LICENCE 2 SEG **Pôle Lamartine - ULCO**

MATHÉMATIQUES 2 Juin 2012 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 2

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits.

(Les deux exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 On considère les matrices :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on rappelle que la famille $B = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1 + E_4$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_2 + E_3$.
Soit f l'application qui à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe la matrice $f(M) = \frac{a+d}{2}I + \frac{b+c}{2}J$.

1. (a) Vérifier que $f(\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.
   Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$, $f(E_4)$ en fonction de E_1, E_2, E_3, E_4.
   En déduire que la matrice A de f relativement à la base B est $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
2. (a) Montrer que $Ker(f) = Vect(E_1 - E_4, E_2 - E_3)$. Déterminer la dimension de $Ker(f)$.
   (b) Montrer que $Im(f) = Vect(I, J)$.
3. Calculer $A^2 - A$.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Justifier que si $f(M) = M$ alors $M \in Im(f)$.
   Réciproquement, montrer que si $M \in Vect(I, J)$ alors $f(M) = M$.
5. On considère la famille $C = (E_1 - E_4, E_2 - E_3, I, J)$.
   (a) Justifier que C est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer la matrice D de f relativement à la base C.
   (c) On considère $M = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ de M dans la base C.

Exercice 2 Nous allons modéliser par une fonction les chaînes de télévision que j'ai regardées pendant la semaine du 18 au 24 septembre. Chaque soir, j'ai regardé un film ou une émission proposée par une de ces chaînes. Appelons les chaînes 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Les 18, 20, 21 septembre, j'ai regardé la première chaîne. Les 19 et 22 septembre, j'ai regardé la deuxième chaîne. Le 23 septembre, j'ai suivi le programme de la cinquième chaîne et le 24 septembre celui de la sixième.
Posons f la fonction de l'ensemble $\{18, 19, \dots, 24\}$ à $\{1, 2, \dots, 6\}$ qui associe à un jour la chaîne regardée.

1. Représenter cette fonction (avec des ensembles et des flèches).
2. Quelle est l'image $Im(f)$ de f ? À quoi correspond cet ensemble en termes de chaîne de télévision ?
3. Décrire les ensembles d'antécédents $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}(4)$ de 1, 2 et 4. À quoi correspondent ces ensembles dans la réalité ?
4. Cette fonction f est-elle surjective ? Quelle interprétation peut-on donner du résultat ? Est-il possible, en faisant un autre choix de chaînes chaque jour, d'avoir une fonction surjective ?
5. Cette fonction f est-elle injective ? Quelle interprétation peut-on donner du résultat ? Est-il possible, en faisant un autre choix de chaînes chaque jour, d'avoir une fonction injective ?
6. Cette fonction f est-elle bijective ? Est-il possible, en faisant un autre choix de chaînes chaque jour, d'avoir une fonction bijective ?