LICENCE 2 SEG **Pôle Lamartine - ULCO**

MATHÉMATIQUES 2 Novembre 2010 - Contrôle Continu, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits

(Les quatre exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 *(3 points)*

On considère l'ensemble suivant : $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Déterminer la dimension de E.
3. Donner une base de E.

Correction :

1. E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$. Montrons que E est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de $\mathbb{R}^3$. On doit prouver pour cela que :
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ E est non vide : $(0, 0, 0) \in E$ donc E est non vide.
   - $\boxed{\text{1pt}}$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in E$, $\lambda u + \mu v \in E$: on pose $u = (x_1, y_1, z_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2)$, alors $\lambda u + \mu v = \lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$. On remarque que $(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda(x_1 + y_1 + z_1) + \mu(x_2 + y_2 + z_2) = 0$ car $u, v \in E$ (et donc $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = 0$). Par conséquent, $\lambda u + \mu v \in E$.

   Conclusion, E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, c'est donc un espace vectoriel.
2. $\boxed{\text{1pt}}$ On a $x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z$, donc $(x, y, z) \in E \Leftrightarrow (x, y, z) = (-y - z, y, z) = (-y, y, 0) + (-z, 0, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$. On en déduit que $dim(E) = 2$.
3. $\boxed{\text{0,5pt}}$ Une base de E est donnée par $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 2 *(5 points)*

Soient les vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que la famille $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^4$.
2. La famille $\mathcal{B}_2 = \{e_1, e_2, e_4\}$ peut-elle former une base $\mathbb{R}^4$? De $\mathbb{R}^3$?
3. La famille $\mathcal{B}_3 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$ peut-elle fomer une base de $\mathbb{R}^4$? De $\mathbb{R}^5$?

Correction :

1. $\boxed{\text{0,5pt}}$ On a $dim(\mathcal{B}_1) = 4 = dim(\mathbb{R}^4)$.

   $\boxed{\text{0,5pt}}$ Donc, pour montrer que $\mathcal{B}_1$ est une famille libre et génératrice (et donc une base de $\mathbb{R}^4$), il suffit de montrer que $\mathcal{B}_1$ est soit libre soit génératrice.

   $\boxed{\text{1,5pt}}$ Montrons que $\mathcal{B}_1$ est libre. On suppose qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

   $$ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = 0 \ (1)$$

   (on présume de l'existence d'une combinaison linéaire entre les 4 vecteurs de $\mathcal{B}_1$ et on va démontrer qu'une telle combinaison ne peut s'expliquer que parce que $a = b = c = d = 0$; ainsi, la combinaison linéaire entre ces vecteurs n'existe pas et donc, les vecteurs sont bien linéairement indépendants).

$$(1) \Leftrightarrow a\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}3\\0\\-2\\-2\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcll} 2a & & +3c & -d & = & 0 & (L_1)\\ a & +b & & +3d & = & 0 & (L_2)\\ -a & -2b & -2c & +3d & = & 0 & (L_3)\\ a & & -2c & +d & = & 0 & (L_4)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcll} 2a & & +3c & -d & = & 0 & (L_1)\\ & 2b & -3c & +7d & = & 0 & (L_2)\leftarrow 2(L_2)-(L_1)\\ & -4b & -c & +5d & = & 0 & (L_3)\leftarrow 2(L_3)+(L_1)\\ & & -7c & +3d & = & 0 & (L_4)\leftarrow 2(L_4)-(L_1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcll} 2a & & +3c & -d & = & 0 & (L_1)\\ & 2b & -3c & +7d & = & 0 & (L_2)\\ & & -7c & +19d & = & 0 & (L_3)\leftarrow (L_3)+2(L_2)\\ & & -7c & +3d & = & 0 & (L_4)\leftarrow (L_4)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcll} 2a & & +3c & -d & = & 0 & (L_1)\\ & 2b & -3c & +7d & = & 0 & (L_2)\\ & & -7c & +19d & = & 0 & (L_3)\\ & & & -16d & = & 0 & (L_4)\leftarrow (L_4)-(L_3)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0\\ b & = & 0\\ c & = & 0\\ d & = & 0\end{array}\right. .$$

$\boxed{\text{0,5pt}}$ Conclusion, la famille $\mathcal{B}_1$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$. La famille $\mathcal{B}_1$ est, de fait, génératrice.

2. • $\boxed{\text{0,5pt}}$ $\mathcal{B}_2$ n'est pas une famille génératrice car $(dim(\mathcal{B}_2 = 3) < (dim(\mathbb{R}^4) = 4))$. Ça n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^4$.
   • $\boxed{\text{0,5pt}}$ $\mathcal{B}_2$ ne peut être une base de $\mathbb{R}^3$ car les vecteurs de $\mathcal{B}_2$ sont des vecteurs de taille 4.
3. • $\boxed{\text{0,5pt}}$ $\mathcal{B}_3$ n'est pas une famille libre car $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ n'est pas linéairement indépendant de e_1, e_2, e_3, e_4. Ça n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^4$.
   • $\boxed{\text{0,5pt}}$ $\mathcal{B}_3$ ne peut être une base de $\mathbb{R}^5$ car les vecteurs de $\mathcal{B}_3$ sont des vecteurs de taille 4.

Exercice 3 *(5 points)*

On définit l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = x + y$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Le théorème du rang est-il vérifié ?

