ISCID-CO - Prépa 2 **ULCO - Dunkerque**

MATHÉMATIQUES Novembre 2012 - Contrôle Continu, Semestre 1, Session 1

Durée de l'épreuve : 3h00 Documents interdits.

(Les six exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 Une entreprise réalise un bénéfice avant impôts de 100000€. Elle s'est engagée à verser 10% de son bénéfice net d'impôts à la caisse de secours de la Croix Rouge. Elle doit payer un impôt local pour la taxe professionnelle égal à 5% de son bénéfice (après donation à la Croix Rouge) et un impôt national sur les sociétés de 40% de son bénéfice (après que la donation et l'impôt local aient été prélevés). Quels sont les montants de l'impôt local, de l'impôt national, et de la donation à la Croix Rouge versés par l'entreprise ?

Exercice 2 Soient les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 201 \\ 111 \end{pmatrix}$.

Calculer, si possible :

$$\begin{array}{lllll} A+B & BA & B+C & AB & A+D \\ CB & -A & BC & 2B-3C & B^2 \end{array}$$

Exercice 3 Une économie compte trois secteurs de production, produisant des biens notés X, Y et Z (par exemple la production de charbon, d'acier et d'électricité).

	Biens nécessaires		
	X	Y	Z
Produire une unité de X demande :	$0,3$	$0,5$	$0,1$
Produire une unité de Y demande :	$0,4$	$0,2$	$0,3$
Produire une unité de Z demande :	$0,1$	$0,6$	$0,1$

La demande des consommateurs est de 20 unités de X, 10 de Y et 30 de Z. On note x, y et z les quantités respectives de biens X, Y et Z à produire pour satisfaire exactement cette demande.

1. Expliquer pourquoi x, y et z vérifient
$$(S) : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 20 + 0,3x + 0,4y + 0,1z \\ y & = & 10 + 0,5x + 0,2y + 0,6z \\ z & = & 30 + 0,1x + 0,3y + 0,1z \end{array} \right.$$
2. Montrer que (S) est équivalent à un système matriciel de la forme $X = AX + C$ où A, X et C sont à préciser.
3. Montrer que (S) est équivalent au système $(A - I_3)X = -C$.
4. Calculer l'inverse de $(A - I_3)$.
5. Déterminer x, y et z.

Exercice 4 Chaque année, 20% de la population d'une ville $\mathcal{X}$ migre vers une ville $\mathcal{Y}$ et 5% de la population de la ville $\mathcal{Y}$ migre vers la ville $\mathcal{X}$. On suppose que ces migrations sont les seuls facteurs influant sur la population des villes.

1. On note x et y les populations respectives de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ une année donnée et x', y' les populations respectives l'année suivante. Expliquer pourquoi $X' = AX$ où
$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$
2. Si la population actuelle de $\mathcal{X}$ est 8500 habitants, celle de $\mathcal{Y}$ 11500, quelles étaient les populations l'année précédente ?
3. Expliquer pourquoi la population au bout de n années sera de $A^n X$.
4. Calculer les populations au bout de trois années.
5. À l'aide de la calculatrice, donner avec des coefficients arrondis au millième les matrices A^{10}, A^{30}, A^{50} et A^{100}.
6. Quel phénomène observe-t-on ?
7. Quelles seront les populations au bout de 50 ans ?
8. Comment vont elles évoluer à très long terme ?
9. Si la population totale des deux villes est de $x + y = 20000$, quelles seront les populations 50 ans après ? Cela dépend-il de la répartition initiale x et y entre les deux villes ?

Exercice 5 Donner le rang des matrices suivantes tout en détaillant les calculs :

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6 On considère l'ensemble suivant : $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Déterminer la dimension de E.
3. Donner une base de E.