Exercice 1 *Correction* : $\boxed{\text{4pts}}$

1. $\boxed{\text{1pt}}$ Une entreprise notée B la première année et passant à la note C au bout de 2 ans peut le faire de plusieurs manières :
   - $B \overset{2\%}{\to} A \overset{2\%}{\to} C$, ce qui est le cas de $0,02 \times 0,02 = 0,0004 = 0,04\%$ d'entreprises,
   - $B \overset{93\%}{\to} B \overset{5\%}{\to} C$, ce qui est le cas de $0,93 \times 0,05 = 0,0465 = 4,65\%$ d'entreprises,
   - $B \overset{5\%}{\to} C \overset{90\%}{\to} C$, ce qui est le cas de $0,05 \times 0,90 = 0,0450 = 4,50\%$ d'entreprises,
   - $B \overset{0\%}{\to} D \overset{0\%}{\to} C$, ce qui est le cas de $0 \times 0 = 0 = 0\%$ d'entreprises.

   Il y a par conséquent $0,04 + 4,65 + 4,50 + 0 = 9,19\%$ d'entreprises notées A la première année qui passent à la note C après 2 ans.

   $\boxed{\text{1pt}}$ On remarque que ce résultat s'obtient en réalisant le produit scalaire des vecteurs $\begin{pmatrix}0,02\\0,93\\0,05\\0\end{pmatrix}$ (la ligne B de la matrice) et $\begin{pmatrix}0,02\\0,05\\0,90\\0\end{pmatrix}$ (la colonne C de la matrice).

2. $\boxed{\text{2pts}}$ Comme on l'a remarqué dans la question précédente, multiplier la matrice par elle même donne les pourcentages de passage d'une note à l'autre sur 2 ans. On obtient après calculs

$$\begin{pmatrix}0,95 & 0,03 & 0,02 & 0\\ 0,02 & 0,93 & 0,05 & 0\\ 0,01 & 0,06 & 0,90 & 0,03\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0,95 & 0,03 & 0,02 & 0\\ \boxed{0,02 \quad 0,93 \quad 0,05 \quad 0}\\ 0,01 & 0,06 & 0,90 & 0,03\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,95 & 0,03 & 0,02 & 0\\ 0,02 & 0,93 & 0,05 & 0\\ 0,01 & 0,06 & 0,90 & 0,03\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0,9033 & 0,0576 & 0,0385 & 0,0006\\ 0,0381 & 0,8685 & \boxed{0,0919} & 0,0015\\ 0,0197 & 0,1101 & 0,8132 & 0,0570\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

   On a encadré les valeurs utilisées dans la question 1.

Exercice 2 *Correction* : $\boxed{\text{2pts}}$

On écrit le bilan des consommations de blé, de charbon et de fer :

- Blé :
  Production totale (B)= Consommation finale + le blé utilisé pour produire B unités de blé + le blé utilisé pour produire C unités de charbon + le blé utilisé pour produire F unités de fer.
- Charbon :
  Production totale (C)= Consommation finale + le charbon utilisé pour produire B unités de blé + le charbon utilisé pour produire C unités de charbon + le charbon utilisé pour produire F unités de fer.
- Fer :
  Production totale (F)= Consommation finale + le fer utilisé pour produire B unités de blé + le fer utilisé pour produire C unités de charbon + le fer utilisé pour produire F unités de fer.

$\boxed{\text{1pt}}$ On traduit ces informations à l'aide du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} B = 200 \\ C = 20 + 0,1B + 0,2C + 0,4F \\ F = 5 + 0,2B + 0,3C + 0,2F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 200 \\ C = 40 + 0,2C + 0,4F \\ F = 45 + 0,3C + 0,4F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 200 \\ 0,8C - 0,4F = 40 \\ -0,3C + 0,6F = 45 \end{cases}$$

$\boxed{\text{1pt}}$ On trouve après résolution $B = 200$, $C = \frac{1250}{13}$, $F = \frac{1200}{13}$.

Exercice 3 *Correction* : $\boxed{\text{4pts}}$

1. $\boxed{\text{0,5pt}}$ On vérifie facilement que $x^\star = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution du système $Ax = b$. Cependant, on n'a pas forcément trouvé toutes les solutions du système.
2. $\boxed{\text{1,5pt}}$ On a
$$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 & (L_1) \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 & (L_2) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 & (L_3) \end{cases}.$$
On remarque que $(L_2) \leftarrow (L_2) + 2(L_1)$ et $(L_3) \leftarrow (L_3) + (L_2)$ donnent deux fois la même équation, à savoir $x_2 = x_3$. En reportant dans (L_1), on trouve $x_1 = x_3$, donc $(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_3, x_3) = x_3(1, 1, 1)$ avec $x_3 \in \mathbb{R}$. En posant $\lambda = x_3$, on retrouve les solutions annoncées S_0.
Un système homogène admettant une infinité de solutions implique nécessairement une matrice associée non-inversible. Donc, d'après le résultat précédent, A est non-inversible.
3. $\boxed{\text{1pt}}$ On a $A(x - x^\star) = Ax - Ax^\star = b - b = 0$.
4. $\boxed{\text{1pt}}$ D'après les questions 2. et 3., si x est une solution de $Ax = b$, alors $y = x - x^\star$ est un élément de S_0. Donc $x = x^\star + y$ est une solution du système $Ax = b$, ce qui permet d'affirmer que l'ensemble des solutions du système $Ax = b$ s'écrit $S = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Réciproquement, si $x = x^\star + y$ avec $y \in S_0$, on a bien $Ax = b$.

