ISCID - PRÉPA 2ème année

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES À L'ÉCONOMIE ET À LA GESTION 2

Université du Littoral - Côte d'Opale

Laurent SMOCH

Septembre 2012

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville
Université du Littoral, zone universitaire de la Mi-Voix, bâtiment H. Poincarré
50, rue F. Buisson, BP 699, F-62228 Calais cedex

Table des matières

Chapitre 1

Calcul matriciel

1.1 Les matrices

Définition 1.1.1

- *On appelle* ***matrice*** $m \times n$ *(ou d'ordre* $m \times n$*) à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *tout tableau de* m *lignes et* n *colonnes d'éléments de* $\mathbb{K}$*. L'ensemble des matrices* $m \times n$ *à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *est noté* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$*.*
- *Si* $m = n$ *on dit qu'on a une* ***matrice carrée****. L'ensemble des matrices carrées de taille* n *à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *est noté* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*.*
- *Une matrice* $m \times 1$ *est appelée* ***vecteur-colonne*** *et une matrice* $1 \times n$ *est appelée* ***vecteur-ligne****.*
- *On convient de noter* a_{ij} *l'élément de la matrice situé sur la* i*-ème ligne et* j*-ième colonne* $(1 \leq i \leq m$ *et* $1 \leq j \leq n)$*.*
- *Une matrice* A *est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

ou encore

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ ou } A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Nous travaillerons avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$.

Exemple 1.1.1 La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ est carrée et d'ordre 3.

Définition 1.1.2 - *Addition de matrices*
Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ *sont deux matrices* $m \times n$*, on définit l'addition des matrices par*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Exemple 1.1.2 *Soient les matrices* $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$*. On obtient*

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+6 & 4+1 & 2+9 \\ 1+2 & 3+0 & 5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 11 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.1.1 La somme de deux matrices de tailles différentes n'est pas définie.

Définition 1.1.3
- *La **matrice nulle**, notée $O_{m,n}$, est la matrice dont tous les éléments sont nuls.*
- *La **matrice opposée** d'une matrice A est notée $-A$. Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ alors $-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$.*

Propriété 1.1.1 *Si A, B et C sont des matrices de même ordre, alors nous avons*
- $A + B = B + A$ *(commutativité),*
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(associativité).*

Exemple 1.1.3 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. On a alors
- $A + B = \begin{pmatrix} 1+6 & -1-5 \\ 3+2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $B + A = \begin{pmatrix} 6+1 & -5-1 \\ 2+3 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.
- $A + B = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $(A + B) + C = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

  $B + C = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $A + (B + C) = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Définition 1.1.4
- *On appelle **matrice diagonale** toute matrice carrée $D = (d_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ telle que $i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0$. Si on note $d_i = d_{ii}$, une matrice diagonale est de la forme*

$$D_n = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

  On la note $Diag(d_1, d_2, \dots, d_n)$.
- *La **matrice identité** d'ordre n, notée I_n, est la matrice diagonale $Diag(1, 1, \dots, 1)$.*

Définition 1.1.5 *On dit qu'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ est **triangulaire supérieure** (resp. **inférieure**) si $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ (resp. si $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$).*

Remarque 1.1.2 Une matrice triangulaire supérieure et inférieure est une matrice diagonale.

Définition 1.1.6 - *Produit d'une matrice par un scalaire*
Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ est une matrice $m \times n$ et si $\alpha \in \mathbb{K}$, on définit le produit d'une matrice par un scalaire par

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

Exemple 1.1.4 Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on obtient

$$C = \alpha A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times 3 & \frac{1}{2} \times 4 & \frac{1}{2} \times 2 \\ \frac{1}{2} \times 1 & \frac{1}{2} \times 3 & \frac{1}{2} \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Propriété 1.1.2 *Soient A et B deux matrices de même ordre et $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire, on a*

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \text{ (distributivité).}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

