Durée de l'épreuve : 3h00 Documents interdits.

(Les quatre exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 Analysons la fabrication de 3 produits semi-finis S_1, S_2, S_3 au moyen de 4 facteurs primaires de production F_1, F_2, F_3 et F_4 (qui peuvent être, pour fixer les idées, le travail, le capital, l'énergie et des matières premières). La quantité du facteur F_j nécessaire pour fabriquer une unité de produit S_i est donnée par l'élément a_{ij} de la matrice $A = (a_{ij})$ ci-dessous, appelée matrice de fabrication.
(Les éléments de A seront supposés fixes aussi longtemps que la technique de production reste inchangée.)

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 50 & 3 & 6 \\ 200 & 10 & 4 & 4 \\ 150 & 20 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Ainsi, par exemple, la production d'une unité de S_1 nécessite 100 unités de F_1, 50 unités de F_2, 3 unités de F_3 et 6 unités de F_4.

Les 3 produits semi-finis S_1, S_2 et S_3 servent à leur tour pour fabriquer deux produits finis P_1 et P_2. Pour obtenir une unité du produit P_i, il faut employer les quantités b_{ij} de S_j précisées à l'aide d'une nouvelle matrice de fabrication $B = (b_{ij})$ donnée ci-dessous

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices transposées de A et de B.
2. Préciser si les produits AB et BA sont réalisables et le cas échéant, calculer ces produits et en donner une interprétation économique.
3. Si les matières premières F_1, F_2, F_3 et F_4 coûtent à l'unité 10, 5, 4 et 2 euros respectivement, préciser le coût de fabrication des produits semi-finis ainsi que celui des produits finis.
4. Peut-on résoudre le problème inverse à savoir : pour un coût de fabrication donné des produits finis, peut-on retrouver les coûts à l'unité des matières premières F_1, F_2, F_3 et F_4 ? Pourquoi ?

Exercice 2 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (3x - y + z, 4x - 2y + z, -4x + y - 2z).$$

1. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$.
2. On considère les vecteurs
$$\vec{u_1} = \vec{e_1} + 3\vec{e_2} - \vec{e_3}, \qquad \vec{u_2} = \vec{e_2} + \vec{e_3}, \qquad \vec{u_3} = \vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3}.$$
Montrer que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer les images $f(\vec{u_1})$, $f(\vec{u_2})$, $f(\vec{u_3})$. En déduire la matrice de f quand on munit $\mathbb{R}^3$ (au départ et à l'arrivée) de la base $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$.
4. Montrer que la matrice M est inversible et calculer son inverse.
5. Résoudre le système
$$\begin{cases} 3x - y + z &= 3 \\ 4x - 2y + z &= -1 \\ -4x + y - 2z &= -2 \end{cases}$$
en utilisant la question précédente.

Exercice 3 Soit l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x-y+z, x+3y+z) \end{array}$$

1. Démontrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base du noyau de f.
3. Déterminer une base de l'image de f.
4. f est-elle injective ? surjective ?
5. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
6. Donner la matrice de f dans une base de votre choix (autre que la base canonique).

Exercice 4 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible (sans calculer le déterminant), et déterminer A^{-1} (sans calculer l'inverse).
2. Retrouver le déterminant de A à l'aide de la règle de Sarrus puis à l'aide d'un développement suivant une ligne ou une colonne de votre choix.
3. Retrouver l'inverse de A à l'aide de la méthode des cofacteurs puis à l'aide du système $A\vec{x} = \vec{y}$ où $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont des vecteurs inconnus dans $\mathbb{R}^3$.