LICENCE 2 SEG **Pôle Lamartine - ULCO**

MATHÉMATIQUES 2 Juin 2013 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 2

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits.

(Les quatre exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 (8 points)

1. $\boxed{\text{1pt}}$ $\vec{v}_3 = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2 & = & \alpha + 4\beta \\ -1 & = & \alpha + \beta \\ 4 & = & 4\beta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -2 \\ \beta = 1 \end{array} \right.$.
   La famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est donc liée (et non libre) car il existe une combinaison linéaire entre ces 3 vecteurs.
2. $\boxed{\text{0,5pt}}$ Une base étant une famille libre et génératrice, la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.
3. $\boxed{\text{1pt}}$ On a $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$. On pouvait prévoir le résultat car les 3 vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sont liés et donc linéairement indépendants.
4. (a) $\boxed{\text{1pt}}$ Déterminons le rang du système à l'aide du pivot de Gauss :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcll} x + 4y + 2z & = & 0 & (L_1) \\ x + y - z & = & 0 & (L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1) \\ 4y + 4z & = & 0 & (L_3) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x + 4y + 2z & = & 0 & (L_1) \\ -3y - 3z & = & 0 & (L_2) \\ 4y + 4z & = & 0 & (L_3) \leftarrow 3(L_3) + 4(L_2) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x + 4y + 2z & = & 0 & (L_1) \leftarrow 3(L_1) + 4(L_2) \\ -3y - 3z & = & 0 & (L_2) \\ 0 & = & 0 & (L_3) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 6z & = & 0 \\ -3y - 3z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2z \\ y & = & -z \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. (S')$$

   On en déduit que le rang du système est égal à 2. (S) n'admet donc pas une unique solution. Le système échelonné (S') étant constitué d'équations compatibles, le système (S) admet une infinité de solutions.

   (b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ De (S') on déduit l'ensemble des solutions de (S) qui s'écrit $\mathcal{S} = \{(x, y, z) = z(2, -1, 1), z \in \mathbb{R}\}$.
5. (a) $\boxed{\text{1pt}}$ $AX = 2X \Leftrightarrow (A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + 4y + 2z & = & 0 \\ x + y - z & = & 0 \\ 4y + 4z & = & 0 \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \quad X = z \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R}.$$

   (b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ λX est moins coûteux en termes de calculs (3 multiplications) que AX (6 additions et 9 multiplications).

   (c) $\boxed{\text{1pt}}$ A t-on $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$? Comme

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 20 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

   le vecteur $(2, -1, 4)$ est bien un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda = 5$.

   (d) $\boxed{\text{1,5pt}}$ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 60 = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \Leftrightarrow \lambda_3 = \dfrac{50}{2 \times 5} = 5$. On a bien $tr(A) = 12 = 2 + 5 + 5$.

Exercice 2 (9 points)

1. • $\boxed{\text{2pts}}$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 0 + 2) - (2 + 0 - 1) = 2 \neq 0$ donc A est inversible.

   On obtient $A^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- $\boxed{\text{2pts}}$ $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (6+20+4) - (20-2-12) = 24 \neq 0$ donc B est inversible.

  On obtient $B^{-1} = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} 4 & 16 & 0 \\ -8 & -14 & 6 \\ -4 & -22 & 6 \end{pmatrix}^T = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} 4 & -8 & -4 \\ 16 & -14 & -22 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

- $\boxed{\text{2pts}}$ $|C| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-12+6+0) - (12+0-12) = -6 \neq 0$ donc C est inversible.

  On obtient $C^{-1} = \dfrac{1}{(-6)}\begin{pmatrix} -6 & -3 & -2 \\ 18 & 12 & -4 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -18 & -6 \\ 3 & -12 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) $\boxed{\text{1pt}}$ Comme $A^3 - 3A^2 + 2A - 2I = 0 \Leftrightarrow A(A^2 - 3A + 2I) = 2I \Leftrightarrow A\underbrace{[\frac{1}{2}(A^2 - 3A + 2I)]}_{\tilde{A}} = I$, on en déduit que A est inversible (car il existe une matrice $\tilde{A}$ telle que $A\tilde{A} = \tilde{A}A = I$) et que $\tilde{A} = A^{-1}$. On vérifie aisément que $\frac{1}{2}(A^2 - 3A + 2I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) $\boxed{\text{1pt}}$ Comme $B^3 - 6B^2 - 4B - 24I = 0 \Leftrightarrow B\underbrace{[\frac{1}{24}(B^2 - 6B - 4I)]}_{\tilde{B}} = I$, on en déduit que B est inversible (car il existe une matrice $\tilde{B}$ telle que $B\tilde{B} = \tilde{B}B = I$) et que $\tilde{B} = B^{-1}$. On vérifie aisément que $\frac{1}{24}(B^2 - 6B - 4I) = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 4 & -8 & -4 \\ 16 & -14 & -22 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