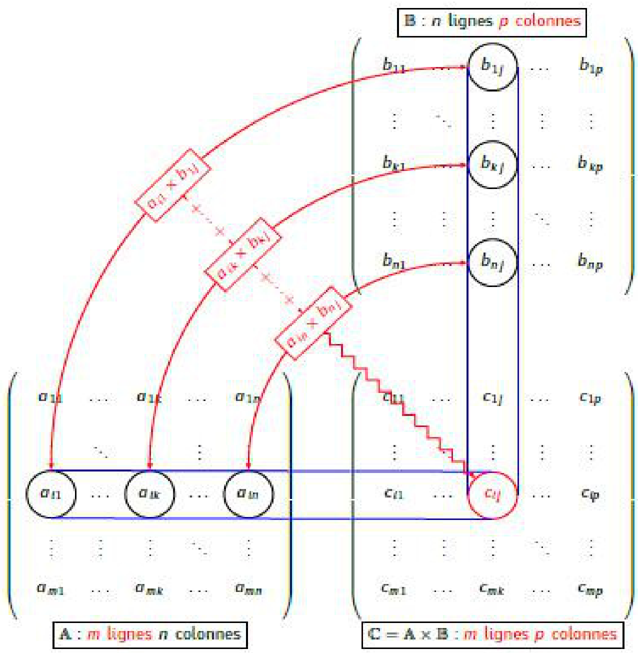
1. Trouver une matrice C telle que $A - 2B - C = O$.
2. Trouver une matrice D telle que $A + B + C - 4D = O$.

Définition 1.1.7 - *Produit de matrices*
Si $A = (a_{ik})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le k \le p}}$ est une matrice $m \times p$ et si $B = (b_{kj})_{\substack{1 \le k \le p \\ 1 \le j \le n}}$ est une matrice $p \times n$, on définit le ***produit des matrices*** *par*

$$A \times B = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

qui est une matrice $m \times n$.

On procède de la manière suivante pour multiplier deux matrices :



Exemple 1.1.5 Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est d'ordre 2×3, la matrice B est d'ordre 3×3 donc la matrice $A \times B$ est d'ordre 2×3.
- On a
$A \times B = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 3 \times 0 + 0 \times 0 & 1 \times 2 + 3 \times 2 + 0 \times (-1) & 1 \times 0 + 3 \times 3 + 0 \times (-2) \\ (-1) \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times 0 & (-1) \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times (-1) & (-1) \times 0 + 1 \times 3 + 2 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 Effectuer les multiplications suivantes

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,
2. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$,
3. $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 Calculer - lorsque cela est possible - les produits des matrices A et B dans les cas suivants.

1. $A = B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,
3. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 Une usine fabrique deux produits, A et B. Chaque produit contient quatre matières différentes W, X, Y, Z. La fabrication de chaque unité de chaque matière nécéssite trois forme d'énergie, électricité, gaz, pétrole. Les deux tableaux suivants présentent les nombres d'unités nécessaires d'énergie pour produire une unité de chaque matière, les quantités de matières nécessaires pour produire une unité de chaque produit A et B. Utiliser la multiplication matricielle pour exprimer les quantités d'énergie nécessaires à la production d'une unité de chaque produit.

	W	X	Y	Z
A	2	3	1	1
B	4	2	0	1

	Electricité	Pétrole	Gaz
W	5	3	6
X	1	0	1
Y	0	4	0
Z	3	0	4

Exercice 5 Même chose avec trois produits finaux A, B, C et trois matières intermédiaires X,Y,Z. Les données étant présentées dans les tableaux suivants.

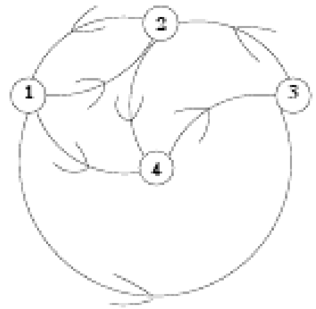
	A	B	C
X	2	3	1
Y	0	2	0
Z	1	2	1

	Electricité	Pétrole	Gaz
X	5	2	1
Y	0	2	1
Z	0	2	2

Exercice 6 Écrire sous forme matricielle le sytème d'équations linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} 2x & +3y & -3z & +2t & = & 5 \\ x & -3y & -z & +t & = & -1 \\ 2x & +y & +z & -t & = & 2 \end{array} \right.$$

Exercice 7 Grâce au calcul matriciel (et à la calculatrice) donner le nombre de chemins de longueur 7 allant de 1 à 3 dans le graphe de la page suivante. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 5 en tout ?



