Prépa 2 - ISCID-CO **ULCO**

Mathématiques 12 Novembre 2013 - Contrôle Terminal - Session 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Aucun document autorisé. Calculatrice autorisée

Exercice 1 Les grandes entreprises qui souhaitent emprunter sur les marchés financiers demandent à des agences spécialisées de les noter (on a quelques exemples prouvant qu'il ne faut pas accorder une confiance aveugle à ces agences...). Supposons pour simplifier qu'il y ait 4 notes A, B, C, D qui sont revues chaque année par ces agences. Le tableau suivant donne la proportion d'entreprises passant d'une catégorie à l'autre en un an. Ce tableau se lit en lignes. Par example, 95% d'entreprises notées A une année donnée gardent la même note l'année suivante alors que 3% d'entre-elles passent de A à B et 2% de A à C.

	A	B	C	D
A	0,95	0,03	0,02	0
B	0,02	0,93	0,05	0
C	0,01	0,06	0,90	0,03
D	0	0	0	1

1. Trouver tous les cas possibles amenant une entreprise notée B la première année à la note C au bout de 2 ans. Que remarque t-on ?
2. En déduire que le tableau donnant les pourcentages de passage d'une note à l'autre sur 2 ans est obtenu en calculant le carré matriciel :

$$\begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 & 0,02 & 0 \\ 0,02 & 0,93 & 0,05 & 0 \\ 0,01 & 0,06 & 0,90 & 0,03 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2.$$

Exercice 2 Un village produit du blé, du charbon et du fer. Pour produire une unité de blé, elle utilise 0,1 unité de charbon et 0,2 unité de fer ; pour produire une unité de charbon, elle utilise 0,2 unités de charbon et 0,3 unité de fer ; pour produire une unité de fer, elle utilise 0,4 unité de charbon et 0,2 unité de fer. L'économie doit fournir au bout du compte (après déduction de ce qui est utilisé dans le processus de production) 200 unités de blé, 20 de charbon et 5 de fer. Quelles doivent être les productions de blé, charbon et fer ?

Exercice 3 On considère le système linéaire sous forme matricielle $Ax = b$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $x^\star = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution du système $Ax = b$.
2. Montrer que l'ensemble des solutions du système $Ax = 0$ s'écrit :

$$S_0 = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

La matrice A est-elle inversible ?

3. Soit x une solution de $Ax = b$. Montrer que $x - x^\star$ est une solution du système $Ax = 0$.
4. Montrer que l'ensemble des solutions du système $Ax = b$ s'écrit

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Cela devrait vous faire penser à la méthode “solution=solution particulière + solution générale de l'équation sans second membre”.)

Exercice 4 Soient P_1 et P_2 les plans d'équations cartésiennes respectives :

$$x + y + z = 0 \text{ et } x - 2y + 3z = 0.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel.
2. Le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 1$ est-il un espace vectoriel ?
3. Montrer que $P_1 \cap P_2$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^3$. Qui est-il ?

Exercice 5 On considère les trois vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (-1, 2, -3, 1),\ v_2 = (1, 0, 2, 1),\ v_3 = (0, -4, -3, 2).$$

1. Dans chaque cas, déterminer si $v \in < v_1, v_2, v_3 >$, c'est-à-dire l'espace engendré par v_1, v_2 et v_3. Le cas échéant, écrire le vecteur comme une combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3.
   (a) $v = (0, 0, -5, 6)$
   (b) $v = (0, -2, -4, 0)$
   (c) $v = (0, -8, -6, 4)$
2. Soit $v = (-1, 2, -8, t)$. Pour quelle(s) valeur(s) du réel t a-t-on $v \in < v_1, v_2, v_3 >$.