   (c) $\boxed{\text{1pt}}$ Enfin, comme $C^3 - 3C^2 + 6C + 6I = 0 \Leftrightarrow C\underbrace{[-\frac{1}{6}(C^2 - 3C + 6I)]}_{\tilde{C}} = I$, on en déduit que C est inversible (car il existe une matrice $\tilde{C}$ telle que $C\tilde{C} = \tilde{C}C = I$) et que $\tilde{C} = C^{-1}$. On vérifie aisément que $-\frac{1}{6}(C^2 - 3C + 6I) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -18 & -6 \\ 3 & -12 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (2 points)

$$D_i = O_i,\ \forall i \in \{1,2,3\} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - p_1 + p - 2 + p_3 &= -2 + p_1 \\ 10 + p_1 - 2p_2 + p_3 &= -2 + p_2 \\ 5 + p_1 + p_2 - p_3 &= -3 + 2p_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2p_1 + p_2 + p_3 &= -4 \\ p_1 - 3p_2 + p_3 &= -12 \\ p_1 + p_2 - 3p_3 &= -8 \end{cases}.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ la matrice du système précédent. Comme $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-18+1+1) - (-3-2-3) = -8 \neq 0$, le système admet une unique solution. Alors $A^{-1} = \dfrac{1}{(-8)}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}^T = -\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et

$$A\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ -8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ -8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -112 \\ -100 \\ -92 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ \frac{25}{2} \\ \frac{23}{2} \end{pmatrix}.$$

Il existe donc des valeurs de p_1, p_2, p_3 qui réalisent l'équilibre, i.e. $D_i = O_i$ pour tout $i \in \{1,2,3\}$.

Exercice 4 (5 points)

1. $\boxed{\text{0,5pt}}$ On a $M_f = \begin{array}{cc} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) \\ \end{array}$ $\begin{array}{c} \\ \end{array}$ $\left(\begin{array}{cc} 5 & -2 \\ 8 & -5 \end{array}\right)\begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{array}$.

2. - $\boxed{\text{0,5pt}}$ Comme $|\vec{v}_1\ \vec{v}_2| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$, la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ Comme $|\vec{v}_1\ \vec{v}_3| = \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ ne forme pas une base de $\mathbb{R}^2$.

3. $\boxed{\text{1pt}}$ La matrice de passage de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ à la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est définie par : $P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{array} \end{array}$.

Par conséquent, la matrice de passage de la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est définie par

$$P^{-1} = \frac{1}{(-15)} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{15} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{array}.$$

On en déduit ainsi que la matrice $\tilde{M}_f$ de f dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est donnée par :

$$\tilde{M}_f = P^{-1} M_f = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 66 & -39 \\ -27 & 18 \end{pmatrix}.$$

4. On a
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $f(\vec{v}_1) = \tilde{M}_f \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 66 & -39 \\ -27 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix} = 15\vec{v}_1 - 6\vec{v}_2.$
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $f(\vec{v}_2) = \tilde{M}_f \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 66 & -39 \\ -27 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -15 \end{pmatrix} = 36\vec{v}_1 - 15\vec{v}_2.$

5. $\boxed{\text{0,5pt}}$ $f(\vec{v}_3) = \tilde{M}_f \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 66 & -39 \\ -27 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 12 \end{pmatrix} = -30\vec{v}_1 + 12\vec{v}_2.$

6. $\boxed{\text{0,5pt}}$ $f(\vec{v}_3) = M_f \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ -54 \end{pmatrix} = -36\vec{e}_1 - 54\vec{e}_2.$

7. $\boxed{\text{0,5pt}}$ Comme $\begin{vmatrix} 18 & 39 \\ 27 & 66 \end{vmatrix} = 135 \neq 0$, la famille $\{f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2)\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.