LICENCE 2 SEG **Pôle Lamartine - ULCO**

MATHÉMATIQUES 2 Décembre 2012 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits.

(Les cinq exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 3pts

1. • $A^1 = A \neq 0$,
   • $\boxed{\text{1pt}}$ $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$,
   • $\boxed{\text{1pt}}$ $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

   On a montré que A est une matrice nilpotente d'ordre 3.
2. $\boxed{\text{1pt}}$ $B^2 = B \times B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = B$ donc B est idempotente d'ordre 2.

Exercice 2 5pts

1. $\boxed{\text{1pt}}$ Soient

$$M_1 = \begin{pmatrix} 10 & 120 & 10 \\ 7 & 100 & 15 \\ 6 & 80 & 12 \\ 8 & 110 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times3} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times5},$$

   les matrices obtenues par une lecture immédiate des tableaux. La théorie matricielle nous dit que ni M_1M_2 ni M_2M_1 ne sont réalisables car dans les deux cas, le nombre de colonnes à gauche n'est pas égal au nombre de lignes à droite.
2. – $\boxed{\text{0,5pt}}$ La transposée de M_1 est donnée par $M_1^t = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 & 8 \\ 120 & 100 & 80 & 110 \\ 10 & 15 & 12 & 11 \end{pmatrix}$.
   – $\boxed{\text{1pt}}$ Le produit $M_1^tM_2$ est réalisable et fournit bien le tableau des paramètres de fabrication de chaque atelier. On a

$$M = M_1^tM_2 = \begin{pmatrix} 38 & 28 & 34 & 32 & 40 \\ 470 & 400 & 440 & 430 & 550 \\ 41 & 60 & 50 & 59 & 55 \end{pmatrix}.$$

   Il donne en lignes respectivement le temps, le nombre de pièces et le coût, et en colonnes l'atelier.

   – $\boxed{\text{0,5pt}}$ Le nombre de pièces fabriquées par l'atelier C en 34 minutes de fonctionnement de ses 4 machines est donné par le coefficient $M_{2,3} = 440$.
   – $\boxed{\text{0,5pt}}$ Le coût est de $M_{3,3} = 50$€.
3. – $\boxed{\text{0,5pt}}$ Pour calculer le coût total C_T sur les 5 ateliers, il suffit d'additionner les 5 valeurs de la dernière ligne. On obtient $C_T = 41 + 60 + 50 + 59 + 55 = 265$€.
   – $\boxed{\text{0,5pt}}$ Le nombre total de pièces fabriquées est de $470 + 400 + 440 + 430 + 550 = 2290$ unités.
   – $\boxed{\text{0,5pt}}$ Le temps total de fonctionnement des 22 machines est de $38 + 28 + 34 + 32 + 40 = 172$ minutes.

Exercice 3 4pts

1. $\boxed{\text{0,5pt}}$ La matrice A du système de vecteurs $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{v_1} & \vec{v_2} & \vec{v_3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array}.$$

2. • $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ Par définition, la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est égale à $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array}$.

• $\boxed{2\text{pts}}$ Parce que P est une matrice de passage, P est nécessairement inversible. Calculons néanmoins son déterminant : $\det(P) = 2$. Déterminons maintenant P^{-1} à l'aide de la méthode des cofacteurs :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\text{Com}(P)^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. $\boxed{1\text{pt}}$ $B = P^{-1}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice permet d'exprimer les vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ en fonction des vecteurs $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ de la base $\mathcal{B}'$. Ainsi, par exemple, $\vec{v_3} = \vec{e_1} - \vec{e_2}$.

Exercice 4 6pts

1. $\boxed{1\text{pt}}$ Soient $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons alors que $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$.

$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= f\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X + Y \\ X - Y \\ -X + Z \\ -Y + Z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) \\ (\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2) \\ -(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2) \\ -(\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(-x_1 + y_1) + \mu(-x_2 + y_2) \\ \lambda(x_1 - y_1) + \mu(x_2 - y_2) \\ \lambda(-x_1 + z_1) + \mu(-x_2 + z_2) \\ \lambda(-y_1 + z_1) + \mu(-y_2 + z_2) \end{pmatrix} \\ &= \lambda\begin{pmatrix} -x_1 + y_1 \\ x_1 - y_1 \\ x_1 + z_1 \\ -y_1 + z_1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -x_2 + y_2 \\ x_2 - y_2 \\ x_2 + z_2 \\ -y_2 + z_2 \end{pmatrix} = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) \end{aligned}$$

On a bien montré que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$.

2. On a
   - $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ $f(\vec{e_1}) = f(1, 0, 0) = (-1, 1, -1, 0) = -\vec{u_1} + \vec{u_2} - \vec{u_3}$,
   - $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ $f(\vec{e_2}) = f(0, 1, 0) = (1, -1, 0, -1) = \vec{u_1} - \vec{u_2} - \vec{u_4}$ et
   - $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ $f(\vec{e_3}) = f(0, 0, 1) = (0, 0, 1, 1) = \vec{u_3} + \vec{u_4}$.

