LICENCE 2 SEG **Pôle Lamartine - ULCO**

MATHÉMATIQUES 2 Décembre 2012 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits.

(Les cinq exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1

1. Il existe des matrices non nulles telles que leur multiplication à un certain rang donne la matrice nulle. Ainsi, pour une matrice A, s'il existe un entier $k > 0$ tel que $A^k = 0$ alors une telle matrice A est dite **nilpotente** et son **ordre de nilpotence** est égal à k.
   Montrez que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente d'ordre 3.
2. Il existe des matrices non nulles telles que leur multiplication à un certain rang donne la matrice initiale. Ainsi, s'il existe un entier k tel que $A^k = A$, une telle matrice A est dite **idempotente** et son **ordre d'indempotence** est égal à k.
   Montrez que $B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ est une matrice idempotente d'ordre 2.

Exercice 2

Dans une usine de métallurgie, on s'intéresse à la fabrication de pièces métalliques toutes semblables. Cette usine possède cinq ateliers A, B, C, D et E, et dans chacun de ces ateliers, la production est faite à l'aide de 4 types de machines, plus ou moins vieilles, si bien que la production ne se fait, ni au même rythme, ni au même coût.
Le premier tableau donne les paramètres de fabrication par machine (le temps, le nombre de pièces et le coût) et le second donne le nombre de machines de chaque type dans les ateliers.

Machine	temps (en min)	nombre de pièces	coût (en €)
1	10	120	10
2	7	100	15
3	6	80	12
4	8	110	11

Table 1 – Paramètres de fabrication par machine

Machine	Nombre par atelier				
	A	B	C	D	E
1	3	0	2	0	0
2	0	4	2	0	0
3	0	0	0	4	0
4	1	0	0	1	5

Table 2 – Machines par atelier

Exemple de lecture : en 10 minutes, la machine 1 fabrique 120 pièces pour un coût total de 10€.

1. Si M_1 et M_2 désignent respectivement les matrices associées aux tableaux 1 et 2, peut-on réaliser les produits M_1M_2 et/ou M_2M_1 ? Pourquoi ?
2. Déterminer la transposée M_1^t de M_1 puis calculer le produit $M_1^tM_2$.
   Ce produit correspond au tableau des paramètres de fabrication de chaque atelier. Quel sera le nombre de pièces fabriquées par l'atelier C en 34 minutes de fonctionnement de ses 4 machines ? Et pour quel coût ?
3. Quel sera le coût total sur les 5 ateliers ?
   Quel nombre de pièces au total pourront être fabriquées ?
   Quel sera le temps total de fonctionnement des 22 machines ?

Exercice 3 On considère les 3 vecteurs

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

1. Écrire la matrice A du système de vecteurs $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. On considère la base $\mathcal{B}' = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ où $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.
   (b) Déterminer la matrice $B = P^{-1}A$ du système de vecteurs $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 4 Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (-x + y, x - y, -x + z, -y + z).$$

1. Montrer que f est linéaire
2. Soient $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
   Calculer $f(\vec{e_1})$, $f(\vec{e_2})$ et $f(\vec{e_3})$ en fonction de $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$ et $\vec{u_4}$. En déduire la matrice A de f dans les bases canoniques.
3. Montrer que $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2})\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ (cette famille étant constituée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$, il suffira de calculer le déterminant de la matrice $(\vec{u_1}\ \vec{u_2}\ f(\vec{e_1})\ f(\vec{e_2}))$ pour conclure).
4. On donne partiellement ci-dessous la matrice B de f dans les bases $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ et $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2})\}$:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & \star & \star \\ \star & 0 & -1 \\ \star & \star & \star \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{u_1} \\ \vec{u_2} \\ f(\vec{e_1}) \\ f(\vec{e_2}) \end{array}.$$

   Compléter la matrice (remplacer le symbole "$\star$" par une valeur) en justifiant vos réponses.

Exercice 5 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même défini par

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t).$$

1. Écrire la matrice A représentant l'application linéaire f dans la base canonique $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\}$.
2. Montrer que $f(\vec{e_3})$ et $f(\vec{e_4})$ sont combinaisons linéaires de $f(\vec{e_1})$ et $f(\vec{e_2})$.
3. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. Quelle est la dimension du noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f ? Montrer que la famille de vecteurs $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ avec

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$.