ISCID-CO - Prépa 2 **ULCO - Dunkerque**

MATHÉMATIQUES Décembre 2012 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 1

Durée de l'épreuve : 3h00 Documents interdits.

(Les exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 3pts

1. 0,5pt Le nombre de colonnes de A étant égal au nombre de lignes de B, le produit AB est réalisable.
   1pt On trouve
$$AB = \begin{pmatrix} 198 & 194 & 195 \\ 187 & 183 & 190 \\ 195 & 195 & 219 \\ 186 & 180 & 168 \end{pmatrix}.$$
2. 0,5pt La matrice produit donne pour chaque élève (= ligne) les trois moyennes calculées avec les différents jeux de coefficients.
3. 1pt Trois élèves ratent donc leur examen (il faut avoir 200 sur 400 pour réussir), le troisième réussira son examen à condition qu'on choisisse le 3e jeu de coefficients.

Exercice 2 4pts

1. 0,5pt Soient
$$M_1 = \begin{pmatrix} 10 & 120 & 10 \\ 7 & 100 & 15 \\ 6 & 80 & 12 \\ 8 & 110 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5},$$
   les matrices obtenues par une lecture immédiate des tableaux. La théorie matricielle nous dit que ni M_1M_2 ni M_2M_1 ne sont réalisables car dans les deux cas, le nombre de colonnes à gauche n'est pas égal au nombre de lignes à droite.
   1pt Il faut alors considérer les données numériques sous une forme différente. On posera donc
$$M_1 = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 & 8 \\ 120 & 100 & 80 & 110 \\ 10 & 15 & 12 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5},$$
   où M_1 est la transposée de la précedente matrice homonyme. Le produit M_1M_2 est réalisable et fournit bien le tableau des paramètres de fabrication de chaque atelier. On a
$$M = M_1M_2 = \begin{pmatrix} 38 & 28 & 34 & 32 & 40 \\ 470 & 400 & 440 & 430 & 550 \\ 41 & 60 & 50 & 59 & 55 \end{pmatrix}.$$
   Il donne en lignes respectivement le temps, le nombre de pièces et le coût, et en colonnes l'atelier.
   0,5pt Le nombre de pièces fabriquées par l'atelier C en 34 minutes de fonctionnement de ses 4 machines est donné par le coefficient $M_{2,3} = 440$.
   0,5pt Le coût est de $M_{3,3} = 50$€.
2. – 0,5pt Pour calculer le coût total C_T sur les 5 ateliers, il suffit d'additionner les 5 valeurs de la dernière ligne. On obtient $C_T = 41 + 60 + 50 + 59 + 55 = 265$€.
   – 0,5pt Le nombre total de pièces fabriquées est de $470 + 400 + 440 + 430 + 550 = 2290$ unités.
   – 0,5pt Le temps total de fonctionnement des 22 machines est de $38 + 28 + 34 + 32 + 40 = 172$ minutes.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ $\boxed{\text{7pts}}$

1. • $\boxed{\text{2pts}}$ Soit $V = \{(a, b, c)|a + b = 0\}$. V est manifestement un sous-espace de $E = \mathbb{R}^3$. Montrons que V est un sous-espace vectoriel de E.
   – Le vecteur nul $\vec{0} = (0, 0, 0)$ appartient à V. En effet, $0 + 0 = 0$.
   – Soient deux vecteurs $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ dans V. On a alors $a_1 + b_1 = 0$ et $a_2 + b_2 = 0$ $(\star 1)$. Montrons maintenant que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$. On a $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) = (A, B, C)$. Si $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$, on a nécessairement $A + B = 0$. Comme $A + B = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = 0$ d'après l'hypothèse $(\star 1)$, on a bien $v_1 + v_2 \in V$.
   – Soit $\vec{v} = (a, b, c) \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors $a + b = 0$ $(\star 2)$. Montrons maintenant que $\lambda\vec{v} \in V$. On a $\lambda\vec{v} = \lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c) = (A, B, C)$. Si $\lambda\vec{v} \in V$, on a nécessairement $A + B = 0$. Comme $A + B = \lambda a + \lambda b = \lambda(a + b) = 0$ d'après l'hypothèse $(\star 2)$, on a bien $\lambda\vec{v} \in V$.

