ISCID - PRÉPA 2ème année

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES À L'ÉCONOMIE ET À LA GESTION 2

Université du Littoral - Côte d'Opale

Laurent SMOCH

Septembre 2012

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville
Université du Littoral, zone universitaire de la Mi-Voix, bâtiment H. Poincarré
50, rue F. Buisson, BP 699, F-62228 Calais cedex

Table des matières

Chapitre 3

Dimension finie

Ce chapitre est fondamental : les espaces vectoriels vous accompagneront tout au long de vos études mathématiques, et il est indispensable d'avoir compris les espaces de dimension finie avant d'aller plus loin. Même si les espaces vectoriels vous sont présentés ici sous forme assez générale, l'objectif principal est de comprendre le cas de $\mathbb{R}^n$, l'espace vectoriel des n-uplets de réels. N'hésitez pas à vous reporter à l'intuition géométrique que vous avez des vecteurs en dimension 2 et 3.

3.1 Espaces et sous-espaces

Nous considérons dans ce chapitre la théorie des espaces vectoriels de dimension finie. Dans la mesure où il ne sera question que de vecteurs, abandonner les flèches au-dessus de leurs écritures ne devrait pas introduire de confusion. Un espace vectoriel est un ensemble sur lequel sont définies

- une addition interne (on peut ajouter entre eux deux éléments de l'ensemble) ;
- une multiplication externe (on peut multiplier un élément de l'ensemble par un nombre réel).

Ces deux opérations doivent vérifier certaines propriétés de compatibilité qui sont listées dans la Définition 3.1.1.

Définition 3.1.1 *On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si E est muni d'une addition et d'une multiplication externe vérifiant les propriétés suivantes.*

- *Addition :* $\left\{\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (v,w) & \mapsto & v+w \end{array}\right.$
  1. *Associativité :* $\forall u,v,w\in E,\ u+(v+w)=(u+v)+w.$
  2. *Élément neutre :* $\exists e\in E\ ,\ \forall v\in E,\ v+e=e+v=v.$
  3. *Opposé :* $\forall v\in E, \exists v'\in E, v+v'=v'+v=e.$
  4. *Commutativité :* $\forall v,w\in E,\ v+w=w+v.$
- *Multiplication externe :* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times E & \to & E \\ (\lambda,v) & \mapsto & \lambda v \end{array}\right.$
  5. *Associativité :* $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall v\in E\ ,\ \lambda(\mu v)=(\lambda\mu)v.$
  6. *Elément neutre :* $\forall v\in E,\ 1v=v.$
  7. *Distributivité (1) :* $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall v\in E,\ (\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v.$
  8. *Distributivité (2) :* $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall v,w\in E,\ \lambda(v+w)=\lambda v+\lambda w.$

La proposition suivante nous autorisera à noter 0 l'élément neutre pour l'addition (nous l'appellerons "vecteur nul") et $-v$ l'opposé de v.

Proposition 3.1.1 *Soit E un espace vectoriel.*

1. *Le produit par le réel 0 d'un vecteur v quelconque est l'élément neutre pour l'addition :*

$$\forall v\in E,\ 0v=e.$$

2. Le produit par le réel -1 d'un vecteur v quelconque est son opposé pour l'addition :

$$\forall v \in E,\ v + (-1)v = e.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 53}}$ Parmi les espaces suivants, quels sont ceux qui sont des espaces vectoriels ?

1. $A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } a + b = 1 \right\}$
2. $B = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } 2a - 5b + c = 0 \text{ et } b + c = 0 \right\}$
3. $C = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \alpha + \gamma - 2\delta = -1 \text{ et } 2\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \right\}$
4. $D = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } a^2 + b = 0 \right\}$
5. $E = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } a - 2b - 3c - 4d = 0 \right\}$
6. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \left\{ \begin{array}{rcl} a - 2b + c & = & 0 \\ b - 2a + c & = & 0 \\ c - 2b + a & = & 0 \end{array} \right. \right\}$
7. $G = \left\{ X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 3X \right\}$
8. $H = \left\{ X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 4X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
9. $K = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = X \right\}.$

L'exemple fondamental est l'ensemble des n-uplets de réels :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble des n-uplets de réels (couples pour $n = 2$, triplets pour $n = 3, \ldots$), est muni de l'addition et de la multiplication par un réel, coordonnée par coordonnée.

- Addition : $(1, 2, 3, 4) + (3, -1, -2, 2) = (4, 1, 1, 6)$,
- Multiplication externe : $(-2)(3, -1, -2, 2) = (-6, 2, 4, -4)$.

Le singleton contenant seulement le vecteur nul est un espace vectoriel particulier.

L'associativité de l'addition permet d'écrire (sans parenthèses) des combinaisons linéaires de vecteurs.

Définition 3.1.2 *Soient $v_1, \ldots, v_n$ n vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$, tout vecteur s'écrivant :*

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels.

Il est inutile de s'inquiéter de la quantité de propriétés à vérifier dans la Définition 3.1.1. Dans tous les exemples que l'on rencontrera, les opérations sont parfaitement naturelles et leurs propriétés évidentes. On ne vérifie d'ailleurs jamais les 8 propriétés de la Définition 3.1.1. La raison pour laquelle c'est inutile est que tous les espaces vectoriels que l'on utilise sont des sous-espaces d'un espace vectoriel, c'est-à-dire qu'ils sont des sous-ensembles, sur lesquels on applique localement les opérations de l'espace entier.

Définition 3.1.3 *Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E s'il est un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication externe de E.*

Observons que tout sous-espace vectoriel de E contient au moins le vecteur nul. La notion prend tout son intérêt grâce au théorème suivant.

