

**MATHÉMATIQUES**

Janvier 2013 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 2

Durée de l'épreuve : 2h00

Documents interdits - Calculatrice autorisée.

(Les cinq exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

**Exercice 1** Un nombre de trois chiffres  $a$ ,  $b$  et  $c$  peut s'écrire :  $abc = a \times 100 + b \times 10 + c$ . Par exemple,  $358 = 3 \times 100 + 5 \times 10 + 8$ .

Déterminer un nombre de trois chiffres sachant que :

- La somme de ses chiffres est égale à 18.
- Si l'on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines, le nombre augmente de 180.
- Si l'on permute le chiffre des unités et celui des centaines, le nombre diminue de 495.

**Exercice 2** Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 3y - z = -4 \\ 4x + y + 2z = 7 \end{cases}$$

1. à l'aide de la méthode du pivot de Gauss,
2. à l'aide de la méthode de Cramer,
3. en inversant la matrice du système par la méthode des cofacteurs.

**Exercice 3** Déterminer le rang des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -13 \\ 3 & -3 & 15 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4** On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .
2. Déterminer trois nombres entiers  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :  $A^3 + aA^2 + bA + cI = 0$ .
3. En déduire que  $A$  est inversible, et écrire son inverse  $A^{-1}$ .

**Exercice 5** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de même ordre vérifiant les deux conditions :  $AB \neq 0$  et  $BA = 0$ . Soit également  $C = AB$ .

1. Calculer  $C^2$ .
2. Est-ce que  $A$  et  $B$  sont inversibles ?
3. Si on fixe  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ , trouver toutes les matrices  $B$  vérifiant les deux conditions :  $AB \neq 0$ , et  $BA = 0$ .