LICENCE 2 SEG **Pôle Lamartine - ULCO**

MATHÉMATIQUES 2 Décembre 2010 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits

(Les trois exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

CORRECTION

Exercice 1 *(5 points)*
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base naturelle $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ où

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1).$$

Soient les vecteurs $u = (1,0,1)$, $v = (0,1,1)$, $w = (1,2,0)$ et $\mathcal{B}' = \{u, v, w\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
4. Vérifier que $P = Q^{-1}$.

<u>*Correction*</u> :

1. $\boxed{\text{1pt}}$ Étant donné que $dim(\mathcal{B}') = dim(\mathbb{R}^3) = 3$, il suffit de démontrer que la famille $\mathcal{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ pour démontrer qu'elle est une base de $\mathbb{R}^3$. On calcule donc
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$
ce qui permet d'affirmer que les vecteurs de la famille $\mathcal{B}'$ sont linéairement indépendants, qu'ils forment par conséquent une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Conclusion, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. $\boxed{\text{1pt}}$ Il suffit pour obtenir les colonnes de P d'exprimer les vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ à l'aide des vecteurs de l'ancienne base $\mathcal{B}$. Ainsi,
   - $u = (1,0,1) = [1](1,0,0) + [0](0,1,0) + [1](0,0,1) = [1]e_1 + [0]e_2 + [1]e_3$, on obtient la première colonne de P,
   - $v = (0,1,1) = [0](1,0,0) + [1](0,1,0) + [1](0,0,1) = [0]e_1 + [1]e_2 + [1]e_3$, on obtient la deuxième colonne de P,
   - $w = (1,2,0) = [1](1,0,0) + [2](0,1,0) + [0](0,0,1) = [1]e_1 + [2]e_2 + [0]e_3$, on obtient la troisième colonne de P.

   On a donc,
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. $\boxed{\text{2pts}}$ Il suffit pour obtenir les colonnes de Q d'exprimer les vecteurs de l'ancienne base $\mathcal{B}$ à l'aide des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$. Cela revient donc à inverser la matrice P (cette matrice étant nécessairement inversible puisqu'elle implique des vecteurs de base). En utilisant les techniques présentées en cours on obtient :
$$Q = P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
ce qui signifie que
   - $e_1 = (1,0,0) = [2/3](1,0,1) + [-2/3](0,1,1) + [1/3](1,2,0) = [2/3]u + [-2/3]v + [1/3]w$, on obtient la première colonne de Q,

- $e_2 = (0,1,0) = [-1/3](1,0,1)+[1/3](0,1,1)+[1/3](1,2,0) = [-1/3]u+[1/3]v+[1/3]w$, on obtient la deuxième colonne de Q,
- $e_3 = (0,0,1) = [1/3](1,0,1)+[2/3](0,1,1)+[-1/3](1,2,0) = [1/3]u+[2/3]v+[-1/3]w$, on obtient la troisième colonne de Q.

4. $\boxed{\text{1pt}}$ C'est vrai par définition.

Exercice 2 *(15 points)*

On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = (y, z, -2x+y+2z) \end{array}$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f. En déduire que f est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^3$ (et donc que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$).
3. Déterminer la matrice A caractérisant l'application linéaire f dans la base canonique.
4. Justifier le caractère inversible de A puis déterminer la matrice inverse de A soit A^{-1}.
5. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers la base $((-1,1,-1),(1,1,1),(1,2,4))$ de $\mathbb{R}^3$:
$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
Montrer que la matrice inverse de P est donnée (partiellement) par
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & * & * \\ * & 1/2 & -1/2 \\ -1/3 & * & * \end{pmatrix}$$
où « * » sont des réels à déterminer. Que désigne dans ce cas P^{-1} ?
6. Calculer $P^{-1}AP$. Que remarque t-on ?
7. Montrer que $(A+I)(A-I)(A-2I) = 0$.
8. En développant l'expression précédente, montrer que l'inverse de A est donné par
$$A^{-1} = \frac{1}{2}(-A^2 + 2A + I).$$
et qu'on retrouve bien l'expression de l'inverse de A donnée à la question 4.
9. Déterminer l'application linéaire g associée à la matrice A^{-1} (dans la base canonique).
10. Montrer alors que $f \circ g(x,y,z) = g \circ f(x,y,z) = (x,y,z)$.

<u>*Correction*</u> :

1. $\boxed{\text{1pt}}$ Soient $u = (x_1, y_1, z_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et λ, μ deux réels. On montre alors aisément que $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ et donc que f est une application linéaire.
2. - $\boxed{\text{1pt}}$ $\mathrm{Ker}(f) = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = 0\}$. Soit $u = (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors,
$$f(u) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 0 \\ -2x+y+2z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. .$$
$\boxed{\text{0,5pt}}$ On en déduit que $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et donc que f est injective.
   - $\boxed{\text{1pt}}$ $\mathrm{Im}(f) = \{f(u), u \in \mathbb{R}^3\}$. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ alors,
$$f(u) = f(x,y,z) = (y, z, -2x+y+2z) = x(0,0,-2) + y(1,0,1) + z(0,1,2).$$
Par conséquent, $\mathrm{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.
$\boxed{\text{0,5pt}}$ Ces trois vecteurs étant linéairement indépendants d'après le théorème du rang (qui nous

indique que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$), ils forment une base de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(f)$ engendre $\mathbb{R}^3$. On en déduit que f est surjective.

Finalement, f est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3. $\boxed{\text{1pt}}$ Comme $f(1,0,0) = (0,0,-2)$, $f(0,1,0) = (1,0,1)$ et $f(0,0,1) = (0,1,2)$, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. $\boxed{\text{0,5pt}}$ A étant la matrice associée à une application (linéaire) bijective, A est inversible.

   $\boxed{\text{1,5pt}}$ La matrice inverse de A est donnée par $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $\boxed{\text{1,5pt}}$ P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/2 & -1/6 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

   $\boxed{\text{0,5pt}}$ P^{-1} désigne la matrice de passage de la base $((-1,1,-1),(1,1,1),(1,2,4))$ vers la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

6. $\boxed{\text{1,5pt}}$ $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   $\boxed{\text{0,5pt}}$ On obtient une matrice diagonale, c'est-à-dire que le changement de base permet de travailler avec une matrice diagonale plutôt qu'une matrice quelconque.

7. $\boxed{\text{1pt}}$ En effet, $(A+I)(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. $\boxed{\text{1pt}}$ En développant l'identité $(A+I)(A-I)(A-2I) = 0$ on obtient

$$(A^2 - I)(A - 2I) = A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0 \Leftrightarrow A(-\tfrac{1}{2}(A^2 - 2A - I)) = I.$$

   On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(-A^2 + 2A + I)$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \frac{1}{2}(-A^2 + 2A + I) &= \frac{1}{2}\left(- \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(- \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1} \end{aligned}$$

9. $\boxed{\text{1pt}}$ La matrice inverse de A nous permet d'affirmer que $g(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{2}x + y - \dfrac{1}{2}z, x, y\right)$.

10. $\boxed{\text{1pt}}$ On vérifie que
    - $f \circ g(x,y,z,) = f(g(x,y,z)) = f\left(\dfrac{1}{2}x + y - \dfrac{1}{2}z, x, y\right) = (x,y,z)$,
    - $g \circ f(x,y,z) = g(f(x,y,z)) = g(y, z, -2x + y + 2z) = (x,y,z)$.

Exercice 3 BONUS *(2 points)*.

Déterminer deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

Correction :

$\boxed{\text{2pts}}$ Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ conviennent.