Théorème 3.1.1 *Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-ensemble non vide de E. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :*

$$\begin{array}{ll} \forall v, w \in F & v + w \in F \ ; \\ \forall v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R} & \lambda v \in F. \end{array} \tag{3.1}$$

Théorème 3.1.2 *Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-ensemble non vide de E. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. *F est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *F contient toutes les combinaisons linéaires de 2 de ses vecteurs.*
$$\forall v, w \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda v + \mu w \in F.$$
3. *Pour tout $n > 1$, F contient toutes les combinaisons linéaires de n de ses vecteurs.*
$$\forall v_1, \dots, v_n \in F,\ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1} \lambda_i v_i \in F.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 54}}$ Vrai-Faux 1. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0\}$,
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 1\}$,
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$,
4. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0 \text{ et } x + y + z = 1\}$,
5. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \sin(x) = 0\}$,
6. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}$,
7. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x| = |y| = |z|\}$,
8. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,
9. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.

3.2 Combinaisons linéaires

D'après le Théorème 3.1.2, un sous-espace vectoriel contient toutes les combinaisons linéaires d'un nombre quelconque de vecteurs : pour tout entier n, pour tous vecteurs $v_1, \dots, v_n$ de E, et pour tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$,

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in E.$$

Une des manières de fabriquer un sous-espace vectoriel est de partir d'un ensemble quelconque d'éléments, puis de lui ajouter toutes les combinaisons linéaires de ces éléments.

Définition 3.2.1 *Soit E un espace vectoriel et V un ensemble non vide (fini ou non) de vecteurs de E. On appelle sous-espace engendré par V l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini quelconque d'éléments de V.*

L'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de V est un espace vectoriel, d'après le Théorème 3.1.2. Le même théorème implique aussi que tout espace vectoriel contenant V doit contenir toutes les combinaisons linéaires de ses éléments. Donc le sous-espace engendré par V est inclus dans tout sous-espace contenant V.

Une famille finie de vecteurs est un n-uplet de vecteurs.

$$\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$$

L'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_n$.

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \forall i = 1, \ldots, n, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

À cause de la commutativité de l'addition, changer l'ordre dans lequel on écrit les vecteurs de la famille, ne modifie pas l'espace engendré.
Pour $n = 1$, l'espace engendré par un seul vecteur v (non nul) est une droite vectorielle :

$$\{\lambda v, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Pour $n = 2$, l'espace engendré par deux vecteurs v et w (non proportionnels) est un plan vectoriel :

$$\{\lambda v + \mu w, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est engendré par les n vecteurs

$$(1, 0, \ldots, 0),\ (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1).$$

En effet, on peut écrire tout vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, comme la combinaison linéaire :

$$x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1).$$

Deux familles de vecteurs différentes peuvent engendrer le même espace vectoriel. Par exemple $\mathbb{R}^2$ est engendré par

$$\mathcal{F} = ((1, 0), (0, 1)),$$

mais aussi par

$$\mathcal{G} = ((1, 1), (1, -1)).$$

En effet, tout vecteur (x, y) s'écrit :

$$(x, y) = \frac{x+y}{2}(1, 1) + \frac{x-y}{2}(1, -1).$$

Exercice 55 On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont combinaisons linéaires de e_1 et e_2.
2. Parmi les vecteurs suivants, repérer ceux qui sont combinaisons linéaires de e_1 et e_2 puis expliciter la combinaison linéaire correspondante.

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 56 On considère les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que tout vecteur X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3.
2. Est-ce le cas si l'on considère seulement la famille e_1, e_2 ?
3. Est-ce le cas si l'on remplace e_3 par le vecteur $\tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$?
4. Est-ce le cas si l'on choisit la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$?

Exercice 57 Pour chacune des familles des vecteurs suivantes, déterminer son rang et donner une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre.

1. $((1,0,1),(-1,0,-1),(2,0,2))$
2. $((1,0,1),(-1,0,-1),(2,0,2),(0,1,0),(1,1,1),(1,-2,1))$
3. $((1,0,1),(-1,0,-1),(2,0,2),(0,1,0),(1,1,1),(1,-2,-1))$
4. $((1,0,1,0),(-1,0,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,2,1,2))$
5. $((1,0,1,0),(-1,0,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,2,1,0))$
6. $((1,0,1,0),(-1,0,-1,0),(1,1,1,0),(0,1,0,1),(1,2,1,0))$

Définition 3.2.2 *Soit E un espace vectoriel et F une famille d'éléments de E. On dit que F est une famille génératrice si l'espace engendré par F est égal à E.*

Par exemple $\mathcal{F} = ((1,0),(0,1))$ et $\mathcal{G} = ((1,1),(1,-1))$ sont deux familles génératrices de $\mathbb{R}^2$. Par contre $((0,1),(0,2))$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. Les familles suivantes sont aussi des familles génératrices de $\mathbb{R}^2$.

$$((1,0),(0,1),(1,1))\ ;\ ((1,1),(1,-1),(0,1))\ ;\ ((1,0),(0,1),(1,1),(1,-1)).$$

Par rapport à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, elles contiennent des vecteurs superflus. Si dans une famille de vecteurs, un vecteur est combinaison linéaire des autres, on peut l'enlever de la famille sans changer l'espace engendré. Une famille de laquelle on ne peut rien enlever sans changer l'espace engendré est une famille libre.

Définition 3.2.3 *Soit $F = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille finie de vecteurs. On dit que $\mathcal{F}$ est une famille libre si pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow (\forall i = 1, \ldots, n, \lambda_i = 0).$$

Elle est dite liée dans le cas contraire.

On dit aussi que les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants quand leur famille est libre. Comme cas particuliers, une famille contenant le vecteur nul est liée ; une famille contenant un seul vecteur non nul est libre. On utilise souvent la caractérisation suivante :

Proposition 3.2.1 *Soit n un entier au moins égal à 2. Une famille de n vecteurs est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.*

Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $((0,1),(0,2))$ est liée. A l'inverse, les familles $\mathcal{F} = ((1,0),(0,1))$ et $\mathcal{G} = ((1,1),(1,-1))$ sont deux familles libres de $\mathbb{R}^2$. Dans $\mathbb{R}^n$, $((1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1))$ est une famille libre.

