

Durée de l'épreuve : 2h00

Documents interdits - Calculatrice autorisée.

(Les cinq exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 Un nombre de trois chiffres a , b et c peut s'écrire : $abc = a \times 100 + b \times 10 + c$. Par exemple, $358 = 3 \times 100 + 5 \times 10 + 8$.

Déterminer un nombre de trois chiffres sachant que :

- La somme de ses chiffres est égale à 18.
- Si l'on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines, le nombre augmente de 180.
- Si l'on permute le chiffre des unités et celui des centaines, le nombre diminue de 495.

Exercice 2 Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 3y - z = -4 \\ 4x + y + 2z = 7 \end{cases}$$

1. à l'aide de la méthode du pivot de Gauss,
2. à l'aide de la méthode de Cramer,
3. en inversant la matrice du système par la méthode des cofacteurs.

Exercice 3 Déterminer le rang des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -13 \\ 3 & -3 & 15 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. Déterminer trois nombres entiers a , b et c tels que : $A^3 + aA^2 + bA + cI = 0$.
3. En déduire que A est inversible, et écrire son inverse A^{-1} .

Exercice 5 Soient A et B deux matrices carrées de même ordre vérifiant les deux conditions : $AB \neq 0$ et $BA = 0$. Soit également $C = AB$.

1. Calculer C^2 .
2. Est-ce que A et B sont inversibles ?
3. Si on fixe $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, trouver toutes les matrices B vérifiant les deux conditions : $AB \neq 0$, et $BA = 0$.