\ 0,39 & 0,62 & 0,25 \\ 0,32 & 0,47 & 0,36 \end{pmatrix}^t \simeq \begin{pmatrix} -3,5762 & -2,5828 & -2,1192 \\ -3,3775 & -4,1060 & -3,1126 \\ -1,5232 & -1,6556 & -2,3841 \end{pmatrix}.$$

5. $\boxed{\text{1pt}}$ $(A - I_3)X = -C \Leftrightarrow X = -(A - I_3)^{-1}C = \begin{pmatrix} 160,9272 \\ 201,9868 \\ 118,5430 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 $\boxed{\text{10pts}}$ *Correction* :

1. $\boxed{\text{1pt}}$ x habitants vivent dans la ville $\mathcal{X}$ à l'année 0. 20% des habitants s'en vont (donc 80% y restent) et 5% des habitants de la ville $\mathcal{Y}$ y migrent. Par conséquent, à l'année 1, on comptera $x' = 0,8x + 0,05y$ habitants dans la ville $\mathcal{X}$. On procède de même avec la ville $\mathcal{Y}$ et on comptera alors $y' = 0,2x + 0,95y$ habitants. Ces deux équations peuvent se réécrire sous la forme du système matriciel

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow X' = AX.$$

2. On a $X' = \begin{pmatrix} 8500 \\ 11500 \end{pmatrix}$ et on cherche donc X tel que $X' = AX$.

   $\boxed{\text{0,5pt}}$ • Vérifions que A est inversible : $\det(A) = 0,8 \times 0,95 - 0,2 \times 0,05 = 0,75 \neq 0$.

   $\boxed{\text{1,5pt}}$ • Le système $AX = X'$ admet donc une unique solution qui vaut, en utilisant les formules de Cramer par exemple, $X = \begin{pmatrix} 10000 \\ 10000 \end{pmatrix}$.

3. $\boxed{\text{1pt}}$ Supposons que $X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ décrive les populations des villes $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ à l'année 2. On a donc $X'' = AX'$. Comme $X' = AX$, on en déduit que $X'' = A^2X$. On procède ensuite par récurrence ce qui justifie le résultat.

4. $\boxed{\text{1pt}}$ $A^3X \simeq \begin{pmatrix} 5898 \\ 14102 \end{pmatrix}$.

5. On arrondit au millième près par excès.

   $\boxed{\text{0,5pt}}$ • $A^{10} = \begin{pmatrix} 0,245 & 0,189 \\ 0,755 & 0,811 \end{pmatrix}$,

$\boxed{\text{0,5pt}}$ • $A^{30} = \begin{pmatrix} 0,200 & 0,200 \\ 0,800 & 0,800 \end{pmatrix}$,

$\boxed{\text{0,5pt}}$ • $A^{50} = \begin{pmatrix} 0,200 & 0,200 \\ 0,800 & 0,800 \end{pmatrix}$,

$\boxed{\text{0,5pt}}$ • $A^{100} = \begin{pmatrix} 0,200 & 0,200 \\ 0,800 & 0,800 \end{pmatrix}$.

6. $\boxed{\text{0,5pt}}$ Quand n tend vers $+\infty$, la matrice A^n semble converger vers $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,8 & 0,8 \end{pmatrix}$.
7. $\boxed{\text{0,5pt}}$ Au bout de 50 ans, les populations seront approximativement de $A^{50}X = \begin{pmatrix} 4000 \\ 16000 \end{pmatrix}$.
8. $\boxed{\text{0,5pt}}$ À très long terme, les populations vont stagner à 4000 et 16000 habitants pour $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement.
9. $\boxed{\text{1,5pt}}$ On ne connaît pas précisément x ni y mais on sait que $x + y = 20000$ donc $(x, y) = (x, 20000 - x)$. Par conséquent,
$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 20000 - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2x + 0,2(20000 - x) \\ 0,8x + 0,8(20000 - x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 16000 \end{pmatrix}.$$
On observe donc que la répartition initiale x et y entre les deux villes n'a pas d'incidence puisque quels que soient x et y tels que $x + y = 20000$ on a après 50 ans $x = 4000$ et $y = 16000$.

Exercice 5 $\boxed{\text{4pts}}$ *Correction* :

1. $\boxed{\text{1pt}}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est carrée de taille 3. On a $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{Sarrus}{=} 1 \neq 0$ donc A est de rang 3.
2. $\boxed{\text{1pt}}$ Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ Cette matrice est carrée de taille 3.
   - On a $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{Sarrus}{=} 0$ donc la matrice B n'est pas de rang 3.
   - On considère la sous-matrice de B de taille 2, on a $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$ donc B est de rang 2.
3. $\boxed{\text{1pt}}$ Ici, il n'est pas nécessaire de calculer des déterminants car on voit que toutes les colonnes sont linéairement dépendantes entre-elles donc C est de rang 1.
4. $\boxed{\text{1pt}}$ On extrait de D une matrice carrée de plus grande taille c'est-à-dire ici 3 et on calcule son déterminant. On a par exemple
$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0.$$
Par conséquent, D est de rang 3.

Exercice 6 $\boxed{\text{5pts}}$ *Correction* :

1. $\boxed{\text{0,5pt}}$ E est évidemment un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ qui on le rappelle est un ev. On peut donc se contenter de montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^3$ pour prouver que c'est bien un ev.
$\boxed{\text{0,5pt}}$ • $\vec{0} = (0, 0, 0) \in E$ car $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ et $0 + 0 + 0 = 0$.
$\boxed{\text{1pt}}$ • Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$. A t-on alors $\vec{u} + \vec{v} \in E$?
Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, on a nécessairement
$$(*1) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 0 \end{cases}.$$

Comme $\vec{u}+\vec{v}=(u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3)=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$ et $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)=(u_1+u_2+u_3)+(v_1+v_2+v_3)=0$ d'après les hypothèses $(*1)$, on a $\vec{u}+\vec{v}\in E$.

$\boxed{\text{1pt}}$ • Soit $\vec{u}\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. A t-on alors $\lambda\vec{u}\in E$?

Si $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, on a nécessairement $u_1+u_2+u_3=0 \quad (*2)$. Comme $\lambda\vec{u}=\lambda(u_1,u_2,u_3)=(\lambda u_1,\lambda u_2,\lambda u_3)$ et $\lambda u_1+\lambda u_2+\lambda u_3=\lambda(u_1+u_2+u_3)=0$ d'après l'hypothèse $(*2)$, on a $\lambda\vec{u}\in E$.

Conclusion, E est un sev de $\mathbb{R}^3$, c'est donc bien un ev.

2. $\boxed{\text{1pt}}$ Si $\vec{u}=(x,y,z)\in E$, on a $(x,y,z)=(x,y,-x-y)$ car nécessairement $x+y+z=0$. Par conséquent,

$$(x,y,z)=(x,y,-x,-y)=(x,-x,0)+(0,y,-y)=x(1,-1,0)+y(0,1,-1).$$

Il faut donc deux vecteurs pour exprimer $\vec{u}\in E$, on en déduit que $\dim(E)=2$.

3. $\boxed{\text{1pt}}$ D'après la question précédente, une base de E est donnée par $((1,-1,0),(0,1,-1))$.