Exercice 58 Vrai-Faux 2. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont génératrices, lesquelles ne le sont pas, et pourquoi ?

1. $((1,1,0),(0,1,1))$,
2. $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$,
3. $((0,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0))$,
4. $((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$,
5. $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$.

Exercice 59 Vrai-Faux 3. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, lesquelles sont génératrices, lesquelles ne le sont pas, et pourquoi ?

1. $((0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-2,7,-10,-1))$,
2. $((0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1))$,
3. $((1,2,3,4),(5,6,7,0),(8,9,0,0),(1,0,0,0))$,
4. $((0,1,-1,0),(1,0,-1,0),(1,-1,0,0),(0,0,0,1))$,
5. $((1,1,1,2),(1,1,2,1),(1,2,1,1),(2,1,1,1))$.

Exercice 60 Vrai-Faux 4. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont libres, lesquelles ne le sont pas, et pourquoi ?

1. $((1,1,0),(0,1,1))$,
2. $((1,1,0),(-1,-1,0))$,
3. $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$,
4. $((0,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0))$,
5. $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$.

Exercice 61 Vrai-Faux 5. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, lesquelles sont libres, lesquelles ne le sont pas, et pourquoi ?

1. $((0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-2,7,-10,-1))$,
2. $((0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-1,4,-6,0))$,
3. $((0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1))$,
4. $((0,1,-1,0),(1,0,-1,0),(1,-1,0,0),(0,0,0,1))$,
5. $((1,1,1,2),(1,1,2,1),(1,2,1,1),(2,1,1,1))$.

3.3 Bases

Ce chapitre ne traite que des espaces finiment engendrés.

Définition 3.3.1 *On dit qu'un espace vectoriel est finiment engendré s'il est engendré par un nombre fini de vecteurs.*

Voici deux observations symétriques.

1. Si on ajoute un vecteur à une famille génératrice, alors elle ne peut plus être libre. En effet, tout vecteur ajouté est forcément combinaison linéaire des précédents, ce qui n'est pas possible dans une famille libre.

2. Si on enlève un vecteur à une famille libre, alors elle ne peut plus être génératrice. En effet, le vecteur que l'on vient d'enlever n'est pas combinaison linéaire des autres, donc il n'est pas dans l'espace engendré par les autres.

Définition 3.3.2 *On appelle base toute famille à la fois génératrice et libre.*

Nous avons déjà rencontré plusieurs bases. Les familles $((1,0),(0,1))$ et $((1,1),(1,-1))$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$. Dans $\mathbb{R}^n$, $((1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1))$ est une base, que l'on appelle la base canonique.

Exercice 62 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base naturelle de $\mathbb{R}^3$ (ou base canonique). On considère les trois vecteurs v_1, v_2 et v_3 définis par :

$$v_1 = -2e_1 - 4e_2 + 5e_3, \quad v_2 = 3e_1 + 4e_2 - 5e_3, \quad v_3 = -4e_1 - 7e_2 + 10e_3.$$

Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

La proposition suivante nous permettra de parler de bases en étant assurés de leur existence. Sa démonstration montrera aussi qu'on peut extraire une base de toute famille génératrice.

Proposition 3.3.1 *Dans un espace vectoriel, différent de $\{0\}$ et finiment engendré, il existe une base.*

Exercice 63

1. Montrer que la famille $\mathcal{S} = ((1,0),(1,1)) \subseteq \mathbb{R}^2$ engendre $\mathbb{R}^2$.
2. La famille $\mathcal{S}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$? Pourquoi ?

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 3.3.1 *Dans un espace vectoriel, différent de $\{0\}$ et finiment engendré, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.*

Le Théorème 3.3.1 permet de définir rigoureusement la notion de dimension.

Définition 3.3.3 *Soit E un espace vectoriel, différent de $\{0\}$ et finiment engendré. On appelle dimension de E le nombre d'éléments commun à toute base de E.*

On étend la définition à un espace vectoriel contenant seulement le vecteur nul, en convenant que sa dimension est 0. Les espaces de dimension 1 sont les droites vectorielles, ceux de dimension 2 sont les plans vectoriels. L'espace $\mathbb{R}^n$ est de dimension n. Les sous-espaces de dimension $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$ s'appellent les hyperplans de $\mathbb{R}^n$. Si on connaît la dimension de l'espace, il est facile de vérifier si une famille de vecteurs est ou non une base, grâce au Théorème suivant.

Théorème 3.3.2 *Dans un espace vectoriel de dimension n :*

1. *toute famille libre a au plus n éléments,*
2. *toute famille libre de n éléments est une base,*
3. *toute famille génératrice a au moins n éléments,*
4. *toute famille génératrice de n éléments est une base.*

Comme il est naturel, tout sous-espace vectoriel d'une espace vectoriel de dimension finie est lui-même de dimension finie.

Proposition 3.3.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Tout sous-espace vectoriel de E est de dimension finie, inférieure ou égale à n.*

La dimension de l'espace engendré par une famille de vecteurs est le rang de cette famille.

Définition 3.3.4 *On appelle rang d'une famille de vecteurs la dimension de l'espace vectoriel qu'elle engendre. .*

Les observations suivantes sont des conséquences faciles du Théorème 3.3.2 :

- le rang d'une famille de n vecteurs est au plus n,
- le rang d'une famille de n vecteurs est n si et seulement si cette famille est libre,
- le rang d'une famille de n vecteurs est n si et seulement si cette famille est une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre.

Nous verrons plus loin un moyen systématique pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, et en extraire une base de l'espace engendré. L'intérêt des bases est qu'elles permettent d'identifier tout espace de dimension finie à $\mathbb{R}^n$, grâce à la notion de coordonnées.