Propriété 1.1.3 *Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors*
- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ *(associativité),*
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ *(distributivité).*
- *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $A \times I_n = I_n \times A = A$.*

Remarque 1.1.3 Attention, $\boxed{A \times B \neq B \times A}$ en général.

Prenons le cas général avec A d'ordre $m \times p$ et B d'ordre $p \times n$. Le produit $A \times B$ est défini, c'est une matrice d'ordre $m \times n$. Qu'en est-il du produit $B \times A$? Il faut distinguer trois cas :
- si $m \neq n$ le produit $B \times A$ n'est pas défini ;
- si $m = n$ mais $p \neq n$, le produit $A \times B$ est défini et c'est une matrice d'ordre $m \times n$ tandis que le produit $B \times A$ est défini mais c'est une matrice d'ordre $p \times p$ donc $A \times B \neq B \times A$;
- si $m = n = p$, A et B sont deux matrices carrées d'ordre m. Les produits $A \times B$ et $B \times A$ sont aussi carrés et d'ordre m mais là encore, en général, $A \times B \neq B \times A$.

Exemple 1.1.6 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient $A \times B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 18 & -15 \end{pmatrix}$ et $B \times A = \begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 On dit que deux matrices A et B commutent si $A \times B = B \times A$. Trouver toutes les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Pour i, j entiers compris entre 1 et n, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) (ligne i et colonne j) qui vaut 1. Pour toute matrice $A = (aij)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note
- pour tout entier i compris entre 1 et n : $L_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ sa ligne numéro i (c'est une matrice à une ligne et n colonnes) et
- pour tout entier j compris entre 1 et n : $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ sa colonne numéro j (c'est une matrice à n lignes et une colonne).

On pourra écrire $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_n \end{pmatrix}$.

Définition 1.1.8 *On appelle **matrice de transvection** toute matrice de la forme :*

$$T_{ij}(\lambda) = I_n + E_{ij}$$

avec $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ est donc une matrice triangulaire dont tous les termes diagonaux valent 1 et de termes hors de la diagonale tous nuls sauf celui d'indice (i,j) (i. e. en ligne i et colonne j) qui vaut λ.

Définition 1.1.9 *On appelle **matrice de dilatation** toute matrice de la forme :*

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii},$$

avec $1 \leq i \neq j \leq n$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}^\star$.

Une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ est donc diagonale de termes diagonaux tous égaux à 1 sauf le numéro i qui vaut λ.

Théorème 1.1.1

- *la multiplication à gauche par une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier la ligne i par λ,*
- *la multiplication à droite par une matrice de dilatation $D_j(\lambda)$ a pour effet de multiplier la colonne j par λ,*
- *la multiplication à gauche par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$,*
- *la multiplication à droite par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la colonne C_j par $C_j + \lambda C_i$.*

Exercice 9 Soit A une matrice 3×3. Écrire sous forme matricielle l'opération qui consiste à ajouter la première colonne multipliée par 3 à la troisième colonne.

Définition 1.1.10 - *Matrice transposée*
Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ *est une matrice de format $m \times n$, on définit la **matrice transposée** de A, notée A^T, par* $A = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$.

C'est donc une matrice $n \times m$ obtenue en échangeant lignes et colonnes de la matrice initiale.

Exemple 1.1.7 Soit la matrice A d'ordre 2×3 suivante $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Sa transposée est la matrice A^T d'ordre 3×2 suivante $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Propriété 1.1.4

- $(A^T)^T = A$ *si* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ *si* $\alpha \in \mathbb{K}$ *et* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
- $(A+B)^T = A^T + B^T$ *si* $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
- $(A \times B)^T = B^T \times A^T$ *si* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 10 Vrai-Faux 1.
Soient A et B deux matrices. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si le produit AB est défini, alors le produit BA est défini.
2. Si la somme $A + B$ est définie, alors le produit AB est défini.
3. Si le produit AB est défini, alors le produit $B^T A^T$ est défini.
4. Si la somme $A + B$ est définie, alors le produit AB^T est défini.

5. Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme $A+B$ est définie.
6. Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme $A+B^T$ est définie.
7. Si les produits AB et B^TA sont définis, alors la somme $A+A^T$ est définie.
8. Si les produits AB et B^TA sont définis, alors la somme $A+B^T$ est définie.
9. Si le produit AB est défini, alors la somme AA^T+BB^T est définie.
10. Si le produit AB est défini, alors la somme A^TA+BB^T est définie.

Définition 1.1.11 - *Matrice symétrique, matrice antisymétrique*
- *Une matrice A est dite **symétrique** si $A^T = A$.*
- *Une matrice A est dite **antisymétrique** si $A^T = -A$.*

Exemple 1.1.8
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 \\ 5 & 4 & 0 \\ -9 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique.
- $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -9 \\ -5 & 0 & 7 \\ 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique.

Définition 1.1.12 - *Matrice inversible, matrice singulière*
- *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** ou **régulière** si elle est symétrisable pour le produit matriciel, autrement dit s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que*
$$A \times B = B \times A = I_n.$$
- *L'**inverse**, s'il existe, d'une matrice A est noté A^{-1}.*
- *Une matrice non régulière est dite **singulière**.*

Exercice 11 Calculer a, b, c, d tels que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$.

Exercice 12 Vérifier que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 & +x_2 & = & y_1 \\ x_1 & -x_2 & = & y_2 \end{cases}$$

Exprimer y_1 et y_2 en fonction de x_1 et x_2. En déduire l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant les opérations sur les lignes. Recommencer avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 Considérons les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier qu'on a $B = A + 4I_3$.

2. Trouver une formule liant B et B^2.
3. Trouver une relation entre A, A^2 et I_3.
4. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 16 Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour un entier n quelconque. Faire la même chose avec le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ à la place du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Écrire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire des deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. En déduire $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis l'expression de A^n.

Proposition 1.1.1 *Soient A et B deux matrices inversibles, alors*
- *A^{-1} l'est aussi et $(A^{-1})^{-1} = A$,*
- *A^T l'est aussi et $(A^T)^{-1}$,*
- *$A \times B$ l'est aussi et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.*

Définition 1.1.13 *Deux matrices A et B de même taille $m \times n$ sont dites équivalentes si et seulement s'il existe deux matrices inversibles P et Q (de tailles respectives $n \times n$ et $m \times m$) telles que : $A = QBP^{-1}$.*

Définition 1.1.14 *Deux matrices carrées A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que : $A = PBP^{-1}$.*

Proposition 1.1.2 *Si deux matrices sont semblables, alors elles sont équivalentes.*

Exercice 17 Vrai-Faux 2.
Soit A une matrice carrée. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si A est inversible, alors $AA^T = A^T A$.
2. Si A est inversible, alors AA^T est inversible.
3. Si A est inversible, alors $A + A^T$ est inversible.
4. Si A est inversible, alors A est équivalente à la matrice identité.
5. Si A est inversible, alors A est semblable à la matrice identité.

Exercice 18 Vrai-Faux 3.
Soit A une matrice carrée. On dit que A est diagonale si tous ses coefficients d 'ordre (i, j) avec $i \neq j$, sont nuls. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si A est diagonale, alors A est inversible.
2. Si A est diagonale, alors A est symétrique.
3. Si A est diagonale et si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors A est inversible.
4. Si A est diagonale, alors A est semblable à la matrice identité.
5. Si A est diagonale, alors A est équivalente à la matrice identité.

Définition 1.1.15 - *Trace*
Si A est une matrice carrée d'ordre n, on définit la ***trace*** *de A comme la somme des éléments de la diagonale principale :*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exemple 1.1.9 La trace de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ est $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 + (-2) = 1$.

