LICENCE 2 SEG **Pôle Lamartine - ULCO**

MATHÉMATIQUES 2 Novembre 2012 - Contrôle Continu, Semestre 1, Session 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits.

(Les six exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 *Correction* :

1. (a) $\boxed{\text{1pt}}$ La matrice A des coefficients techniques est donnée par :
$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$
   (b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Le vecteur c de la demande extérieure est donné par :
$$c = \begin{pmatrix} 50000 \\ 75000 \\ 125000 \end{pmatrix}.$$
   (c) $\boxed{\text{1pt}}$ L'équilibre de cette économie peut être traduit par l'égalité matricielle :
$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50000 \\ 75000 \\ 125000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Aq + c = q \Leftrightarrow q - Aq = c.$$

2. $\boxed{\text{0,5pt}}$ Le système de Leontief $(I - A)q = c$ correspondant est donné par $\begin{pmatrix} 0,7 & -0,3 & -0,3 \\ -0,4 & 0,9 & -0,4 \\ -0,3 & -0,4 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50000 \\ 75000 \\ 125000 \end{pmatrix}$.

3. $\boxed{\text{2,5pts}}$ La solution du système précédent est donnée par $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 791985 \\ 818702 \\ 862595 \end{pmatrix}$. On obtient cette solution par exemple avec les formules de Cramer : on a $\det(A) = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,3 & -0,3 \\ -0,4 & 0,9 & -0,4 \\ -0,3 & -0,4 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,1310$ et

   - $q_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 50000 & -0,3 & -0,3 \\ 75000 & 0,9 & -0,4 \\ 125000 & -0,4 & 0,8 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{1,0375 \times 10^5}{0,1310} \simeq 791985,$
   - $q_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 0,7 & 50000 & -0,3 \\ -0,4 & 75000 & -0,4 \\ -0,3 & 125000 & 0,8 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{1,0725 \times 10^5}{0,1310} \simeq 818702,$
   - $q_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 0,7 & -0,3 & 50000 \\ -0,4 & 0,9 & 75000 \\ -0,3 & -0,4 & 125000 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{1,13 \times 10^5}{0,1310} \simeq 862595.$

   $\boxed{\text{0,5pt}}$ Le niveau de production de chacun des 3 secteurs pour satisfaire les demandes est alors
$$\left\{ \begin{array}{l} 791985 \text{ unités de } S_1 \\ 818702 \text{ unités de } S_2 \\ 862595 \text{ unités de } S_3 \end{array} \right. .$$

Exercice 2 *Correction* :

On rappelle que le **rang** d'une matrice quelconque A est égal au plus grand entier s tel que l'on puisse extraire de A une matrice carrée d'ordre s inversible, c'est-à-dire de déterminant non nul.

1. $\boxed{\text{1pt}}$ A étant de taille 4×3, on a $rg(A) \leq 3$. Déterminons si le rang de A est égal à 3. On a

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

donc $rg(A) < 3$. Ensuite, on remarque aisément que $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible donc $rg(A) = 2$.

2. $\boxed{\text{1pt}}$ A est encore ici de taille 4×3 donc on a $rg(A) \leq 3$. Déterminons si le rang de A est égal à 3.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -10 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & -10 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

donc $rg(A) < 3$. On remarque ensuite que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible donc $rg(A) = 2$.

3. $\boxed{\text{1pt}}$ Comme $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $rg(A) < 4$. Mais on remarque que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$, on a $rg(A) = 3$.

Exercice 3 *Correction* :

1. $\boxed{\text{0,5pt}}$ A est un s.e.v. ($\forall u, v \in A$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $u + v \in A$ et $\lambda u \in A$.)
2. $\boxed{\text{0,5pt}}$ B n'est pas un s.e.v. ($(0, 0, 0) \notin B$.)
3. $\boxed{\text{0,5pt}}$ C est un s.e.v. ($\forall u, v \in C$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $u + v \in C$ et $\lambda u \in C$.)
4. $\boxed{\text{0,5pt}}$ D n'est pas un s.e.v. ($(0, 0, 0) \notin D$.)
5. $\boxed{\text{0,5pt}}$ E n'est pas un s.e.v. ($(0, 0, 0) \notin E$.)
6. $\boxed{\text{0,5pt}}$ F est un s.e.v. ($\forall u, v \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $u + v \in F$ et $\lambda u \in F$.)