Théorème 3.3.3 *Soit E un espace de dimension n et $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Pour tout vecteur $v \in E$ il existe un n-uplet de réels $(x_1, \ldots, x_n)$ unique tel que :*

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i.$$

Les réels $x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées de v dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$. Par exemple, les coordonnées de $(2, 3)$ dans la base $((1, 0), (0, 1))$ sont 2 et 3. Dans la base $((1, 1), (1, -1))$, ses coordonnées sont $\frac{5}{2}, \frac{-1}{2}$. Les coordonnées de $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont $x_1, \ldots, x_n$.

Exercice 64 Déterminer, parmi les familles suivantes, celles qui sont des bases de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right), B_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\right), B_3 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right),$$
$$B_4 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right), B_5 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right).$$

Exercice 65 On considère l'ensemble $F = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\2 & -2 & 2\\2 & -4 & 4\end{pmatrix} X = 2X \right\}$

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Donner une famille génératrice.
3. Cette famille génératrice est-elle une base de F ?

Exercice 66 On considère les espaces vectoriels (e.v.) suivants

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\},\ E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$$
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\},\ E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}.$$

1. Déterminer la dimension de E.
2. Donner une base de E.

Exercice 67 Compléter les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

1. $((1, 1, 1))$
2. $((1, 1, 0))$
3. $((1, 1, 1), (1, -1, -1))$
4. $((1, 1, 0), (1, -1, 0))$
5. $((1, 1, 0), (1, 1, 1))$
6. $((1, 1, 0), (1, -1, 1))$

3.4 Morphismes

Une application entre deux espaces vectoriels est dite linéaire si elle envoie une combinaison linéaire de vecteurs sur la même combinaison linéaire de leurs images.

Définition 3.4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application de E dans F. On dit que f est une application linéaire si*

$$\begin{array}{rc} \forall v, w \in E & f(v+w) = f(v) + f(w), \\ \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} & f(\lambda v) = \lambda f(v). \end{array}$$

Une application linéaire f de E dans F envoie nécessairement le vecteur nul de E sur le vecteur nul de F. Elle envoie l'opposé de v sur l'opposé de $f(v)$. La proposition suivante se démontre facilement, dans le style du Théorème 3.1.2.

Proposition 3.4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels, et f une application de E dans F. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. *f est une application linéaire.*
2. *$\forall v, w \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f(\lambda v + \mu w) = \lambda f(v) \mu f(w)$.*
3. *Pour tout $n > 1$, $\forall v_1, \ldots, v_n \in E$, $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i).$$

Voici quelques exemples d'applications linéaires :
- de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \mapsto (x + y, 2x + 3y)$,
- de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$: $(x, y) \mapsto (y, x, x + y)$,
- de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$: $(x, y, z) \mapsto (y - x, 2z + y)$.

Une application linéaire respecte la structure d'espace vectoriel : l'image d'une somme est la somme des images, l'image du produit par un réel est le produit de l'image par le même réel. D'une application entre deux structures algébriques (groupes, corps, ...) qui respecte la structure, on dit qu'elle est un morphisme. Le vocabulaire classique est le suivant.

Définition 3.4.2 *Une application linéaire de E dans F est un*
- *endomorphisme si $E = F$,*
- *isomorphisme si elle est bijective,*
- *automorphisme si $E = F$ et l'application est bijective.*

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Théorème 3.4.1 *Soient E, F, G trois espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. La composée $g_o f$ est une application linéaire de E dans G :*

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ E & \rightarrow & F & \rightarrow & G \\ u & \mapsto & f(u) & \mapsto & g_o f(u) = g(f(u)). \end{array}$$

Si une application f est un isomorphisme, son application réciproque, que nous noterons f^{-1} est aussi une application linéaire.

Théorème 3.4.2 *Soit f un isomorphisme de E dans F. Sa réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.*

La composée de f par f^{-1} est l'application identique, ou identité, de E dans lui même. C'est un automorphisme particulier, que nous noterons Id_E :

$$\begin{array}{rcl} Id_E : E & \mapsto & E \\ v & \to & Id_E(v) = v \end{array}.$$

Une combinaison linéaire d'applications linéaires est encore une application linéaire.

Théorème 3.4.3 *Soient E et F deux espaces vectoriels. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux réels. L'application $\lambda f + \mu g$ est encore une application linéaire.*

Nous terminons la section par des interprétations géométriques d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Considérons un plan vectoriel muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$. À tout couple de réels (x, y) est associé le vecteur $x_{\vec{i}} + y_{\vec{j}}$. Une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même est associée à une transformation géométrique du plan, qui à un vecteur associe un autre vecteur. En voici trois (cf. FIGURE 3.1) :

- rotation d'angle $\pi/2$: $(x, y) \to (-y, x)$,
- symétrie par rapport à la première bissectrice : $(x, y) \mapsto (y, x)$,
- projection (orthogonale) sur la première bissectrice : $(x, y) \mapsto ((x + y)/2, (x + y)/2)$.

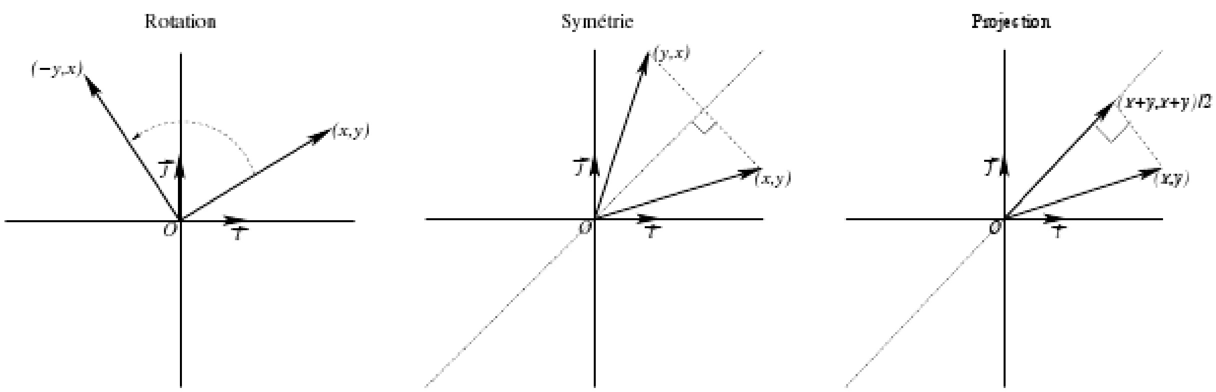

FIGURE 3.1 – *Interprétations géométriques de trois applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: rotation d'angle $\pi/2$, symétrie par rapport à la première bissectrice, projection sur la première bissectrice.*

