Prépa 2 - ISCID-CO **ULCO**

Mathématiques Janvier 2014 - Contrôle Terminal - Session 2

Durée de l'épreuve : 2h00 Aucun document autorisé. Calculatrice autorisée

---

Exercice 1 Dans l'atelier du Père Noël, tout le monde travaille fiévreusement. Et il n'est pas question de faire du gâchis. Tous les stocks de matières premières doivent être utilisés au mieux. Par exemple, pour fabriquer certains jouets électroniques, on utilise des composants C_1, C_2 et C_3 :

- La fabrication d'un jouet J_1 nécessite un composant C_1, deux composants C_2 et deux composants C_3.
- Celle d'un jouet J_2 nécessite un composant C_1, trois composants C_2 et deux composants C_3.
- Enfin pour un jouet J_3, il faut un composant C_1, cinq composants C_2 et trois composants C_3.

On note y_1, y_2 et y_3 les nombres de composants C_1, C_2 et C_3 nécessaires à la fabrication de x_1 jouets J_1, x_2 jouets J_2 et x_3 jouets J_3.

1. Exprimer y_1, y_2 et y_3 en fonction de x_1, x_2 et x_3. On précisera le raisonnement.
2. On suppose que l'atelier dispose d'un stock de 1235 composants C_1, 4004 composants C_2 et 2880 composants C_3. Calculer les quantités x_1, x_2 et x_3 de jouets J_1, J_2 et J_3 dont la fabrication provoquera l'épuisement total du stock.

Exercice 2 Une entreprise fabrique deux types de produits. Pour un certain produit B, si l'on ramène son prix à 1€, l'entreprise dépense 0,45€ en matériaux, 0,25€ en main-d'œuvre et 0,15€ en frais généraux. De même, si l'on ramène le prix dun produit C à 1€, l'entreprise dépense 0,40€ en matériaux, 0,30€ en main-d'œuvre et 0,15€ en frais généraux. Posons

$$b = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,25 \\ 0,15 \end{pmatrix} \text{ et } c = \begin{pmatrix} 0,40 \\ 0,30 \\ 0,15 \end{pmatrix}.$$

Alors, b et c représentent le "coût par euro de revenu" de chacun des deux produits.

1. Quelle interprétation économique peut-on donner au vecteur $100b$?
2. Supposons que l'entreprise veuille fabriquer le produit B pour une valeur de x_1 euros et le produit C pour une valeur de x_2 euros. Déterminer un vecteur donnant les divers coûts que l'entreprise devra supporter (pour les matériaux, la main-d'œuvre et les frais généraux).

Exercice 3 Déterminer toutes les matrices X de l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant :

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. Déterminer la matrice B telle que : $A^2 = A + B$.
3. (a) Démontrer que : $AB = B$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = A + (n-1)B$.

Exercice 5 On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^2 + 3A - I_n = 0_n$.
Démontrer que la matrice A est inversible et déterminer sa matrice inverse A^{-1}.