Propriété 1.1.5

- *Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors*
  - $tr(A^T) = tr(A)$,
  - $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.
- *Si A est une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times m$, alors $tr(A \times B) = tr(B \times A)$.*

Exercice 19 Pour quelle valeur de x la trace de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2x^3 & 4 & 1 \\ 0 & 3x^2 & 2 \\ 5 & 6 & -12x \end{pmatrix}$ est-elle minimale ? Et pour quelle valeur de x est-elle maximale ?

Exercice 20 On note $\mathrm{tr}(A)$ la trace de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $tr(AB) = tr(BA)$.
2. En déduire que deux matrices carrées semblables ont la même trace.
3. Soit A une matrice carrée non nulle. Montrer que les traces de AA^T et A^TA sont strictement positives.

1.2 Calcul pratique d'un déterminant

Définition 1.2.1 - *Déterminant d'une matrice d'ordre n*

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ une matrice carrée d'ordre n. Étant donné un couple (i, j) d'entiers, $1 \le i, j \le n$, on note A_{ij} la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A. On définit le ***déterminant*** *de A, et on le note $\det(A)$, par récurrence sur l'ordre de la matrice A :*

- *si $n = 1$: le déterminant de A est le nombre $\det(A) = a_{11}$,*
- *si $n > 1$: le déterminant de A est le nombre*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \text{ quelle que soit la ligne } i,\ 1 \le i \le n,$$

ou, de manière équivalente, le nombre

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \text{ quelle que soit la colonne } j,\ 1 \le j \le n.$$

Remarque 1.2.1 Pour retrouver les signes de ces deux formules, on peut remarquer que la distribution des signes $+$ et $-$ avec la formule $(-1)^{i+j}$ est donnée par :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Exemple 1.2.1 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ alors

$$\det(A_{11}) = a_{22},\ \det(A_{12}) = a_{21},\ \det(A_{21}) = a_{12},\ \det(A_{22}) = a_{11}$$

et on peut calculer $\det(A)$ par l'une des formules suivantes :

- $a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (développement suivant la ligne $i = 1$),
- $-a_{21}\det(A_{21}) + a_{22}\det(A_{22}) = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}$ (développement suivant la ligne $i = 2$),
- $a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ (développement suivant la colonne $j = 1$),
- $-a_{12}\det(A_{12}) + a_{22}\det(A_{22}) = -a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}$ (développement suivant la colonne $j = 2$).

Ces formules donnent bien le même résultat.

Remarque 1.2.2 Il convient d'utiliser cette définition après avoir fait apparaître sur une même rangée le plus possible de zéros sachant que

- si deux colonnes (resp. deux lignes) sont identiques ou proportionnelles, alors $\det(A) = 0$,
- si on échange deux colonnes (resp. deux lignes), alors le déterminant est changé en son opposé,
- on ne change pas un déterminant si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).

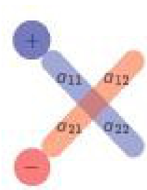
Exemple 1.2.2 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned}
\det(A_{11}) &= \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 10, \ \det(A_{12}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 0, \ \det(A_{13}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0, \\
\det(A_{21}) &= \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -3, \ \det(A_{22}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5, \ \det(A_{23}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3, \\
\det(A_{31}) &= \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2, \ \det(A_{32}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \ \det(A_{33}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2,
\end{aligned}$$

et on peut calculer $\det(A)$ par l'une des formules suivantes :

- $1 \times \det(A_{11}) + 0 \times \det(A_{12}) + 1 \times \det(A_{13}) = 10 + 0 + 0 = 10$,
- $0 \times \det(A_{21}) + 2 \times \det(A_{22}) + 0 \times \det(A_{23}) = 0 + 2 \times 5 + 0 = 10$, (formule pratique car il n'y a qu'un déterminant à calculer),
- $0 \times \det(A_{31}) + 3 \times \det(A_{32}) + 5 \times \det(A_{33}) = 0 + 0 + 5 \times 2 = 10$,
- $1 \times \det(A_{11}) + 0 \times \det(A_{21}) + 0 \times \det(A_{31}) = 10 + 0 + 0 = 10$, (formule pratique car il n'y a qu'un déterminant à calculer),
- $0 \times \det(A_{12}) + 2 \times \det(A_{22}) + 3 \times \det(A_{32}) = 0 + 2 \times 5 + 0 = 10$,
- $1 \times \det(A_{13}) + 0 \times \det(A_{23}) + 5 \times \det(A_{33}) = 0 + 0 + 5 \times 2 = 10$.