Les rotations et les symétries sont des automorphismes du plan vectoriel. Les projections sont des endomorphismes, mais elles ne sont pas bijectives. Observons que les translations, par exemple $(x, y) \mapsto (x+2, y-1)$, ne sont pas linéaires. Ce sont des bijections, mais pas des automorphismes du plan vectoriel.

3.5 Images et noyaux

Qu'une application linéaire respecte les combinaisons linéaires entraîne qu'elle respecte aussi les sous-espaces vectoriels, au sens suivant.

Théorème 3.5.1 *Soient E, F deux espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F.*

1. *Soit A un sous-espace vectoriel de E. Alors*
$$f(A) = \{f(v), v \in A\},$$
est un sous-espace vectoriel de F.
2. *Soit B un sous-espace vectoriel de F. Alors*
$$f^{-1}(B) = \{v \in E, f(v) \in B\},$$
est un sous-espace vectoriel de E.

L'ensemble des images par une application linéaire des éléments d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée (point 1.). L'ensemble des éléments de l'espace de départ dont l'image par une application linéaire est dans un sous-espace de l'espace d'arrivée, est un sous-espace de l'espace de départ (point 2.). Attention à la notation $f^{-1}(B)$: elle a un sens même si l'application f n'est pas bijective et donc si l'application réciproque f^{-1} n'existe pas.

Parmi les cas particuliers du Théorème 3.5.1, l'image et le noyau jouent un rôle important.

Définition 3.5.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On appelle :*

1. *image de f et on note Im(f) le sous-espace vectoriel de F :*
$$\mathit{Im}(f) = f(E) = \{f(v), v \in E\}.$$
2. *noyau de f et on note Ker(f) le sous-espace vectoriel de E :*
$$\mathit{Ker}(f) = f^{-1}(0) = \{v \in E, f(v) = 0\}.$$

La notation Ker vient de l'allemand, où noyau se dit "Kern".

Considérons par exemple l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $f : (x, y) \mapsto (x + y, x + y, x + y)$. Son image est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(1, 1, 1)$. Son noyau est l'ensemble des vecteurs (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x + y = 0$: c'est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par le vecteur $(1, -1)$. $\mathrm{Im}(f) = \{\lambda(1, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $\mathrm{Ker}(f) = \{\lambda(1, -1), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Proposition 3.5.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. L'application f est :*

1. *surjective si et seulement si Im(f) $= F$,*
2. *injective si et seulement si Ker(f) $= \{0\}$.*

Le rang d'une application linéaire est la dimension de son image.

Définition 3.5.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F. On appelle rang de f la dimension de Im(f) :*
$$\mathit{rang}(f) = \mathit{dim}(\mathit{Im}(f)).$$

Supposons que E soit de dimension n et choisissons une base $(b_1, \ldots, b_n)$. L'image par f de tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $f(b_1), \ldots, f(b_n)$. Donc Im(f) est le sous-espace vectoriel de E engendré par $(f(b_1), \ldots, f(b_n))$. Le rang de f est la dimension de ce sous-espace ; c'est donc le rang de la famille de vecteurs $(f(b_1), \ldots, f(b_n))$ (cf. Définition 3.3.4). Observons que le rang est inférieur ou égal aux deux dimensions des espaces vectoriels de départ et d'arrivée.
$$\mathrm{rang}(f) \leq \min\{\mathit{dim}(E), \mathit{dim}(F)\}.$$

Théorème 3.5.2 *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans F. L'application f est :*

1. *surjective si et seulement si l'image de toute famille génératrice dans E est une famille génératrice dans F,*
2. *injective si et seulement si l'image de toute famille libre dans E est une famille libre dans F,*
3. *bijective si et seulement si l'image de toute base de E est une base de F.*

La conjonction des Théorèmes 3.5.2 et 3.3.2 implique les relations suivantes entre les dimensions des espaces de départ et d'arrivée.

Corollaire 3.5.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F.*

1. *Si f est surjective alors $dim(E) \geq dim(F)$.*
2. *Si f est injective alors $dim(E) \leq dim(F)$.*
3. *Si f est bijective alors $dim(E) = dim(F)$.*

La dimension est donc une forte contrainte sur la nature des applications linéaires. On peut aussi voir cette contrainte comme suit :

Corollaire 3.5.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension. Une application linéaire de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective ou surjective.*

Il ne peut exister un isomorphisme entre deux espaces vectoriels que s'ils ont la même dimension. Réciproquement, si deux espaces ont la même dimension, on peut toujours construire un isomorphisme entre eux, en envoyant une base de l'un sur une base de l'autre. En particulier, tous les espaces vectoriels de dimension n sont isomorphes à $\mathbb{R}^n$. Si E est de dimension n, avec une base $(b_1, \ldots, b_n)$, tous les vecteurs de E ont une décomposition unique

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i,$$

où les x_i sont les coordonnées de v (cf. Théorème 3.3.3). L'application de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à v associe le n-uplet de ses coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$. La somme des dimensions de l'image et du noyau est la dimension de l'espace de départ : le Théorème 3.5.3 ci-dessous, est le Théorème du rang.

