LICENCE 2 SEG **Pôle Lamartine - ULCO**

MATHÉMATIQUES 2 Juin 2012 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 2

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits.

(Les deux exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1

1. (a) $f(\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}) = \dfrac{3+9}{2}I + \dfrac{7+(-3)}{2}J = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Montrons que f est une application linéaire. Soient $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

On a
$$\begin{aligned} f(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) &= f(\begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 & \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \end{pmatrix}) \\ &= \frac{(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) + (\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2)}{2} I + \frac{(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) + (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)}{2} J \\ &= \left(\frac{(\lambda_1 a_1 + \lambda_1 d_1)}{2} I + \frac{(\lambda_1 b_1 + \lambda_1 c_1)}{2} J\right) + \left(\frac{(\lambda_2 a_2 + \lambda_2 d_2)}{2} I + \frac{(\lambda_2 b_2 + \lambda_2 c_2)}{2} J\right) \\ &= \lambda_1 \left(\frac{(a_1 + d_1)}{2} I + \frac{(b_1 + c_1)}{2} J\right) + \lambda_2 \left(\frac{(a_2 + d_2)}{2} I + \frac{(b_2 + c_2)}{2} J\right) \\ &= \lambda_1 f(M_1) + \lambda_2 f(M_2) \end{aligned}$$

Comme $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b)
- $f(E_1) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1+0}{2}I + \dfrac{0+0}{2}J = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}E_1 + \dfrac{1}{2}E_4$.
- $f(E_2) = f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{0+0}{2}I + \dfrac{1+0}{2}J = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}E_2 + \dfrac{1}{2}E_3$.
- $f(E_3) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{0+0}{2}I + \dfrac{0+1}{2}J = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}E_3 + \dfrac{1}{2}E_3$.
- $f(E_4) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{0+1}{2}I + \dfrac{0+0}{2}J = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}E_1 + \dfrac{1}{2}E_4$.

On en déduit que la matrice de f relativement à la base B est $A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(E_1) & f(E_2) & f(E_3) & f(E_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array}$.

2. (a) On sait que $Ker(f) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(M) = 0\}$. On a
$$f(M) = 0 \Leftrightarrow \frac{a+d}{2}I + \frac{b+c}{2}J = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+d=0 \\ b+c=0 \end{array} \right. .$$
On en déduit que
$$f(M) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} d=-a \\ c=-b \end{array} \right. \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} = a(E_1 - E_4) + b(E_2 - E_3).$$
Donc $Ker(f) = Vect(E_1 - E_4, E_2 - E_3)$ et $\dim(Ker(f)) = 2$.

(b) On sait que $Im(f) = \{f(M) | M \in\}$. On a
$$f(M) = \frac{a+d}{2}I + \frac{b+c}{2}J.$$
On en déduit que
$$Im(f) = Vect(I, J).$$

3. $A^2 - A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0.$

4. • Supposons que $f(M) = M$. Alors $\dfrac{a+d}{2}I + \dfrac{b+c}{2}J = M$ ce qui implique que $M \in Vect(I, J) = Im(f)$.

- Soit maintenant $M \in Vect(I, j) = Im(f)$. Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $M = \alpha I + \beta J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Or $f(M) = \dfrac{\alpha+\alpha}{2} I + \dfrac{\beta+\beta}{2} J = \alpha I + \beta J$ donc $f(M) = M$.

5. Soit la famille $C = (E_1 - E_4, E_2 - E_3, I, J)$.
   (a) C est de dimension 4. Pour démontrer que C est une base, il suffit de montrer que C est une famille libre ou génératrice. Montrons que C est libre. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1(E_1 - E_4) + \alpha_2(E_2 - E_3) + \alpha_3 I + \alpha_4 J = 0$. Comme $I = E_1 + E_4$ et $J = E_2 + E_3$, on a

$$\begin{aligned} & \alpha_1(E_1 - E_4) + \alpha_2(E_2 - E_3) + \alpha_3(E_1 + E_4) + \alpha_4(E_2 + E_3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\alpha_1 + \alpha_3)E_1 + (\alpha_2 + \alpha_4)E_2 + (\alpha_4 - \alpha_2)E_3 + (\alpha_3 - \alpha_1) \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_1 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_2 + \alpha_4 & = & 0 \\ \alpha_4 - \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_3 - \alpha_1 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