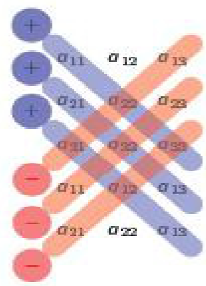
Proposition 1.2.1 - *Déterminant d'une matrice d'ordre 2*
Soit A une matrice carrée d'ordre $n = 2$. Le déterminant de A peut se calculer à l'aide de la technique suivante :



Exemple 1.2.3 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ alors

$$\det(A) = 5 \times 3 - 7 \times 4 = 15 - 28 = -13.$$

Proposition 1.2.2 - *Déterminant d'une matrice d'ordre 3 : Règle de Sarrus*
Soit A une matrice carrée d'ordre $n = 3$. Le déterminant de A peut se calculer à l'aide de la technique suivante :



Exemple 1.2.4 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\det(A) = (1 \times 2 \times 5 + 0 \times 0 \times 0 + 0 \times 0 \times 0) - (1 \times 2 \times 0 + 0 \times 3 \times 1 + 5 \times 0 \times 0) = 10.$$

Exemple 1.2.5 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, alors

$$\det(A) = (5 \times 3 \times 6 + 4 \times 1 \times 1 + 2 \times 7 \times 2) - (1 \times 3 \times 2 + 2 \times 1 \times 5 + 7 \times 4 \times 6) = -62.$$

Propriété 1.2.1 *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.*

Théorème 1.2.1 *A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.

$\boxed{\textbf{Exercice 21}}$ Trouver pour quelles valeurs de t la matrice $\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}$ est inversible.

Propriété 1.2.2
- $\det(A^T) = \det(A)$,
- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$,
- $\det(A \times B) = \det(A)\det(B)$.

Définition 1.2.2 *Rang*
*Le **rang** d'une matrice quelconque A est égal au plus grand entier s tel que l'on puisse extraire de A une matrice carrée d'ordre s inversible, c'est-à-dire de déterminant non nul. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes (ajout à une colonne - resp. une ligne - une combinaison linéaire des autres colonnes - resp. lignes) d'une matrice ne modifient pas le rang.*

Exemple 1.2.6 Soit la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Le rang de A est 2 :
- A est d'ordre 2×3 donc $s \leq \min\{2, 3\}$ soit $s = 0, 1$ ou 2 ;
- comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la deuxième colonne est nul, on ne peut pas conclure ;
- comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la troisième colonne est non nul, alors $s = 2$.

Exemple 1.2.7 Soit la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- A est d'ordre 3×3 donc $s \leq 3$,
- le déterminant de A est 0 donc $s \neq 3$,
- le déterminant de la sous-matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ est 5, donc $s = 2$.

$\boxed{\textbf{Exercice 22}}$ Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & -10 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 23}}$ Vrai-Faux 4.

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si une matrice est de rang r, alors elle est équivalente à la matrice I_r.
2. Une matrice est de rang r si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est de rang r.
3. Une matrice est de rang r si et seulement si la famille de ses vecteurs lignes est de rang r.
4. Si une matrice A est de rang r, alors toute matrice formée de r colonnes parmi les colonnes de A est de rang r.
5. Si une matrice formée de r colonnes parmi les colonnes de A est de rang r, alors A est de rang $\geq r$.
6. La matrice nulle est la seule matrice de rang 0.
7. Si deux lignes de A ne sont pas proportionnelles, alors le rang de A est au plus 2.
8. Si deux lignes de A sont proportionnelles, alors le rang de A est strictement inférieur à son nombre de colonnes.
9. Si une matrice carrée de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, extraite de A est inversible, alors A est de rang $\geq r$.
10. Si A est de rang r, alors aucune matrice carrée de $\mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{R})$ extraite de A n'est inversible.
11. Si toute matrice carrée de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, extraite de A est de rang r, alors A est de rang r.