Théorème 3.5.3 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F.*

$$dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim(E).$$

Exercice 68 On considère les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{l|l} f : (x,y) \mapsto (-x,-y) & f : (x,y) \mapsto (2x,2y) \\ f : (x,y) \mapsto (x,0) & f : (x,y) \mapsto (x,x) \\ f : (x,y) \mapsto (y,0) & f : (x,y) \mapsto (y,y) \\ f : (x,y) \mapsto (x+y,x-y) & f : (x,y) \mapsto (x-y,x+y) \end{array}$$

Pour chacune de ces applications :

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Donner une interprétation géométrique de f comme transformation du plan vectoriel, muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. L'application est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^2$?
4. Reprendre les deux questions précédentes pour l'application $f - I$, où f est l'application considérée et I désigne l'application identique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 69 On considère les applications suivantes.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y, y-z) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, 2x+3y) \end{array}$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. L'application g est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer $g \circ f$. Est-elle injective ? surjective ?
4. Déterminer $f \circ g$. Est-elle injective ? surjective ?

3.6 Écriture matricielle

Les espaces vectoriels considérés sont tous de dimension finie > 1. Observons d'abord qu'une application linéaire est déterminée par l'image qu'elle donne d'une base de l'espace de départ.

Proposition 3.6.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $(b_1, \dots, b_n)$ une base de E. Soit $(w_1, \dots, w_n)$ un n-uplet de vecteurs de F. Il existe une application linéaire unique f telle que pour tout $i = 1, \dots, n$, $f(b_i) = w_i$.*

Si on choisit une base dans l'espace d'arrivée, alors les images des vecteurs de la base de départ ont des coordonnées dans cette base. S'il y a n vecteurs de base au départ et m à l'arrivée, l'application linéaire est déterminée par $m \times n$ réels : m coordonnées pour chacun des n vecteurs de base. Une matrice est la représentation sous forme de tableau de ces $m \times n$ réels. Notons $(b_1, \dots, b_n)$ une base de l'espace de départ, et $(c_1, \dots, c_m)$ une base de l'espace d'arrivée. Soit $a_{i,j}$ la i-ième coordonnée de $f(b_j)$:

$$\forall j = 1, \dots, n,\ f(b_j) = a_{1,j}c_1 + \dots + a_{i,j}c_i + \dots + a_{m,j}c_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}c_i.$$

Les coordonnées des vecteurs images $f(b_1), \dots, f(b_n)$ sont conventionnellement notées en colonnes. L'indice i (des vecteurs de la base d'arrivée) est l'indice de ligne, l'indice j (des vecteurs de la base de départ) est l'indice de colonne.

$$\begin{array}{ccccc|cl}
 & & \text{départ} & & & & \\
f(b_1) & \dots & f(b_j) & \dots & f(b_n) & & \\
\hline
a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} & c_1 & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} & c_i & \text{arrivée} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{m,1} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} & c_m &
\end{array}$$

Le plus souvent, on se ramènera au cas où l'espace de départ est $\mathbb{R}^n$ et l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^m$, les deux étant munis de leurs bases canoniques.

Comme premier exemple, considérons l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$f : (x, y) \mapsto (x + y, 2x + 3y, x - y).$$

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $((1, 0), (0, 1))$. L'image de ces deux vecteurs est

$$f((1, 0)) = (1, 2, 1) \text{ et } f((0, 1)) = (1, 3, -1).$$

La matrice de f est donc la suivante (attention à l'écriture des vecteurs de l'espace d'arrivée en colonnes).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Munissons maintenant $\mathbb{R}^2$ de la base $((1, 1), (1, -1))$ au départ, et $\mathbb{R}^3$ de la base $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ à l'arrivée. Les images des vecteurs de la base de départ sont

$$f((1, 1)) = (2, 5, 0) = -3(1, 0, 0) + 5(1, 1, 0) + 0(1, 1, 1) \text{ et}$$
$$f((1, -1)) = (0, -1, 2) = 1(1, 0, 0) - 3(1, 1, 0) + 2(1, 1, 1).$$

D'où la matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quand l'espace d'arrivée et l'espace de départ sont les mêmes (l'application est un endomorphisme), on choisit la même base au départ et à l'arrivée. La matrice d'un endomorphisme a autant de lignes que de colonnes : on dit qu'elle est carrée.
Voici les matrices de trois endomorphismes de $\mathbb{R}^2$, dans la base canonique.

- Rotation d'angle $\pi/2$: $(x, y) \mapsto (-y, x)$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Symétrie par rapport à la première bissectrice : $(x, y) \mapsto (y, x)$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Projection sur la première bissectrice : $(x, y) \mapsto ((x + y)/2, (x + y)/2)$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dans un espace de dimension n, la matrice de l'application identique est la matrice carrée $n \times n$ qui a des 1 sur la diagonale (termes d'indices (i, i)) et des 0 en dehors (termes d'indices (i, j) avec $i \neq j$). On l'appelle matrice identité d'ordre n et on la note I_n :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La représentation matricielle présente l'avantage d'automatiser de nombreux calculs. Nous consacrerons le chapitre suivant au calcul matriciel. Pour l'instant nous allons voir comment la matrice d'une application linéaire permet de calculer l'image d'un vecteur dont on se donne les coordonnées dans la base de départ. Reprenons la situation générale : $(b_1, \dots, b_n)$ est une base de l'espace de départ, et $(c_1, \dots, c_m)$ une base de l'espace d'arrivée. Le coefficient d'indice (i, j) de la matrice de f, noté $a_{i,j}$, est la i-ième coordonnée de $f(b_j)$:

$$\forall j = 1, \dots, n,\ f(b_j) = a_{1,j}c_1 + \dots + a_{i,j}c_i + \dots + a_{m,j}c_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}c_i.$$

