MATHÉMATIQUES 2 Novembre 2012 - Contrôle Continu, Semestre 1, Session 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits.

(Les six exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ (*6 points*)

Supposons que l'économie d'une certaine région dépende de trois industries : S_1, S_2 et S_3. En surveillant les opérations de ces trois secteurs, on a tiré les observations suivantes :

- Pour produire une unité de S_1, S_1 doit consommer $0,3$ unités de S_1, $0,3$ unités de S_2 et $0,3$ unités de S_3.
- Pour produire une unité de S_2, S_2 doit acheter $0,4$ unités de S_1, utiliser $0,1$ unités de S_2 et $0,4$ unités de S_3.
- S_3 consomme $0,3$ unités de S_1, $0,4$ unités de S_2 et $0,2$ unités de S_3 pour produire une unité de S_3.

Supposons également que pendant une période d'une semaine, l'économie a une demande extérieure de 50000 unités de S_1, 75000 unités de S_2 et 125000 unités de S_3.

On note $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ le vecteur qui désigne le niveau de production de chacun des 3 secteurs qui permet de satisfaire les demandes.

1. (a) Précisez la matrice A des coefficients techniques.
   (b) Précisez le vecteur c de la demande extérieure.
   (c) Traduisez l'équilibre de cette économie à l'aide d'une égalité matricielle du type $Aq + c = q$.
2. Écrivez le système de Leontief correspondant $(I - A)q = c$, puis résolvez ce système. Interprétez économiquement la solution.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ (*3 points*)

Déterminez le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & -10 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ (*3 points*)

Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0\}$,
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 1\}$,
3. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$,
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0 \text{ et } x + y + z = 1\}$,
5. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,
6. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ (*4 points*)

Considérons les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifiez qu'on a $B = A + 4I_3$.
2. Trouvez une formule liant B et B^2.
3. Trouvez une relation entre A, A^2 et I_3.
4. À l'aide de la question 3. exclusivement, montrez que A est inversible (sans calculer le déterminant de A) et déduisez-en la matrice A^{-1} (sans calculer A^{-1} explicitement).

Exercice 5 (*4 points*)
Résolvez de quatre manières différentes (par substitution, par la méthode du pivot de Gauss, en inversant la matrice des coefficients, par la formule de Cramer) le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y & = & 1 \\ 3x+7y & = & -2 \end{array}\right.$$

après avoir vérifié bien-sûr qu'il était bien inversible.

Exercice 6 (*BONUS - 3 points*)
Un cycliste s'entraîne chaque dimanche en faisant l'aller-retour d'Issy à Labat. Le trajet Issy-Labat n'est pas horizontal : il y a des montées, des descentes et du plat. En montée, notre cycliste fait du quinze kilomètres à l'heure, en plat du vingt, en descente du trente. L'aller lui prend deux heures et le retour trois. Sur la portion du trajet qui n'est pas plate, la pente moyenne est de cinq pour cent.

1. Quelle est la distance d'Issy à Labat, et quelle est la plus haute de ces deux villes (justifiez) ?
2. Un autre cycliste, plus sportif, fait du vingt kilomètres à l'heure en montée, trente en plat et quarante en descente. Sachant que l'aller-retour Issy-Labat lui prend seulement trois heures quarante, déterminez les trois longueurs : de la partie du trajet qui monte, de celle qui descend, de celle qui est à plat.