Exercice 4 *Correction* :

1. $\boxed{\text{0,5pt}}$ $A+4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4(1) & 1+4(0) & 1+4(0) \\ 1+4(0) & -3+4(1) & 1+4(0) \\ 1+4(0) & 1+4(0) & -3+4(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$.
2. $\boxed{\text{0,5pt}}$ $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3B$.
3. $\boxed{\text{1pt}}$ $B^2 = 3B \Leftrightarrow (A + 4I_3)^2 = 3(A + 4I_3) \Leftrightarrow A \times A + A \times (4I_3) + (4I_3) \times A + (4I_3) \times (4I_3) = 3A + 12I_3 \Leftrightarrow A^2 + 8A + 16I_3 = 3A + 12I_3 \Leftrightarrow A^2 + 5A = -4I_3 \Leftrightarrow A \left[-\frac{1}{4}(A + 5I_3) \right] = I_3$.
4. $\boxed{\text{1pt}}$ On sait qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \times C = I_3$, C étant dans ce cas l'inverse de A. D'après la question précédente, si on pose $C = -\frac{1}{4}(A + 5I_3)$, on a $A \times C = I_3$ ce qui prouve que A est inversible et que $A^{-1} = C = -\frac{1}{4}(A + 5I_3)$ soit

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & -1/2 \end{pmatrix},$$

ce qui prouve que, grâce à des relations matricielles spécifiques, il est possible de déterminer l'inverse d'une matrice sans le calculer.

Exercice 5 *Correction* :

1. $\boxed{\text{1pt}}$ $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y & = & 1 \\ 3x + 7y & = & -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 1 - 2x \\ 3x + 7(1 - 2x) = -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{9}{11} \\ y = -\frac{7}{11} \end{array} \right.$
2. $\boxed{\text{1pt}}$ $\left\{ \begin{array}{rcll} 2x + y & = & 1 & (L_1) \\ 3x + 7y & = & -2 & (L_2) \leftarrow 2(L_2) - 3(L_1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} 2x + y & = & 1 & (L_1) \leftarrow \frac{1}{2}(L_1) - \frac{1}{22}(L_2) \\ 11y & = & -7 & (L_2) \leftarrow \frac{1}{11}(L_2) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{9}{11} \\ y = -\frac{7}{11} \end{array} \right.$

3. $\boxed{\text{1pt}}$ $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$. Si A est inversible, $X = A^{-1}B$. On trouve facilement $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $X = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{11} \\ -\frac{7}{11} \end{pmatrix}$.

4. $\boxed{\text{1pt}}$ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{9}{11}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{7}{11}$.

Exercice 6 *Correction* :

1. • $\boxed{\text{1pt}}$ En appelant x la distance de plat, y la distance en montée dans le sens Issy vers Labat et z la distance en descente toujours dans le même sens, on obtient le système de deux équations à trois inconnues suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcll} \dfrac{x}{20}+\dfrac{y}{15}+\dfrac{z}{30} & = & 2 & (L_1) \\ \dfrac{x}{20}+\dfrac{y}{30}+\dfrac{z}{15} & = & 3 & (L_2) \end{array}\right.$$

donc pas assez d'équations pour déterminer x, y et z. Mais fort heureusement, pour cette question spécifique, on ne cherche pas x, y et z mais simplement $x+y+z$. Il suffit donc de résoudre le système par exemple en fonction de z, c'est-à-dire exprimer x et y en fonction de z (traiter z comme un paramètre). Puis on ajoute x, y et z. On a

$$\left\{\begin{array}{lcll} \dfrac{x}{20}+\dfrac{y}{15}+\dfrac{z}{30} & = & 2 & (L_1) \leftarrow (L_1)\times 60 \\ \dfrac{x}{20}+\dfrac{y}{30}+\dfrac{z}{15} & = & 3 & (L_2) \leftarrow (L_2)\times 60 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcll} 3x+4y+2z & = & 120 & (L_1) \\ 3x+2y+4z & = & 180 & (L_2) \leftarrow (L_2)-(L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} 3x+4y+2z & = & 120 & (L_1) \leftarrow (L_1)+2(L_2) \\ -2y+2z & = & 60 & (L_2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2z+80 \\ y & = & z-30 \end{array}\right.$$

Finalement, $x+y+z = (-2z+80)+(z-30)+z = 50$, donc la distance d'Issy à Labat est de 50km.

• $\boxed{\text{0,5pt}}$ Étant donné que le cycliste met plus de temps au retour qu'à l'aller, la ville d'Issy est la plus haute des deux villes.

2. $\boxed{\text{1,5pt}}$ On a une équation supplémentaire, le système (S) s'écrit maintenant

$$\left\{\begin{array}{l} x=-2z+80 \\ y=z-30 \\ \left(\dfrac{x}{30}+\dfrac{y}{20}+\dfrac{z}{40}\right)+\left(\dfrac{x}{30}+\dfrac{z}{20}+\dfrac{y}{40}\right)=3+\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x=-2z+80 & (L_1) \\ y=z-30 & (L_2) \\ \dfrac{x}{15}+\dfrac{3y}{40}+\dfrac{3z}{40}=\dfrac{11}{3} & (L_3)\leftarrow 120\times(L_3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x=-2z+80 & (L_1) \\ y=z-30 & (L_2) \\ 8x+9y+9z=440 & (L_3)\leftarrow (L_3)-8(L_1)-9(L_2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2z+80 \\ y=z-30 \\ 0=-2z+70 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=10 \\ y=5 \\ z=35 \end{array}\right.$$