Considérons maintenant un vecteur v de l'espace de départ, dont les coordonnées dans la base $(b_1, \dots, b_n)$ sont $(x_1, \dots, x_n)$:

$$v = x_1b_1 + \dots + x_nb_n.$$

L'image de v par f est :

$$f(v) = x_1f(b_1) + \dots + x_nf(b_n) = \sum_{j=1}^{n} x_jf(b_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}c_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \right) c_i.$$

Donc le vecteur $f(v)$ se décompose dans la base $(c_1, \dots, c_m)$ en $f(v) = y_1c_1 + \dots + y_mc_m$, avec :

$$\forall i = 1, \dots, m,\ y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j.$$

On dit que le vecteur $(y_i)_{i=1,\ldots,m}$ est le produit de la matrice $(a_{i,j})$ par le vecteur $(x_j)_{j=1,\ldots,n}$. Observez que ce produit n'a de sens que si le nombre de coordonnées du vecteur est égal au nombre de colonnes de la matrice. Il est commode, pour calculer le produit d'une matrice par un vecteur, de représenter les x_i en colonne, au-dessus et à droite de la matrice $(a_{i,j})$ (voir FIGURE 3.2) :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,j} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{array}.$$

Reprenons l'exemple de l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$f : (x, y) \mapsto (x + y, 2x + 3y, x - y).$$

Les bases respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ étant les bases canoniques, la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

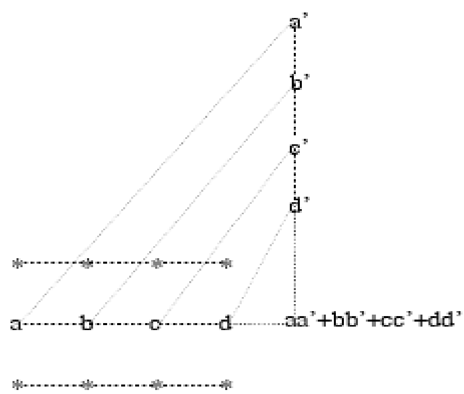

FIGURE 3.2 – *Comment présenter le produit d'une matrice par un vecteur colonne.*

Pour vérifier la cohérence de la notation matricielle, calculons le produit de cette matrice par un vecteur de $\mathbb{R}^2$ quelconque (x, y).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + 3y \\ x - y \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exercice 70 On considère les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

$f : (x, y) \mapsto (-x, -y)$	$f : (x, y) \mapsto (2x, 2y)$
$f : (x, y) \mapsto (x, 0)$	$f : (x, y) \mapsto (x, x)$
$f : (x, y) \mapsto (y, 0)$	$f : (x, y) \mapsto (y, y)$
$f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$	$f : (x, y) \mapsto (x - y, x + y)$

Déterminer la matrice de chacune de ces applications dans les bases suivantes de $\mathbb{R}^2$.

1. $((1,0),(0,1))$
2. $((0,1),(1,0))$
3. $((0,2),(-3,0))$
4. $((0,1),(1,1))$
5. $((1,1),(1,-1))$

Exercice 71 Pour tout entier n, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique. Donner la matrice de chacune des applications f suivantes. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

1. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $(x,y)\mapsto f(x,y)=(x+y,x-y,2x)$.
2. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=(0,y-z,z-x)$.
3. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=(x-y,y-z,z-x)$.
4. $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$, $(x,y,z,t)\mapsto f(x,y,z,t)=(x+y+2z-t,2x+y+z+t)$.
5. $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, $(x,y,z,t)\mapsto f(x,y,z,t)=x-y+2z+3t$.

3.7 Détermination pratique de l'image et du noyau

Nous reprenons les notations de la section précédente : E et F sont deux espaces vectoriels, munis respectivement des bases $(b_1,\ldots,b_n)$ et $(c_1,\ldots,c_m)$. La matrice de l'application linéaire f relative à ces deux bases est $(a_{i,j})$. Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est le vecteur nul. Soit v un vecteur de E et $x=(x_1,\ldots,x_n)$ le n-uplet de ses coordonnées dans la base $(b_1,\ldots,b_n)$. La condition nécessaire et suffisante sur x pour que $f(v)$ soit nul est que toutes les coordonnées de $f(v)$, c'est-à-dire toutes les lignes du produit Ax, soient nulles :

$$(H)\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1+ & \ldots & +a_{1,j}x_j+ & \ldots & +a_{1,n}x_n & = & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i,1}x_1+ & \ldots & +a_{i,j}x_j+ & \ldots & +a_{i,n}x_n & = & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{m,1}x_1+ & \ldots & +a_{m,j}x_j+ & \ldots & +a_{m,n}x_n & = & 0 \end{array}\right. .$$

Le système linéaire (H) est homogène : l'ensemble de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. La méthode du pivot de Gauss permet de déterminer une base de l'ensemble des solutions de (H), donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Nous allons voir qu'elle permet aussi au passage de déterminer le rang de f, et même une base de $\mathrm{Im}(f)$.

D'après la Proposition 3.6.1, à toute famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ correspond une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Nous avons vu que le rang de cette application est le rang de la famille de vecteurs (Définitions 3.3.4 et 3.5.2). La technique décrite ici s'applique indifféremment à une famille de vecteurs ou à une application linéaire. La première étape de la méthode de Gauss consiste à mettre le système (H) sous forme échelonnée :

$$(H')\left\{\begin{array}{ccccccccc} p_1y_1 & +a'_{1,2}y_2+ & \ldots & +a'_{1,j}y_j+ & \ldots & +a'_{1,n}y_n & = & 0\\ & p_2y_2+ & \ldots & +a'_{2,j}y_j+ & \ldots & +a'_{2,n}y_n & = & 0\\ & & \ddots & & & \vdots & & \vdots\\ & & & p_ry_r+ & \ldots & +a'_{r,n}y_n & = & 0\\ & & & & & 0 & = & 0\\ & & & & & \vdots & & \vdots\\ & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Mettre le système (H) sous forme échelonnée, c'est passer de (H) à (H') par des transformations de lignes consistant à ajouter à une ligne le produit d'une autre par une constante, échanger deux lignes, permuter éventuellement des coordonnées, de sorte que

1. les systèmes (H) et (H') sont équivalents,
2. les inconnues $(y_1, \ldots, y_n)$ de (H') sont celles de (H), mais dans un ordre qui peut être différent,
3. les pivots $p_1, \ldots, p_r$ sont tous non nuls.