   Conclusion, V est sous-espace vectoriel de E.

   • $\boxed{\text{2pts}}$ Soit $W = \{(a, b, c)|c = 0\}$. W est manifestement un sous-espace de E. Montrons que W est un sous-espace vectoriel de E.
   – Le vecteur nul $\vec{0} = (0, 0, 0)$ appartient à W. En effet, $0 = 0$.
   – Soient deux vecteurs $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ dans W. On a alors $c_1 = 0$ et $c_2 = 0$ $(\star 1)$. Montrons maintenant que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in W$. On a $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) = (A, B, C)$. Si $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in W$, on a nécessairement $C = 0$. Comme $C = c_1 + c_2 = 0$ d'après l'hypothèse $(\star 1)$, on a bien $v_1 + v_2 \in W$.
   – Soit $\vec{v} = (a, b, c) \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors $c = 0$ $(\star 2)$. Montrons maintenant que $\lambda\vec{v} \in W$. On a $\lambda\vec{v} = \lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c) = (A, B, C)$. Si $\lambda\vec{v} \in W$, on a nécessairement $C = 0$. Comme $C = \lambda c = 0$ d'après l'hypothèse $(\star 2)$, on a bien $\lambda\vec{v} \in W$.

   Conclusion, W est sous-espace vectoriel de E.

2. Pour démontrer que X et Z ne sont pas des sous-espaces vectoriels, il suffit de démontrer qu'une propriété au moins parmi celles qui définissent un sous-espace vectoriel n'est pas vérifiée.
   • $\boxed{\text{0,5pt}}$ On remarque aisément que $\vec{0} = (0, 0, 0)$ n'appartient pas à X car $0 \not> 0$. Donc, X n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
   • $\boxed{\text{0,5pt}}$ Considérons les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ et $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)$. On remarque aisément que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ appartiennent à Z (on a respectivement $1^2 + 0^2 + 0^2 \leq 1$ et $0^2 + 1^2 + 0^2 \leq 1$). Cependant, $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (1, 1, 0) \notin Z$; en effet, $1^2 + 1^2 + 0^2 = 2 \not\leq 1$. Par conséquent, l'addition n'est pas interne, Z n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

3. • $\boxed{\text{1pt}}$ Soit $\vec{v} = (a, b, c) \in V$. Comme $a + b = 0$, on a $a = -b$ (ou $b = -a$). Ainsi, $\vec{v} = (-b, b, c) = (-b, b, 0) + (0, 0, c) = b(-1, 1, 0) + c(0, 0, 1)$. On en déduit qu'une base de V est donnée par $\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
   • $\boxed{\text{1pt}}$ Soit $\vec{v} = (a, b, c) \in W$. Comme $c = 0$, $\vec{v} = (a, b, 0) = (a, 0, 0) + (0, b, 0) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0)$. On en déduit qu'une base de W est donnée par $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ $\boxed{\text{11pts}}$

1. • $\boxed{\text{0,5pt}}$ $(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$ (soit A la matrice de ce système),
   • $\boxed{\text{0,5pt}}$ $(2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ (soit B la matrice de ce système),
   • $\boxed{\text{0,5pt}}$ $(3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (soit C la matrice de ce système).

2. • Résolvons (1) de deux manières différentes :
   – $\boxed{\text{1,5pt}}$ On remarque que le système est triangulaire inférieur, on peut donc le résoudre rapidement par substitution. On trouve $(x, y, z) = (6, 3, -1)$.

