LICENCE 2 SEG **Pôle Lamartine - ULCO**

Mathématiques 19 Décembre 2013 - Contrôle Terminal, Session 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Aucun document autorisé. Calculatrice autorisée

---

Exercice 1 *Correction* : $\boxed{\text{3pts}}$

1. $\boxed{\text{2pts}}$ On obtient à l'aide de la règle de Sarrus : $\det(A) = -1$. Cela nous permet d'affirmer que A est inversible.
   À l'aide de la formule de Laplace, on obtient $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(\mathrm{Com}(A))^T = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} = A$.
   On dit que A est une matrice involutive car elle vérifie $A^2 = I$. En effet, $A^2 = A \times A = A \times A^{-1} = I$.
2. $\boxed{\text{1pt}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$.
   – Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et $A^n = A^{2k} = (A^2)^k = I^k = I$.
   – Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ et $A^n = A^{2k+1} = A^{2k} \times A = I \times A = A$.

Exercice 2 *Correction* : $\boxed{\text{3pts}}$

1. $\boxed{\text{1pt}}$ On obtient aisément $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a a alors :
   $$A^3 - A^2 + A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$
2. $\boxed{\text{1pt}}$ On a $A^3 - A^2 + A - I = 0 \Leftrightarrow A^3 - A^2 + A = I \Leftrightarrow A\underbrace{(A^2 - A + I)}_{A^{-1}} = I$. On rappelle en effet que pour une matrice A donnée, la relation $A \times B (= B \times A) = I$ permet d'affirmer que A est inversible et que B est la matrice inverse de A.
3. $\boxed{\text{1pt}}$ $A^4 = A \times A^3 \overset{1.}{=} A(A^2 - A + I) \overset{2.}{=} AA^{-1} = I$.

Exercice 3 *Correction* : $\boxed{\text{4pts}}$

1. $\boxed{\text{1pt}}$ Soient $\vec{u_1} = (x_1, y_1), \vec{u_2} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a
   $$\begin{aligned} f(\lambda_1\vec{u_1} + \lambda_2\vec{u_2}) &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \\ &= ((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2), -3(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + 3(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)) \\ &= (\lambda_1(x_1 - y_1) + \lambda_2(x_2 - y_2), \lambda_1(-3x_1 + 3y_1) + \lambda_2(-3x_2 + 3y_2)) \\ &= \lambda_1(x_1 - y_1, -3x_1 + 3y_1) + \lambda_2(x_2 - y_2, -3x_2 + 3y_2) \\ &= \lambda_1 f(x_1, y_1) + \lambda_2 f(x_2, y_2) \\ &= \lambda_1 f(\vec{u_1}) + \lambda_2 f(\vec{u_2}). \end{aligned}$$
   L'application f est donc bien linéaire.
2. • $\boxed{\text{1pt}}$ On a par définition $\ker(f) = \{\vec{u}, f(\vec{u}) = \vec{0}\}$. Soit $\vec{u} = (x, y) \in \ker(f)$ alors
   $$f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x - y, -3x + 3y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}.$$
   Par conséquent, $\vec{u} \in \ker(f) \Leftrightarrow \vec{u} = (x, x) = x(1, 1)$. Ainsi, $\ker(f) = \{\lambda(1, 1), \lambda \in \mathbb{R}\} =< (1, 1) >$.
   Comme $\ker(f) \neq \{\vec{0}\}$, f n'est pas une application injective.
   • $\boxed{\text{1pt}}$ On par définition $\mathrm{Im}(f) = \{f(\vec{u}), \vec{u} \in \mathbb{R}^2\}$. Soit $\vec{u} = (x, y)$ alors
   $f(\vec{u}) = f(x, y) = (x - y, -3x + 3y) = (x, -3x) + (-y, 3y) = x(1, -3) + y(-1, 3) = (x - y)(1, -3)$.
   Par conséquent, $\mathrm{Im}(f) = \{\lambda(1, -3), \lambda \in \mathbb{R}\} =< (1, -3) >$.
   Comme $< (1, -3) > \neq \mathbb{R}^2$ (un seul vecteur de $\mathbb{R}^2$ ne peut engendrer à lui seul $\mathbb{R}^2$), on en déduit que l'application f n'est pas surjective.

3. $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ D'après les résultats précédents,
   - une base du noyau de f est $\{(1,1)\}$,
   - une base de l'image de f est $\{(1,-3)\}$.
4. $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ Comme $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = 1 + 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, le théorème du rang est bien vérifié.

Exercice 4 *Correction* : $\boxed{4\text{pts}}$

1. $\boxed{1\text{pt}}$ Soient $M_{f,\mathcal{B}}$ et $M_{g,\mathcal{B}}$ les matrices respectives de f et g dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$. On a alors :

$$M_{f,\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{array} \quad \text{et} \quad M_{g,\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(\vec{e_1}) & g(\vec{e_2}) & g(\vec{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{array} .$$