<u>*Correction*</u> :

1. $\boxed{\text{1pt}}$ Soient $u, v \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.
   On pose $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ et on obtient :
   $$\begin{array}{rcl} f(\lambda u+\mu v) & = & f(\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2) = (\lambda x_1+\mu x_2)+(\lambda y_1+\mu y_2) = (\lambda x_1+\lambda y_1)+(\lambda x_2+\mu y_2)\\ & = & \lambda(x_1+y_1)+\mu(x_2+y_2) = \lambda f(x_1,y_1)+\mu f(x_2,y_2) = \lambda f(u)+\mu f(v).\end{array}$$
   donc f est une application linéaire (c'est-à-dire un homomorphisme).
2. • $\boxed{\text{1,5pt}}$ On rappelle que $Ker(f) = \{u \in \mathbb{R}^2, f(u) = 0\}$. Soit $u = (x_1, y_1) \in Ker(f)$ alors
   $$f(u) = 0 \Leftrightarrow f(x_1, y_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 + y_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -y_1.$$
   Par conséquent $u = (x_1, y_1) \in Ker(f) \Leftrightarrow u = (-y_1, y_1) = y_1(-1, 1)$. Ainsi, $Ker(f) =< \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} >$.
   • $\boxed{\text{1,5pt}}$ On rappelle que $Im(f) = \{f(u), u \in \mathbb{R}^2\}$. Soit $u = (x_1, y_1) \in Im(f)$ alors
   $$f(u) = f(x_1, y_1) = x_1 + y_1 = (x_1 + y_1)(1).$$
   Par conséquent, $Im(f) =< \begin{pmatrix}1\end{pmatrix} >$.
3. $\boxed{\text{1pt}}$ On a bien $(dim(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = 2) = (dim(Im(f)) = 1) + (dim(Ker(f)) = 1)$.

Exercice 4 *(7 points)*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$f(x, y, z) = (5x + 7y + 14z, 7x + 6y + 12z, 2x + 4y + 8z).$$

1. (a) Résoudre le système linéaire

$$(\mathrm{S}) \left\{\begin{array}{rcl} 5x+7y+14z & = & 0\\ 7x+6y+12z & = & 0\\ 2x+4y+8z & = & 0\end{array}\right. .$$

(b) Quel est l'intérêt de résoudre (S) ? L'application linéaire f est-elle injective ?

(c) Quelle est la dimension de l'image de f ? L'application linéaire f est-elle surjective ? Bijective ?

(d) Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.

2. (a) Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer $f(1,1,1)$ en utilisant uniquement la matrice précédente.

<u>*Correction*</u> :

1. (a) $\boxed{\text{1pt}}$ Résolvons le système (S) :

$$(\text{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcll} 5x & +7y & +14z & = & 0 & (L_1) \\ 7x & +6y & +12z & = & 0 & (L_2) \\ 2x & +4y & +8z & = & 0 & (L_3) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcll} 5x & +7y & +14z & = & 0 & (L_1) \\ & -19y & -38z & = & 0 & (L_2) \leftarrow 5(L_2) - 7(L_1) \\ & 6y & +12z & = & 0 & (L_3) \leftarrow 5(L_3) - 2(L_1) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcll} 5x & +7y & +14z & = & 0 & (L_1) \\ & -19y & -38z & = & 0 & (L_2) \\ & & 0 & = & 0 & (L_3) \leftarrow 19(L_3) + 6(L_2) \end{array} \right.$$

(b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ L'intérêt de résoudre (S) est multiple. Il permet de déterminer $Ker(f)$ mais également $dim(Ker(f))$, $dim(Im(f))$ et $Im(f)$.

$\boxed{\text{0,5pt}}$ Étant donné que $(S) \Leftrightarrow f(x,y,z) = 0$, résoudre (S) nous permet de déterminer le noyau de f. On a $(L_2) \Rightarrow y = -2z$ puis $(L_1) \Rightarrow x = 0$. Donc, si $u = (x,y,z) \in Ker(f)$, $u = (0,-2z,z) = z(0,-2,1)$. Comme $Ker(f) \neq \{0\}$, f n'est pas injective.

(c) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Comme on dénombre une seule équation de compatibilité (« $0 = 0$ »), on a $dim(Im(f)) = 3 - 1 = 2$.

$\boxed{\text{0,5pt}}$ On en déduit que l'application linéaire n'est pas surjective car $Im(f) \neq \mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{0,5pt}}$ Finalement, f n'est pas bijective (ça n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, seulement un endomorphisme).

(d)
- $\boxed{\text{0,5pt}}$ Une base de $Ker(f)$ est donnée par $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
- $\boxed{\text{1pt}}$ Une base de $Im(f)$ est donnée - par exemple - par $\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$. On a isolé pour cela x et y en fonction de z dans (L_1) et (L_2).

2. (a) $\boxed{\text{1pt}}$ Il suffit de calculer les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (il faut au moins 3 vecteurs pour engendrer $\mathbb{R}^3$. Comme $f(1,0,0) = (5,7,2)$, $f(0,1,0) = (7,6,4)$ et $f(0,0,1) = (14,12,8)$, on en déduit la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. :

$$M_f = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 14 \\ 7 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

(b) $\boxed{\text{1pt}}$ $f(1,1,1) = M_f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 14 \\ 7 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 25 \\ 14 \end{pmatrix}$.