Exercice 1 2pts *Correction* :

On note x, y, z les quantités d'appareils (A), (B), (C) fabriqués. On note r la masse de substance radioactive, p la masse totale de plastique pour les coques et enfin m le total en minutes de travail, nécessaires à la fabrication en question.

1. $\boxed{\text{0,5pt}}$ On a le système suivant :

$$\begin{cases} 2,5x + 2,4y + 2,8z &= r \\ 18,6x + 19,8y + 21,2z &= p \\ 35x + 40y + 50z &= m \end{cases}$$

2. $\boxed{\text{1pt}}$ L'écriture matricielle des équations précédentes est donnée par

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2,5 & 2,4 & 2,8 \\ 18,6 & 19,8 & 21,2 \\ 35 & 40 & 50 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} r \\ p \\ m \end{pmatrix}}_{B}.$$

On en déduit que A est la matrice du système.

3. $\boxed{\text{0,5pt}}$ On obtient

$$\begin{pmatrix} r \\ p \\ m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 770 \\ 5960 \\ 12500 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 4pts *Correction* :

1. $\boxed{\text{1pt}}$ La matrice du du système est donnée par $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$. On a alors

$$|A| \overset{\text{Sarrus}}{=} (-126 - 64 - 80) - (-70 - 96 - 96) = -8 \neq 0.$$

2. – $\boxed{\text{1pt}}$ Les formules de Cramer sont données par les formules $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ où x_i est la i-ième composante de la solution, Δ est le déterminant de la matrice du système et Δ_i est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa i-ième colonne par le second membre.
   – $\boxed{\text{0,5pt}}$ Les formules sont applicables dès lors que A est inversible ce qui est notre cas.

3. $\boxed{\text{1,5pt}}$ On a

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -5 & -7 & -4 \\ 7 & 8 & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{46}{8} = \frac{23}{4},\ y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & -5 & -4 \\ -5 & 7 & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2},\ z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 4 & -7 & -5 \\ -5 & 8 & 7 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{21}{8}.$$

Exercice 3 4pts *Correction* :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors dans un premier temps

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 12 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. $\boxed{\text{2pts}}$ Ensuite, d'après les résultats précédents, on a

$$A^3 + aA^2 + bA + cI = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+a+c & a & 4+b \\ 4+3a+b & 1+3a+c & 12+a+3b \\ 4+a+b & 4+b & 1+4a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit très rapidement que $(a, b, c) = (0, -4, -1)$.

2. $\boxed{\text{2pts}}$ On a $A^3 - 4A - I = 0 \Leftrightarrow A^3 - 4A = I \Leftrightarrow A(A^2 - 4I) = I$. Cette égalité permet d'affirmer que A est inversible et que sa matrice inverse est définie par

$$A^{-1} = A^2 - 4I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 $\boxed{\text{1pt}}$ *Correction* :

- $\boxed{\text{0,5pt}}$ On a $(I - A)(I - B) = I^2 - AI - IB + AB = I - A - B + AB \overset{\text{hyp}}{=} I - A - B + (A + B) = I$.
- $\boxed{\text{0,5pt}}$ On en déduit que $(I - A)$ est inversible et admet pour inverse $(I - B)$.

Exercice 5 $\boxed{\text{6pts}}$ *Correction* : On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. $\boxed{\text{2pts}}$ On a
   - $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,
   - $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,
   - $(A - B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et
   - $A^2 - 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $\boxed{\text{2pts}}$ On rappelle que le rang d'une matrice A est la dimension de la plus grande matrice carrée inversible qu'on puisse extraire de A.
   - On a tout d'abord $\text{rg}(A) \leq 3$. Comme $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, on peut affirmer que $\text{rg}(A) = 3$.
   - On a $\text{rg}(B) \leq 3$. Comme $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$, on sait que $\text{rg}(B) < 3$. Cependant, comme on peut extraire de B au moins une matrice carrée d'ordre 2 qui soit inversible, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, on peut conclure que $\text{rg}(B) = 2$.

3. $\boxed{\text{2pts}}$
   - Comme $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ et $rg(A) = 3$, A est inversible. On en déduit par la méthode des cofacteurs que

   $$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   - Comme $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ et $rg(B) = 2$, B n'est pas inversible.

Exercice 6 $\boxed{\text{3pts}}$ <u>*Correction*</u> :

On pose

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. $\boxed{\text{0,5pt}}$ La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice magique de constante 3.

2. – $\boxed{\text{0,5pt}}$ Les matrices A et B sont magiques.
   – $\boxed{\text{0,5pt}}$ On vérifie aisément que
   $$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} = M.$$

3. $\boxed{\text{0,5pt}}$ Par définition, $M^T = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $\boxed{\text{1pt}}$ On a
   - $\frac{1}{2}(M - M^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = A,$
   - $\frac{1}{2}(M + M^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = B.$