– $\boxed{\text{1,5pt}}$ La matrice A associée à (1) étant triangulaire, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux donc $\det(A) = 40 \neq 0$. Le système est donc de Cramer. Par conséquent,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 10 & 4 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{40} = \frac{240}{40} = 6,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix}}{40} = \frac{120}{40} = 3,\ z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{40} = \frac{-40}{40} = -1.$$

- Résolvons (2) de deux manières différentes :
  – $\boxed{\text{1,5pt}}$ Par substitution, (L_1) nous donne $x = 3-2y$ puis dans (L_2), on obtient $4(3-2y)-3y = -2 \Leftrightarrow -11y = -14 \Leftrightarrow y = \dfrac{14}{11}$. Si on remplace x dans (L_1) ou (L_2), on obtient $x = \dfrac{5}{11}$.
  – $\boxed{\text{1,5pt}}$ On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2x+4y &=& 6 & (L_1) \\ 4x-3y &=& -2 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x+4y &=& 6 & (L_1) \\ -11y &=& -14 & (L_2) \leftarrow -\frac{1}{11}(L2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x+4y &=& 6 & (L_1) \leftarrow (L_1) - 4(L_2) \\ y &=& \frac{14}{11} & (L_2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x &=& \frac{10}{11} & (L_1) \leftarrow \frac{1}{2}(L_1) \\ y &=& \frac{14}{11} & (L_2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{5}{11} \\ y &=& \dfrac{14}{11} \end{array}\right.$$

3. $\boxed{\text{0,5pt}}$ Vérifions que C est inversible : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -24 \neq 0$.

   $\boxed{\text{2pts}}$ Déterminons la matrice inverse C^{-1} de C à l'aide de la méthode des cofacteurs :

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)}\mathrm{Com}(C)^T = -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 10 & -14 & -2 \\ 8 & -16 & 8 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 10 & 8 & -3 \\ -14 & -16 & -3 \\ -2 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

   $\boxed{\text{1pt}}$ Comme $(3) \Leftrightarrow CX = B$ avec $C = (x, y, z)$ et $B = (1, 1, -2)$, la solution de (1) s'écrit

$$X = C^{-1}B = -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 10 & 8 & -3 \\ -14 & -16 & -3 \\ -2 & 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 $\boxed{\text{5pts}}$

1. $\boxed{\text{0,5pt}}$ A étant la matrice du système, ce système est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Comme $\det(A) = -1$, le système est inversible et admettra une unique solution.

$$\boxed{\text{1,5pt}} \left\{\begin{array}{rcll} y-z &=& 0 & (L_1) \leftarrow (L_3) \\ 4x-3y+4z &=& 5 & (L_2) \\ 3x-3y+4z &=& 4 & (L_3) \leftarrow (L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 3x-3y+4z &=& 4 & (L_1) \\ 4x-3y+4z &=& 5 & (L_2) \leftarrow 3(L_2) - 4(L_3) \\ y-z &=& 0 & (L_3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 3x-3y+4z &=& 4 & (L_1) \\ 3y-4z &=& -1 & (L_2) \\ y-z &=& 0 & (L_3) \leftarrow 3(L_3) - (L_2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 3x-3y+4z &=& 4 & (L_1) \leftarrow (L_2) - 4(L_3) \\ 3y-4z &=& -1 & (L_2) \leftarrow (L_2) + 4(L_3) \\ z &=& 1 & (L_3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 3x-3y &=& 0 & (L_1) \leftarrow (L_1) + (L_2) \\ 3y &=& 3 & (L_2) \leftarrow \frac{1}{3}(L_2) \\ z &=& 1 & (L_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 3x &=& 3 & (L_1) \leftarrow \frac{1}{3}(L_1) \\ y &=& 1 & (L_2) \\ z &=& 1 & (L_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right..$$

2. $\boxed{\text{1pt}}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Une matrice qui a cette propriété est dite **involutive**.

   $\boxed{\text{1pt}}$ Cela signifie donc que A est son propre inverse et $A^{-1} = A$.

3. $\boxed{\text{1pt}}$ Le système linéaire s'écrit sous la forme $AX = B$ avec $X = (x, y, z)$ et $B = (0, 5, 4)$. La solution du système est donnée par $X = A^{-1}B = AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.