2. - $\boxed{1\text{pt}}$ $f \circ g$ s'obtient en multipliant, dans cet ordre, $M_{f,\mathcal{B}}$ par $M_{g,\mathcal{B}}$. Comme
   $$M_{f,\mathcal{B}} \times M_{g,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$
   on en déduit que $f \circ g(x,y,z) = (-5y+z, -3y+z, 3y-z)$.
   - $\boxed{1\text{pt}}$ $g \circ f$ s'obtient en multipliant, dans cet ordre, $M_{g,\mathcal{B}}$ par $M_{f,\mathcal{B}}$. Comme
   $$M_{g,\mathcal{B}} \times M_{f,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix},$$
   on en déduit que $g \circ f(x,y,z) = (z, z, 2x-2y-4z)$.
3. - $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ Comme $M_{f,\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, on a nécessairement $\mathrm{rg}(M_{f,\mathcal{B}}) \leq 3$. On remarque dans un premier temps que $M_{f,\mathcal{B}}$ n'est pas inversible car sa 2ème ligne est l'opposé de la 3ème. Par conséquent, $\mathrm{rg}(M_{f,\mathcal{B}}) \neq 3$. Ensuite, on peut extraire facilement de $M_{f,\mathcal{B}}$ une sous-matrice de taille 2, par exemple $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, qui soit inversible. Cela permet d'affirmer que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M_{f,\mathcal{B}}) = 2$.
   - $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ Comme $M_{g,\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, on a nécessairement $\mathrm{rg}(M_{f,\mathcal{B}}) \leq 3$. Puisque $\det(M_{f,\mathcal{B}}) = -2 \neq 0$, on conclut rapidement que $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(M_{g,\mathcal{B}}) = 3$.

Exercice 5 *Correction* : $\boxed{6\text{pts}}$

1. $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ La matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$M_{f,\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & f(\vec{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 17 & -28 & 4 \\ 12 & -20 & 3 \\ 16 & -28 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{array} .$$

On peut montrer que $\det(M_{f,\mathcal{B}}) = 0$ ce qui signifie que $M_{f,\mathcal{B}}$ est non-inversible.

2. $\boxed{1{,}5\text{pt}}$ On a par définition $\ker(f) = \{\vec{u}, f(\vec{u}) = \vec{0}\}$. Soit $\vec{u} = (x,y,z) \in \ker(f)$ alors

$$f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow f(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow (17x - 28y + 4z, 12x - 20y + 3z, 16x - 28y + 5z) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 17x - 28y + 4z = 0 \\ 12x - 20y + 3z = 0 \\ 16x - 28y + 5z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -28y + 4z + 17x = 0 & (L_1) \\ -20y + 3z + 12x = 0 & (L_2) \leftarrow 7(L_2) - 5(L_1) \\ -28y + 5z + 16x = 0 & (L_3) \leftarrow (L_2) - (L_1) \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -28y + 4z + 17x = 0 \\ z - x = 0 \\ z - x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = \frac{3}{4}z \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right. .$$

Donc $\vec{u} \in \ker(f) \Leftrightarrow \vec{u} = (z, \frac{3}{4}z, z) = z(1, \frac{3}{4}, 1)$. Ainsi, $\ker(f) = \{\lambda(4,3,4), \lambda \in \mathbb{R}\} =< (4,3,4) >$ et une base du noyau de f est $\mathcal{B}_1 = \{(4,3,4)\}$.

3. $\boxed{\text{2pts}}$ Montrons que $F = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } f(\vec{v}) = \vec{v}\}$ est un espace vectoriel, ou encore que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Remarquons dans un premier temps que

$$f(\vec{v}) = \vec{v} \Leftrightarrow M_{f,\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 17x - 28y + 4z \\ 12x - 20y + 3z \\ 16x - 28y + 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x - 28y + 4z = 0 \\ 12x - 21y + 3z = 0 \\ 16x - 28y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x - 28y + 4z = 0 & (L_1) \\ 12x - 21y + 3z = 0 & (L_2) \leftarrow 4(L_2) - 3(L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x - 28y + 4z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z = -4x + 7y \end{cases}$$

Par conséquent, $(x, y, z) \in F \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, 0, -4x) + (0, y, 7y) = x(1, 0, -4) + y(0, 1, 7)$.
On est donc ramené à montrer que si deux vecteurs $\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ sont engendrés par $(1, 0, -4)$ et $(0, 1, 7)$, une combinaison linéaire de ces deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v_2}$ l'est aussi. Soient donc $\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2) \in F$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a dans ce cas

$$\begin{aligned} \lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} &= \lambda_1(x_1(1, 0, -4) + y_1(0, 1, 7)) + \lambda_2(x_2(1, 0, -4) + y_2(0, 1, 7)) \\ &= \underbrace{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)}_{\alpha_1}(1, 0, -4) + \underbrace{(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)}_{\alpha_2}(0, 1, 7), \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} \in F$ puisque ce vecteur s'écrit comme combinaison linéaire de $(1, 0, -4)$ et $(0, 1, 7)$. F est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et de ce fait un espace vectoriel.
Une base de F est $\mathcal{B}_2 = \{(1, 0, -4), (0, 1, 7)\}$.

4. $\boxed{\text{1pt}}$ Remarquons que les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ et ceux de $\mathcal{B}_2$ sont linéairement indépendants. En effet, on a $|\vec{f_1}\ \vec{f_2}\ \vec{f_3}| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 20$. Cette propriété permet d'affirmer que la famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. On a donc prouvé que tout vecteur de l'espace $\mathbb{R}^3$ se décompose de façon unique en une somme de vecteurs de $\ker(f)$ et de F.

5. $\boxed{\text{1pt}}$ On utilise la matrice de passage P de la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ à la base $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ qui est définie par $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{f_1} & \vec{f_2} & \vec{f_3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{array}$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est alors égale à

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -1 \\ 17 & -28 & 4 \\ 12 & -20 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & -28 & 4 \\ 12 & -20 & 3 \\ 16 & -28 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{f_1}) & f(\vec{f_2}) & f(\vec{f_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{f_1} \\ \vec{f_2} \\ \vec{f_3} \end{array}.$$