Exercice 4 *Correction* : $\boxed{\text{4pts}}$

1. $\boxed{\text{1pt}}$ $E = \mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel si et seulement si E est muni d'une addition interne et d'une multiplication externe vérifiant les 8 assertions suivantes :
   – Addition interne : $\begin{cases} E \times E & \to & E \\ (v, w) & \mapsto & v + w \end{cases}$
     1. Associativité : $\forall u, v, w \in E,\ u + (v + w) = (u + v) + w$.
     2. Élément neutre : $\exists e \in E\ ,\ \forall v \in E,\ v + e = e + v = v$.
     3. Opposé : $\forall v \in E, \exists v' \in E, v + v' = v' + v = e$.
     4. Commutativité : $\forall v, w \in E,\ v + w = w + v$.

   – Multiplication externe : $\begin{cases} \mathbb{R} \times E & \to & E \\ (\lambda, v) & \mapsto & \lambda v \end{cases}$
     5. Associativité : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in E\ ,\ \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$.
     6. Elément neutre : $\forall v \in E,\ 1v = v$.
     7. Distributivité (1) : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in E,\ (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.
     8. Distributivité (2) : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v, w \in E,\ \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$.

   En utilisant les propriétés sur les vecteurs vues au Chapitre 1 ainsi que l'élément neutre $e = \vec{0}$, il est très simple de vérifier les propriétés ci-dessus. Conclusion, $\mathbb{R}^3$ est bien un espace vectoriel.
2. $\boxed{\text{0,5pt}}$ Étant donné que $\vec{0} = (0, 0, 0)$ ne vérifie pas l'équation du plan $(0 + 0 + 0 \neq 1)$, le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 1$ ne peut pas être un espace vectoriel.
3. $\boxed{\text{1pt}}$ Déterminons $P_1 \cap P_2$. Pour cela, il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} x+y+z=0 & (L_1) \\ x-2y+3z=0 & (L_2) \leftarrow (L_2)-(L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ -3y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{2}y \\ z=\frac{3}{2}y \end{cases}.$$

Ainsi $P_1 \cap P_2 = \{(x,y,z) = (-\frac{5}{2}y, y, \frac{3}{2}y) = y(-\frac{5}{2}, 1, \frac{3}{2}), y \in \mathbb{R}\}$ (l'intersection de deux plans dans l'espace est une droite dirigée par exemple par $(-\frac{5}{2}, 1, \frac{3}{2})$).

$\boxed{\text{1,5pt}}$ Montrons que $P_1 \cap P_2$ est un sev de $\mathbb{R}^3$. Soient $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in P_1 \cap P_2$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a alors $\vec{u}_1 = y_1 \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = y_2 \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \in P_1 \cap P_2.$$

Ceci prouve donc que $P_1 \cap P_2$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^3$.

Exercice 5 *Correction* : $\boxed{\text{6pts}}$

1. $\boxed{\text{1,5pt}}$ Soit $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a $v \in <v_1, v_2, v_3>$ si et seulement si il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda_1 + \lambda_2 \\ y = 2\lambda_1 - 4\lambda_3 \\ z = -3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 \\ t = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{cases}.$$

Après quelques combinaisons linéaires de lignes, on peut montrer que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{6}(-2x + y + 2t) \\ \lambda_2 = \frac{1}{6}(4x + y + 2t) \\ \lambda_3 = \frac{1}{6}(-x - y + t) \\ z = \frac{1}{6}(17x + 2y - 5t) \end{cases}.$$

   (a) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Soit $v = (0,0,-5,6)$. Comme $-5 = \frac{1}{6}(17(0) + 2(0) - 5(6))$, $v \in <v_1, v_2, v_3>$ et plus précisément, $v = 2v_1 + 2v_2 + v_3$.

   (b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Soit $v = (0,-2,-4,0)$. Comme $-4 \neq \frac{1}{6}(-0 - (-2) + 0)$, $v \notin <v_1, v_2, v_3>$.

   (c) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Soit $v = (0,-8,-6,4)$. Comme $-6 = \frac{1}{6}(17(0) + 2(-8) - 5(4))$, $v \in <v_1, v_2, v_3>$ et plus précisément, $v = 2v_3$.

2. $\boxed{\text{1pt}}$ Soit $v = (-1, 2, -8, t)$. Pour que $v \in <v_1, v_2, v_3>$, il faut imposer que $z = \frac{1}{6}(17x + 2y - 5t) \Leftrightarrow -8 = \frac{1}{6}(17(-1) + 2(2) - 5t) \Leftrightarrow t = 7$. Dans ce cas, $v = 3v_1 + 2v_2 + v_3$.

3. $\boxed{\text{2pts}}$ Considérons par exemple $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a alors $\det(v_1\ v_2\ v_3\ v_4) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -34 \neq 0$.
Si on revient maintenant à la question 1, $(0,0,-5,6)$ et $(0,-8,-6,4)$ s'écrivent comme précédemment. Par contre, $(0,-2,-4,0)$ peut maintenant s'écrire sous la forme suivante :

$$(0,-2,-4,0) = \frac{1}{17}(v_1 - 19v_2 + 9v_3 + 20v_4).$$