   ce qui prouve que la famille C est libre. Finalement, C est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Comme
   - $f(E_1 - E_4) = f(E_1) - f(E_4) = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_4 - (\frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_4) = 0$,
   - $f(E_1 - E_4) = f(E_2) - f(E_3) = \frac{1}{2}E_2 + \frac{1}{2}E_3 - (\frac{1}{2}E_2 + \frac{1}{2}E_3) = 0$,
   - $f(I) = I$ d'après 4.,
   - $f(J) = J$ d'après 4.,

   la matrice D de f relativement à la base C est donnée par $D = diag(0, 0, 1, 1)$.

   (c) On cherche $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \alpha_1(E_3 - E_4) + \alpha_2(E_2 - E_3) + \alpha_3 I + \alpha_4 J.$$

   On sait que $f(M) = \alpha_3 I + \alpha_4 J = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, ceci implique que $\alpha_3 = 6$ et $\alpha_4 = 2$. Ensuite,

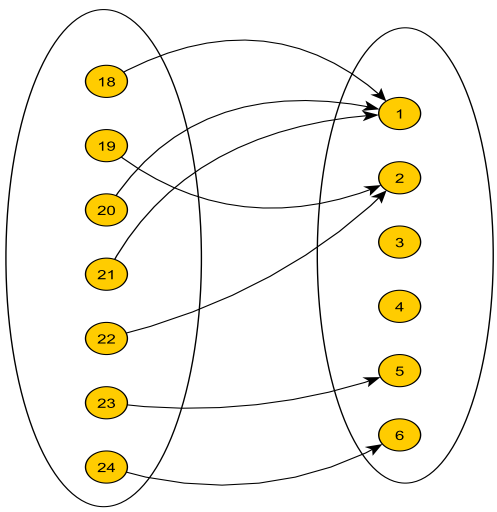
$$M - f(M) = \alpha_1(E_1 - E_4) + \alpha_2(E_2 - E_3) = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

   ce qui induit que $\alpha_1 = -3$ et $\alpha_2 = 5$. Finalement,

$$M = -3(E_1 - E_4) + 5(E_2 - E_3) + 6I + 2J.$$

Exercice 2

1. On a le diagramme suivant :



2. On a $f\{18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $Im(f) = \{1, 2, 5, 6\}$. $Im(f)$ correspond en fait aux chaînes effectivement visionnées par la personne, c'est-à-dire la première, la deuxième, la cinquième et la sixième chaînes.

3. - $f^{-1}(1) = \{18, 20, 21\}$,
   - $f^{-1}(2) = \{19, 22\}$,

- $f^{-1}(4) = \emptyset$.

  Ces ensembles correspondent dans la réalité aux jours auxquels ont été visionnées respectivement la première, la deuxième et la quatrième chaînes.

4. – La fonction f n'est pas surjective car il n'existe pas d'antécédent pour chacune des images de f (par exemple, $f^{-1}(4) = \emptyset$).
   – Le résultat peut être interprété de la manière suivante : toutes les chaînes n'ont pas été regardées durant la semaine du 18 au 24 septembre.
   – Il est effectivement possible en faisant un autre choix de chaînes chaque jour d'avoir une fonction surjective. Par exemple, il suffit le 18 septembre de regarder la première chaîne, le 19 la deuxième,. . . , le 23 la sixième, le 24 une chaîne parmi les 6.
5. – La fonction n'est pas injective car pour chaque image spécifique, il n'existe pas un unique antécédent (par exemple, $f^{-1}(1) = \{18, 20, 21\}$).
   – Le résultat peut être interprété de la manière suivante : une même chaîne a été vue plusieurs jours.
   – En faisant n'importe quel autre choix de chaînes, on ne pourra jamais rendre la fonction injective car il y aura nécessairement une chaîne regardée au moins deux fois (il y a plus de jours que de chaînes).
6. – La fonction n'est pas bijective puisqu'elle n'est pas injective.
   – Même en faisant un autre choix de chaînes chaque jour, on ne pourra pas rendre la fonction bijective puisqu'elle ne pourra jamais être injective.