Au système (H') on peut associer la matrice suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} p_1 & a'_{1,2} & \ldots & a'_{1,j} & \ldots & a'_{1,n} \\ & p_2 & \ldots & a'_{2,j} & \ldots & a'_{2,n} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & p_r & \ldots & a'_{r,n} \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est celle d'une autre application linéaire f', de E vers F.

Théorème 3.7.1 *Les applications f et f' sont de rang r.*
- $(f'(b_1), \ldots, f'(b_r))$ *est une base de* $Im(f')$.
- *Soient* $i_1, \ldots, i_r$ *les indices tels que* $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) = (y_1, \ldots, y_r)$.
- $(f(b_{i_1}), \ldots, f(b_{i_r}))$ *est une base de* $Im(f)$.

La technique est beaucoup plus facile à appliquer qu'il n'y paraît. Considérons l'application suivante, de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$f : (x, y, z, t) \mapsto (x + 2y + z + t, 2x + 4y + 3z + t, x + 2y + 2z).$$

Sa matrice, relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ au départ, et $\mathbb{R}^3$ à l'arrivée est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système homogène permettant de déterminer $\text{Ker}(f)$ est :

$$(H) \left\{ \begin{array}{rrrrcl} x & +2y & +z & +t & = & 0 \\ 2x & +4y & +3z & +t & = & 0 \\ x & +2y & +2z & & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrcll} x & +2y & +z & +t & = & 0 & \\ & & z & -t & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & z & -t & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrcl} x & +z & +2y & +t & = & 0 \\ & z & & -t & = & 0 \\ & z & & -t & = & 0 \end{array} \right. \boxed{y \leftrightarrow z} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrcll} x & +2y & +z & +t & = & 0 & \\ & & z & -t & = & 0 & \\ & & & 0 & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right. .$$

Le système est de rang 2, il en est de même de l'application f. La mise sous forme échelonnée montre que les colonnes de A correspondant aux variables x et z, à savoir la première et la troisième, forment une famille libre, donc une base de $\text{Im}(f)$:

$$\text{Im}(f) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nous avons écrit les vecteurs en colonnes, pour souligner le fait qu'il s'agit nécessairement de vecteurs colonnes de la matrice A. Pour trouver une base de $\text{Ker}(f)$, il faut continuer la résolution.

$$(H) \left\{ \begin{array}{rrcrr} x & +z & = & -2y & -t \\ & z & = & t & \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcrrl} x & & = & -2y & -2t & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & z & = & & t & \end{array} \right. .$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des quadruplets $(-2y-2t, y, t, t)$, où y et t sont deux réels quelconques. Donc :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{y(-2,1,0,0) + t(-2,0,1,1), y, t \in \mathbb{R}\}.$$

C'est un sous-espace de dimension 2 dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 72 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base naturelle $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ où

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1).$$

Soient les vecteurs $u = (1,0,1)$, $v = (0,1,1)$, $w = (1,2,0)$ et $\mathcal{B}' = \{u, v, w\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
4. Vérifier que $P = Q^{-1}$.

Exercice 73 On considère dans $\mathbb{R}^4$ le système

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 10x_3 - 6x_4 &= 1 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 - 7x_4 &= 2 \end{cases}$$

1. Résoudre ce système par la méthode du pivot de Gauss.
2. On considère les vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 définis par

$$v_1 = (1,2,-3), \quad v_2 = (3,5,-4), \quad v_3 = (7,10,1), \quad v_4 = (-5,-6,-7).$$

   (a) La famille $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_3, v_4)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
   (b) La famille $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, v_3)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
   (c) Déterminer les coordonnées de v_4 dans la base $\mathcal{B}_2$ (utiliser une matrice de passage particulière).

Exercice 74 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base naturelle de $\mathbb{R}^3$. On considère les trois vecteurs

$$v_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad v_2 = e_1 - e_2, \quad v_3 = e_1 - e_3.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Quelle est la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$?
3. Déterminer sa matrice inverse P^{-1}. À quoi correspond-elle ?

Exercice 75 Soient les vecteurs

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (a, b, c, d)$ est libre et génératrice.
2. Écrire la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.
3. Exprimer le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ dans cette base.

$\boxed{\textbf{Exercice 76}}$ Soit $\mathcal{S} = ((1,0,0),(0,1,1),(1,0,1)) = (v_1, v_2, v_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ ainsi que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ soit $\mathcal{T} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = (i, j, k)$.

1. Comment s'écrit la matrice de changement de base P de $\mathcal{T}$ à $\mathcal{S}$?
2. Comment s'écrit la matrice de changement de base P' de $\mathcal{S}$ à $\mathcal{T}$?
3. Que peut-on conclure ?

$\boxed{\textbf{Exercice 77}}$ On considère les bases suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{S} = ((1,-2),(2,-5)) \text{ et } \mathcal{T} = ((1,0),(0,1)) = (e_1, e_2).$$

1. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{T}$ à $\mathcal{S}$.
2. Écrire la matrice de passage Q de $\mathcal{S}$ à $\mathcal{T}$.
3. Vérifier que $P = Q^{-1}$ ou que $P^{-1} = Q$.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice exprimée dans la base $\mathcal{T}$. Soit $B = \begin{pmatrix} 44 & 101 \\ -18 & -41 \end{pmatrix}$ la même matrice que A mais exprimée cette fois-ci dans la base $\mathcal{S}$.
   Calculer $P^{-1}AP$. Conclure.