ISCID-CO - Prépa 2 **ULCO - Dunkerque**

MATHÉMATIQUES Décembre 2012 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 1

Durée de l'épreuve : 3h00 Documents interdits.

(Les exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 Les résultats à un examen de 4 élèves 1,2,3,4 sont donnés par la matrice A, où la ligne i donne les notes sur 20 de l'élève i en économie, mathématiques, histoire-géographie, français respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 9 & 9 \\ 10 & 11 & 7 & 9 \\ 8 & 16 & 5 & 11 \\ 12 & 6 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

La matrice B donne 3 simulations possibles des coefficients de ces matières

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculez le produit AB après avoir justifié de son existence.
2. Quelle est la signification de chacun des éléments de AB ?
3. Quel est l'élève pour qui le choix des coefficients sera décisif ?

Exercice 2 Dans une usine de métallurgie, on s'intéresse à la fabrication de pièces métalliques toutes semblables. Cette usine possède cinq ateliers A, B, C, D et E, et dans chacun de ces ateliers, la production est faite à l'aide de 4 types de machines, plus ou moins vieilles, si bien que la production ne se fait, ni au même rythme, ni au même coût.
Le premier tableau donne les paramètres de fabrication par machine (le temps, le nombre de pièces et le coût) et le second donne le nombre de machines de chaque type dans les ateliers.

Machine	temps (en min)	nombre de pièces	coût (en €)
1	10	120	10
2	7	100	15
3	6	80	12
4	8	110	11

Machine	Nombre par atelier				
	A	B	C	D	E
1	3	0	2	0	0
2	0	4	2	0	0
3	0	0	0	4	0
4	1	0	0	1	5

Exemple de lecture : en 10 minutes, la machine 1 fabrique 120 pièces pour un coût total de 10€.

1. À l'aide du produit de deux matrices spécifiques, donnez le tableau des paramètres de fabrication de chaque atelier. Quel sera le nombre de pièces fabriquées par l'atelier C en 34 minutes de fonctionnement de ses 4 machines ? Et pour quel coût ?
2. Quel sera le coût total sur les 5 ateliers ?
   Quel nombre de pièces au total pourront être fabriquées ?
   Quel sera le temps total de fonctionnement des 22 machines ?

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Soit $E = \mathbb{R}^3$, considérons les ensembles

- $V = \{(a,b,c) | a + b = 0\}$,
- $W = \{(a,b,c) | c = 0\}$,
- $X = \{(a,b,c) | a > 0\}$,
- $Z = \{(a,b,c) | a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$.

1. Montrez que V et W sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrez que X et Z ne sont pas des sous-espaces vectoriels de E.
3. Trouvez une base pour chacun des sous-espaces V et W.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ On considère les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - 3y + 5z &=& -2 \\ 4y + 2z &=& 10 \\ 5z &=& -5 \end{array}\right. \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 4y &=& 6 \\ 4x - 3y &=& -2 \end{array}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z &=& 1 \\ -2x - y - 3z &=& 1 \\ 6x + 4y + 2z &=& -2 \end{array}\right. \tag{3}$$

1. Écrivez les systèmes précédents sous formes matricielles.
2. Résolvez les systèmes (1) et (2) par deux méthodes différentes.
3. Résolvez le système (3) en calculant l'inverse de la matrice du système.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Résolvez le système linéaire $\left\{\begin{array}{rcl} y - z &=& 0 \\ 4x - 3y + 4z &=& 5 \\ 3x - 3y + 4z &=& 4 \end{array}\right.$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauss après avoir vérifié que le système était inversible.
2. Calculez A^2 et déduisez-en A^{-1}.
3. Retrouvez la solution de la question 1. à l'aide de l'inverse de A.