

Durée de l'épreuve : 2h00

Documents interdits - Calculatrice autorisée.

(Les cinq exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 3pts On doit résoudre le système

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} a+b+c = 18 & (L_1) \\ 100b+10a+c = 100a+10b+c+180 & (L_2) \\ 100c+10b+a = 100a+10b+c-495 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 18 & (L_1) \\ -90a+90b = 180 & (L_2) \leftarrow -\frac{1}{90}(L_2) \\ -99a+99c = 495 & (L_3) \leftarrow -\frac{1}{99}(L_3) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 18 & (L_1) \\ a-b = -2 & (L_2) \leftarrow (L_2) + (L_3) \\ a-c = 5 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 18 & (L_1) \\ 2a-b-c = 3 & (L_2) \leftarrow (L_2) + (L_1) \\ a-c = 5 & (L_3) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 18 & (L_1) \\ 3a = 21 & (L_2) \leftarrow \frac{1}{3}(L_2) \\ a-c = 5 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 18 & (L_1) \leftarrow (L_1) - (L_2) \\ a = 7 & (L_2) \\ a-c = 5 & (L_3) \leftarrow -(L_3) + (L_2) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} b+c = 11 & (L_1) \leftarrow (L_1) - (L_3) \\ a = 7 & (L_2) \\ c = 2 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 9 & (L_1) \leftarrow (L_2) \\ a = 7 & (L_2) \leftarrow (L_1) \\ c = 2 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 9 \\ c = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Le nombre recherché est 792.

Exercice 2 6pts Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice du système, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ son second membreet $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sa solution. Le système est de Cramer car $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, il admet donc une unique solution.

1. 2pts À l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 2x+y+z = 3 & (L_1) \\ x+3y-z = -4 & (L_2) \leftarrow 2(L_2) - (L_1) \\ 4x+y+2z = 7 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 2(L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z = 3 & (L_1) \\ 5y-3z = -11 & (L_2) \leftarrow (L_2) \\ -y = 1 & (L_3) \leftarrow -(L_2) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z = 3 & (L_1) \\ y = -1 & (L_2) \\ 5y-3z = -11 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 5(L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z = 3 & (L_1) \\ y = -1 & (L_2) \\ -3z = -6 & (L_3) \leftarrow -\frac{1}{2}(L_3) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z = 3 & (L_1) \leftarrow \frac{1}{2}((L_1) - (L_2) - (L_3)) \\ y = -1 & (L_2) \\ z = 2 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi la solution du système est $X = (1, -1, 2)$.

2. 2pts À l'aide de la méthode de Cramer :

On a

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{(-3)} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3}{(-3)} = -1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{(-3)} = 2.$$

3. 2pts En inversant la matrice du système par la méthode des cofacteurs.

On sait que l'inverse de A est donné par la formule $A^{-1} = \frac{\text{Com}(A)^T}{\det(A)} = \frac{1}{(-3)} \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 \\ -6 & 0 & 3 \\ -11 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } X = A^{-1}b = \frac{1}{(-3)} \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 \\ -6 & 0 & 3 \\ -11 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-3)} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

3pts

- 0,5pt $\text{rg}(A) = 2$ car A est carrée et $\det(A) = 4 \neq 0$,
- 0,5pt $\text{rg}(B) = 1$ car A est carrée et $\det(B) = 0$,
- 1pt $\text{rg}(C) = 2$ car $(L_3) = 3(L_1)$.
- 1pt $\text{rg}(D) = 3$ car $(C_3) = (C_2) + (C_4)$.

Exercice 4

5pts

1. 0,5pt $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

0,5pt $A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 10 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$

2. 2pts On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 10 & 0 & -7 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2+2a+2b+c & 0 & -5-3a-b \\ 5+3a+b & 1+a+b+c & -4-a \\ 10+6a+2b & 0 & -7-a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que $a = -4$, $b = 7$ et $c = -4$ et par conséquent, $A^3 - 4A^2 + 7A - 4I = 0$.

3. 2pts $A^3 - 4A^2 + 7A - 4I = 0 \Leftrightarrow A(A^2 - 4A + 7I) = 4I \Leftrightarrow A \left[\frac{1}{4}(A^2 - 4A + 7I) \right] = I$. Comme il existe $B = \frac{1}{4}(A^2 - 4A + 7I)$ telle que $AB = I (= BA)$, on en déduit que A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 4A + 7I) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

4pts

1. 0,5pt $C^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = 0$ car $BA = 0$.
2. 0,5pt Supposons que A soit inversible alors A^{-1} existe et vérifie $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Par conséquent, $BA = 0 \Leftrightarrow BAA^{-1} = 0A^{-1} = 0 \Leftrightarrow BI = 0 \Leftrightarrow B = 0$. Or $AB \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}AB \neq A^{-1}0 = 0 \Leftrightarrow IB \neq 0 \Leftrightarrow B \neq 0$ et il y a donc une contradiction. Par conséquent A n'est pas inversible. On montre de même que B n'est pas inversible.

3. On pose $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Donc

• 1pt $AB \neq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 2b_{11} + 4b_{21} & 2b_{12} + 4b_{22} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{11} + 2b_{21} \neq 0 \\ b_{12} + 2b_{22} \neq 0 \\ 2b_{11} + 4b_{21} \neq 0 \\ 2b_{12} + 4b_{22} \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_{11} + 2b_{21} \neq 0 \\ b_{12} + 2b_{22} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{11} \neq -2b_{21} \\ b_{12} \neq -2b_{22} \end{cases}.$$

$$\bullet \quad \boxed{1\text{pt}} \quad BA = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} + 2b_{12} & 2b_{11} + 4b_{12} \\ b_{21} + 2b_{22} & 2b_{21} + 4b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{11} + 2b_{12} = 0 \\ 2b_{11} + 4b_{12} = 0 \\ b_{21} + 2b_{22} = 0 \\ 2b_{21} + 4b_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_{11} + 2b_{12} = 0 \\ b_{21} + 2b_{22} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{11} = -2b_{12} \\ b_{21} = -2b_{22} \end{cases}.$$

$\boxed{1\text{pt}}$ De ces dernières relations, on déduit que $B = \begin{pmatrix} -2b_{12} & b_{12} \\ -2b_{22} & b_{22} \end{pmatrix}$ avec la condition $b_{12} \neq -2b_{22}$ (la condition $b_{11} \neq -2b_{21}$ étant redondante). Cette matrice B est bien singulière.