**LICENCE 2 SEG** **Pôle Lamartine - ULCO**

**MATHÉMATIQUES 2** Juin 2011 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 2

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits

(Les cinq exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

**Exercice 1** *(5 points)*

Rappeler les définitions des expressions suivantes :

1. $\mathcal{B}$ est une famille libre,
2. $\mathcal{B}$ est une famille génératrice,
3. $f : E \to F$ est une application injective,
4. $f : E \to F$ est une application surjective,
5. $f : E \to F$ est une application linéaire.

**Exercice 2** *(4 points)*

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Comparer $AB$ et $BA$.
2. Quelles lignes et colonnes de $A$ et $B$ faut-il multiplier pour obtenir
   (a) la première ligne du produit $AB$ ?
   (b) la troisième colonne du produit $BA$ ?
3. Calculer le produit matriciel $BI_2$. En déduire $B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. Calculer $B\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et enfin $B\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

**Exercice 3** *(4 points)*

On considére le visage circulaire de la figure ci-dessous.

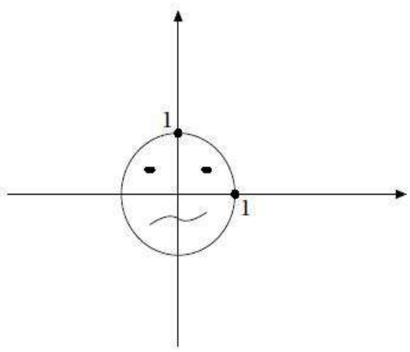


FIGURE 1 – Le visage circulaire en question

Pour chacune des matrices $A$ qui suivent, faites un dessin qui indique l'effet de l'application linéaire $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ sur ce visage.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(*Remarque* : Il suffit pour répondre à la questions de considérer des vecteurs dans le plan et d'observer l'action de la matrice sur ces derniers - dans la mesure où vous savez multiplier une matrice par un vecteur. Par exemple, $A_1$ transforme le vecteur $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{j}$ et $\vec{j}$ en $-\vec{i}$, on en déduit alors l'action de la matrice sur le visage. . . )

**Exercice 4** *(2 points)*

Imaginons que vous soyez un espion qui observe un bateau et que vous écoutiez les messages émis par ce dernier. Vous collectez les données suivantes :

- lorsque leur position est $\begin{pmatrix} 5 \\ 42 \end{pmatrix}$, ils envoient $\begin{pmatrix} 89 \\ 52 \end{pmatrix}$ ;
- lorsque leur position est $\begin{pmatrix} 6 \\ 41 \end{pmatrix}$, ils envoient $\begin{pmatrix} 88 \\ 53 \end{pmatrix}$.

Peut-on « casser » le code du bateau, c'est-à-dire trouver la matrice de codage, compatible avec les données précédentes, en supposant bien-sûr que le code soit linéaire ?

(*Remarque* : On cherche donc une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $A \times \text{position} = \text{données}$)

**Exercice 5** *(5 points)*

Dans le centre de Genève, certains parcmètres acceptent des pièces de 2 euros et 5 euros.

1. Un officier chargé du stationnement récupère 51 pièces pour une valeur totale de 144 euros. Combien de pièces de chaque sorte y a-t-il ?
2. Déterminer la matrice $A$ qui transforme le vecteur $\begin{pmatrix} \text{nombre de pièces de 2 euros} \\ \text{nombre de pièce de 5 euros} \end{pmatrix}$ en le vecteur $\begin{pmatrix} \text{valeur totale des pièces} \\ \text{nombre total de pièces} \end{pmatrix}$.
3. Est-ce que la matrice déterminée à la question précédente est inversible ? Utiliser le résultat obtenu à la question 1. pour vérifier la réponse.