   $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ On en déduit que la matrice A de f dans les bases canoniques est donnée par :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{u_1} \\ \vec{u_2} \\ \vec{u_3} \\ \vec{u_4} \end{array}.$$

3. $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ Calculons comme l'énoncé le préconise le déterminant de la matrice

$$C = (\vec{u_1}\ \vec{u_2}\ f(\vec{e_1})\ f(\vec{e_2})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Comme la matrice B est triangulaire supérieure, son déterminant est tout simplement égal au produit de ses termes diagonaux : $\det(C) = 1 \neq 0$.

   $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ Toute famille libre de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ formant une base de $\mathbb{R}^4$, on en déduit que la famille $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2})\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

4. $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ Comme $f(\vec{e_1}) = 1 \times f(\vec{e_1})$ et $f(\vec{e_2}) = 1 \times f(\vec{e_2})$, on en déduit très simplement les deux premières

colonnes de la matrice B soit $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ respectivement.

$\boxed{\text{1pt}}$ Ensuite, on cherche $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ tels que

$$f(\vec{e_3}) \overset{1.}{=} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha\vec{u_1}+\beta\vec{u_2}+\gamma f(\vec{e_1})+\delta f(\vec{e_2}) \overset{1.}{=} \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}\alpha-\gamma+\delta&=&0\\ \beta+\gamma-\delta&=&0\\ -\gamma&=&1\\ -\delta&=&1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=-1\\ \delta=-1\end{array}\right.$$

On a donc montré que $f(\vec{e_3})=-f(\vec{e_1})-f(\vec{e_2})$ ce qui permet de découvrir la 3e colonne de B.

$\boxed{\text{0,5pt}}$ Finalement, la matrice B s'écrit :

$$B=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3})\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\vec{u_1}\\ \vec{u_2}\\ f(\vec{e_1})\\ f(\vec{e_2})\end{array}.$$

Exercice 5 $\boxed{\text{4pts}}$

1. $\boxed{\text{0,5pt}}$ On a $A=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) & f(\vec{e_4})\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\1&1&3&2\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\vec{e_1}\\ \vec{e_2}\\ \vec{e_3}\\ \vec{e_4}\end{array}.$

2. $\boxed{\text{0,5pt}}$ On trouve très facilement les relations
   - $f(\vec{e_3})=(1,1,0,3)=2f(\vec{e_1})+f(\vec{e_2})$,
   - $f(\vec{e_4})=f(\vec{e_1})+f(\vec{e_2})$.

   Cela permet donc d'affirmer que $f(\vec{e_3})$ et $f(\vec{e_4})$ sont combinaisons linéaires de $f(\vec{e_1})$ et $f(\vec{e_2})$.

3. $\boxed{\text{0,5pt}}$ Par définition, $\mathrm{Im}(f)=\{f(\vec{u}),\vec{u}\in\mathbb{R}^4\}$. L'application f étant linéaire, $\mathrm{Im}(f)$ est l'espace engendré par les images des vecteurs de la base de canonique (de $\mathbb{R}^4$). Par conséquent, $\mathrm{Im}(f)=<f(\vec{e_1}),f(\vec{e_2}),f(\vec{e_3}),f(\vec{e_4})>$. Comme $f(\vec{e_3})$ et $f(\vec{e_4})$ sont combinaisons linéaires de $f(\vec{e_1})$ et $f(\vec{e_2})$, $\mathrm{Im}(f)=<f(\vec{e_1}),f(\vec{e_2})>$. Puisque $f(\vec{e_1})$ et $f(\vec{e_2})$ ne sont pas proportionnels, $\dim(\mathrm{Im}(f))=2$.

   $\boxed{\text{0,5pt}}$ Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est donnée simplement par

$$\{f(\vec{e_1},f(\vec{e_2})\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

4. – $\boxed{\text{0,5pt}}$ D'après le théorème du rang, la dimension de l'espace d'arrivée est égale à la somme de la dimension du noyau de f et celle de son image. On a donc $\dim(\mathbb{R}^4)=\dim(\mathrm{Im}(f))+\dim(\mathrm{Ker}(f))\Leftrightarrow 4=2+\dim(\mathrm{Ker}(f))\Leftrightarrow\dim(\mathrm{Ker}(f))=2$.

   – $\boxed{\text{1,5pt}}$ Par définition, $\mathrm{Ker}(f)=\{\vec{u}\in\mathbb{R}^4, f(\vec{u})=\vec{0}\}$. Soit $\vec{u}\in\mathrm{Ker}(f)$ alors

$$f(\vec{u})=\vec{0}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x-y+z&=&0\\ y+z+t&=&0\\ 0&=&0\\ x+y+3z+2t&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=y-z\\ y\in\mathbb{R}\\ z\in\mathbb{R}\\ t=-y-z\end{array}\right.$$

   (les deux dernières équations du système de départ ne servent à rien).
   Finalement, si $\vec{u}=(x,y,z,t)\in\mathrm{Ker}(f)$ alors $(x,y,z,t)=(y-z,y,z,-y-z)=y(1,1,0,-1)+z(-1,0,1,-1)$.
   Une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est donnée par la famille de vecteurs $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

On remarque aisément que $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc la famille $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ est également une base de $\mathrm{Ker}(f)$.