Exercice 1 Une entreprise fabrique des détecteurs de fumée de trois modèles distincts, disons (A), (B), (C). Les "ingrédients nécessaires" à cette fabrication sont les suivants : une substance radioactive coûteuse qui détecte la fumée (R), une coque en plastique (P) fabriquée sur place et de la main-d'œuvre (M).

- Pour faire un détecteur (A), il faut 2,5 mg de substance (R), une coque (P) pesant 18,6 g et 35 mn de travail cumulé (M).
- Pour faire un détecteur (B), il faut 2,4 mg de substance (R), une coque pesant 19,8 g et 40 mn de travail cumulé (M).
- Pour faire un détecteur (C), il faut 2,8 mg de substance (R), une coque pesant 21,2 g et 50 mn de travail cumulé (M).

On note x, y, z les quantités d'appareils (A), (B), (C) fabriqués. On note r la masse de substance radioactive, p la masse totale de plastique pour les coques et enfin m le total en minutes de travail, nécessaires à la fabrication en question.

1. Écrire le système d'équations linéaires exprimant x, y, z en fonction de r, p, m.
2. Donner la matrice du système ainsi que l'écriture matricielle des équations en question.
3. Que vaut (r, p, m) si $(x, y, z) = (100, 100, 100)$?

Exercice 2 Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x-4y-2z & = & 2 \\ 4x-7y-4z & = & -5 \\ -5x+8y+6z & = & 7 \end{array}\right.$$

1. Écrire la matrice A du système puis calculer le déterminant $\det A$.
2. Rappeler ce que sont les formules de Cramer. Peut-on les appliquer ici ?
3. Donner grâce à la méthode de Cramer la solution du système ci-dessus.

Exercice 3 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI = 0$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 4 Soient A et B deux matrices carrées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant $A + B = AB$. Calculer le produit $(I - A)(I - B)$. Que peut-on en déduire sur $(I - A)$?

Exercice 5 On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB, BA, $(A - B)^2$ et $A^2 - 2AB + B^2$.
2. Calculer le rang des matrices A et B.
3. Les matrices A et B sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

Exercice 6 *Une matrice M carrée est dite magique lorsque la somme de ses 3 lignes, de ses 3 colonnes et de ses diagonale et anti-diagonale est égale à une constante m. On dira alors que M est une matrice magique de constante m.*

On pose

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice M est une matrice magique.

1. Donner un exemple de matrice magique.
2. Les matrices A et B sont-elles magiques ? Vérifier que $A + B = M$.
3. Écrire la matrice M^T, transposée de M.
4. Que valent les matrices $\frac{1}{2}(M - M^T)$ et $\frac{1}{2}(M + M^T)$?