Prépa 2 - ISCID-CO **ULCO**

Mathématiques Janvier 2014 - Contrôle Terminal - Session 2

Durée de l'épreuve : 2h00 Aucun document autorisé. Calculatrice autorisée

---

Exercice 1 *Correction* : $\boxed{\text{5pts}}$

1. $\boxed{\text{2pts}}$ D'après l'énoncé,
   – la fabrication d'un jouet J_1 nécessite 1 composant C_1 donc si on en fabrique x_1, on aura besoin de x_1 composants C_1,
   – la fabrication d'un jouet J_2 nécessite 1 composant C_1 donc si on en fabrique x_2, on aura besoin de x_2 composants C_1,
   – la fabrication d'un jouet J_3 nécessite 1 composant C_1 donc si on en fabrique x_3, on aura besoin de x_3 composants C_1.

   y_1 étant le nombre de composants C_1 nécessaires à la fabrication de x_1 jouets J_1, x_2 jouets J_2 et x_3 jouets J_3, on a $x_1 + x_2 + x_3 = y_1$. En traitant les données relatives aux composants C_2 et C_3, on récupère le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = y_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_3 \end{cases}$$

2. $\boxed{\text{3pts}}$ On pose donc $(y_1, y_2, y_3) = (1235, 4004, 2880)$ et on résout le système suivant avec la méthode du pivot de Gauss :

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1235 & (L_1) \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4004 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1) \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2880 & (L_3) \leftarrow (L_2) - 2(L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1235 & (L_1) \leftarrow (L_1) - (L_3) \\ x_2 + 3x_3 = 1534 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 3(L_3) \\ x_3 = 410 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 825 & (L_1) \leftarrow (L_1) - (L_2) \\ x_2 = 304 & (L_2) \\ x_3 = 410 & (L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 521 \\ x_2 = 304 \\ x_3 = 410 \end{cases}$$

   Ainsi, il faudra produire $(x_1, x_2, x_3) = (521, 304, 410)$ jouets J_1, J_2, J_3 respectivement pour provoquer l'épuisement total du stock de composants.

Exercice 2 *Correction* : $\boxed{\text{3pts}}$

1. $\boxed{\text{1pt}}$ On calcule

$$100b = 100 \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,25 \\ 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 25 \\ 15 \end{pmatrix}$$

   Le vecteur $100b$ fournit les divers coûts de production du produit B pour une valeur de 100€, soit 45€ de matériaux, 25€ de main-d'œuvre et 15€ de frais généraux.

2. $\boxed{\text{2pts}}$ Le vecteur $x_1 b$ donne les coûts de production de B pour une valeur de x_1 euros et $x_2 c$ donne les coûts de production de C pour une valeur de x_2 euros. Le vecteur

$$x_1 b + x_2 c = \begin{pmatrix} 0,45x_1 + 0,40x_2 \\ 0,25x_1 + 0,30x_2 \\ 0,15x_1 + 0,15x_2 \end{pmatrix}$$

   donne alors les coûts globaux (pour les deux produits).

Exercice 3 *Correction* : $\boxed{4\text{pts}}$

1. $\boxed{2\text{pts}}$ On pose $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \\ 2c = 0 \\ 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, les matrices X qui vérifient l'égalité initiale sont de la forme $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

2. $\boxed{2\text{pts}}$ On pose à nouveau $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

Par conséquent, l'unique matrice X qui vérifie l'égalité initiale est de la forme $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En l'occurence c'est la matrice inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 *Correction* : $\boxed{5\text{pts}}$

1. $\boxed{1\text{pt}}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

2. $\boxed{1\text{pt}}$ $A^2 = A + B \Leftrightarrow B = A^2 - A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

3. (a) $\boxed{1\text{pt}}$ On vérifie aisément que $AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = B$.

   (b) $\boxed{2\text{pts}}$ Montrons le résultat par récurrence :
   - Comme $A^0 = I = A + 0 \times B$, la relation est vraie au rang $n = 0$.
   - On suppose que la relation est vraie au rang n.
   - On vérifie que la relation est vraie au rang $n + 1$. Comme $A^{n+1} = A \times A^n = A \times (A + (n-1)B) = A^2 + (n-1)AB = A + B + (n-1)B = A + nB$, la relation est vraie au rang $n + 1$ et donc la relation est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 *Correction* : $\boxed{3\text{pts}}$

La relation de l'énoncé peut se réécrire :

$$A^2 + 3A - I_n = 0_n \Leftrightarrow A\underbrace{(A + 3I)}_{B} = I_n.$$

On sait que la relation $AB = I$ est équivalente au fait que A est inversible et que B est l'inverse de A. Par conséquent,

- $\boxed{1\text{pt}}$ A est inversible,
- $\boxed{2\text{pts}}$ $B = A + 3I_n$ est l'inverse de A. On note $A^{-1} = A + 3I_n$.