

MATHÉMATIQUES 2

Novembre 2011 - Contrôle Continu, Semestre 1, Session 1

Durée de l'épreuve : 2h00

Documents interdits.

(Les six exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 (2 points)

Montrez que

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0\}$ est un espace vectoriel,
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 1\}$ n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 2 (5 points)Parmi les familles suivantes de vecteurs de \mathbb{R}^3 , lesquelles sont génératrices, lesquelles ne le sont pas, et pourquoi ?

1. $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$,
2. $\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$,
3. $\{(0, 1, -1), (1, 0, -1), (1, -1, 0)\}$,
4. $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$,
5. $\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 1)\}$.

Exercice 3 (5 points)Parmi les familles suivantes de vecteurs de \mathbb{R}^3 , lesquelles sont libres, lesquelles ne le sont pas, et pourquoi ?

1. $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$,
2. $\{(1, 1, 0), (-1, -1, 0)\}$,
3. $\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$,
4. $\{(0, 1, -1), (1, 0, -1), (1, -1, 0)\}$,
5. $\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 1)\}$.

Exercice 4 (4 points)On considère l'application suivante de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

1. Vérifiez que f est une application linéaire.
2. Déterminez $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. L'application est-elle un automorphisme de \mathbb{R}^2 ?

Exercice 5 (4 points)Pour tout entier n , on munit \mathbb{R}^n de sa base canonique. Donnez la matrice de chacune des applications f suivantes.

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$.
3. $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z, t) \mapsto f(x, y, z, t) = (x + y + 2z - t, 2x + y + z + t)$.
4. $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z, t) \mapsto f(x, y, z, t) = x - y + 2z + 3t$.

Exercice 6 BONUS (2 points)

Résolvez le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z - t & = & 3 \\ 2x - z + 3t & = & 9 \\ 3x + 3y + 2z & = & 4 \\ -x - 2y + z - t & = & 0 \end{array} \right.$$