LICENCE 2 SEG **Pôle Lamartine - ULCO**

MATHÉMATIQUES 2 Décembre 2010 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits

(Les trois exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 *(5 points)*

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base naturelle $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ où

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1).$$

Soient les vecteurs $u = (1,0,1)$, $v = (0,1,1)$, $w = (1,2,0)$ et $\mathcal{B}' = \{u, v, w\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
4. Vérifier que $P = Q^{-1}$.

Exercice 2 *(15 points)*

On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = (y, z, -2x+y+2z) \end{array}$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f. En déduire que f est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^3$ (et donc que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$).
3. Déterminer la matrice A caractérisant l'application linéaire f dans la base canonique.
4. Justifier le caractère inversible de A puis déterminer la matrice inverse de A soit A^{-1}.
5. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers la base $((-1,1,-1),(1,1,1),(1,2,4))$ de $\mathbb{R}^3$:
$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
Montrer que la matrice inverse de P est donnée (partiellement) par
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & * & * \\ * & 1/2 & -1/2 \\ -1/3 & * & * \end{pmatrix}$$
où « * » sont des réels à déterminer. Que désigne dans ce cas P^{-1} ?
6. Calculer $P^{-1}AP$. Que remarque t-on ?
7. Montrer que $(A+I)(A-I)(A-2I) = 0$.
8. En développant l'expression précédente, montrer que l'inverse de A est donné par
$$A^{-1} = \frac{1}{2}(-A^2 + 2A + I).$$
et qu'on retrouve bien l'expression de l'inverse de A donnée à la question 4.
9. Déterminer l'application linéaire g associée à la matrice A^{-1} (dans la base canonique).
10. Montrer alors que $f \circ g(x,y,z) = g \circ f(x,y,z) = (x,y,z)$.

Exercice 3 BONUS *(2 points)*.

Déterminer deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.