ISCID - PRÉPA 2ème année

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES À L'ÉCONOMIE ET À LA GESTION 2

Université du Littoral - Côte d'Opale

Laurent SMOCH

Septembre 2012

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville
Université du Littoral, zone universitaire de la Mi-Voix, bâtiment H. Poincarré
50, rue F. Buisson, BP 699, F-62228 Calais cedex

Table des matières

Chapitre 1

Calcul matriciel

1.1 Les matrices

Définition 1.1.1

- *On appelle* ***matrice*** *$m \times n$ (ou d'ordre $m \times n$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau de m lignes et n colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.*
- *Si $m = n$ on dit qu'on a une* ***matrice carrée****. L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
- *Une matrice $m \times 1$ est appelée* ***vecteur-colonne*** *et une matrice $1 \times n$ est appelée* ***vecteur-ligne****.*
- *On convient de noter a_{ij} l'élément de la matrice situé sur la i-ème ligne et j-ième colonne ($1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$).*
- *Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

ou encore

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ ou } A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Nous travaillerons avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$.

Exemple 1.1.1 La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ est carrée et d'ordre 3.

Définition 1.1.2 - *Addition de matrices*
Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ sont deux matrices $m \times n$, on définit l'addition des matrices par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Exemple 1.1.2 *Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On obtient*

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+6 & 4+1 & 2+9 \\ 1+2 & 3+0 & 5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 11 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.1.1 La somme de deux matrices de tailles différentes n'est pas définie.

Définition 1.1.3

- *La **matrice nulle**, notée $O_{m,n}$, est la matrice dont tous les éléments sont nuls.*
- *La **matrice opposée** d'une matrice A est notée $-A$. Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ alors $-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$.*

Propriété 1.1.1 *Si A, B et C sont des matrices de même ordre, alors nous avons*

- $A + B = B + A$ *(commutativité),*
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(associativité).*

Exemple 1.1.3 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. On a alors

- $A + B = \begin{pmatrix} 1+6 & -1-5 \\ 3+2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $B + A = \begin{pmatrix} 6+1 & -5-1 \\ 2+3 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.
- $A + B = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $(A + B) + C = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

  $B + C = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $A + (B + C) = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Définition 1.1.4

- *On appelle **matrice diagonale** toute matrice carrée $D = (d_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ telle que $i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0$. Si on note $d_i = d_{ii}$, une matrice diagonale est de la forme*

$$D_n = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

  On la note $Diag(d_1, d_2, \dots, d_n)$.
- *La **matrice identité** d'ordre n, notée I_n, est la matrice diagonale $Diag(1, 1, \dots, 1)$.*

Définition 1.1.5 *On dit qu'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ est **triangulaire supérieure** (resp. **inférieure**) si $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ (resp. si $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$).*

Remarque 1.1.2 Une matrice triangulaire supérieure et inférieure est une matrice diagonale.

Définition 1.1.6 - *Produit d'une matrice par un scalaire*
Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ est une matrice $m \times n$ et si $\alpha \in \mathbb{K}$, on définit le produit d'une matrice par un scalaire par

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

Exemple 1.1.4 Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient

$$C = \alpha A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times 3 & \frac{1}{2} \times 4 & \frac{1}{2} \times 2 \\ \frac{1}{2} \times 1 & \frac{1}{2} \times 3 & \frac{1}{2} \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Propriété 1.1.2 *Soient A et B deux matrices de même ordre et $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire, on a*

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \text{ (distributivité).}$$

Exercice 1 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

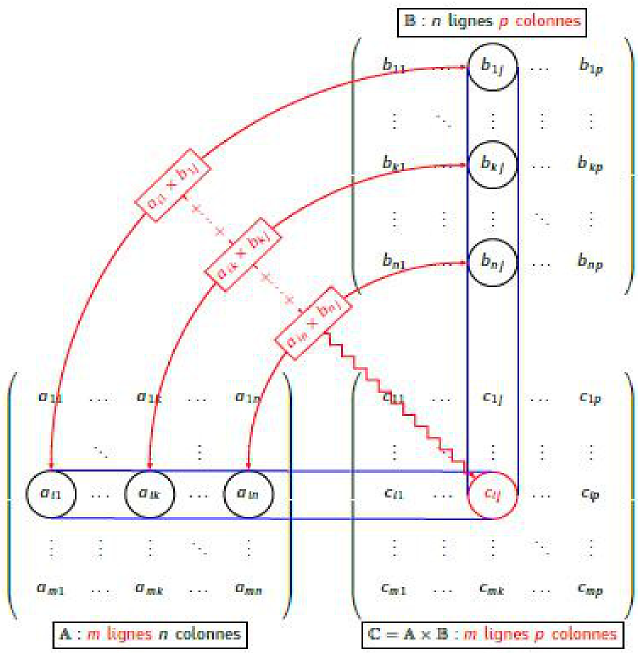
1. Trouver une matrice C telle que $A - 2B - C = O$.
2. Trouver une matrice D telle que $A + B + C - 4D = O$.

Définition 1.1.7 - *Produit de matrices*
Si $A = (a_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}}$ *est une matrice* $m \times p$ *et si* $B = (b_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ *est une matrice* $p \times n$*, on définit le* ***produit des matrices*** *par*

$$A \times B = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

qui est une matrice $m \times n$.

On procède de la manière suivante pour multiplier deux matrices :



Exemple 1.1.5 Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est d'ordre 2×3, la matrice B est d'ordre 3×3 donc la matrice $A \times B$ est d'ordre 2×3.
- On a
$A \times B = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 3 \times 0 + 0 \times 0 & 1 \times 2 + 3 \times 2 + 0 \times (-1) & 1 \times 0 + 3 \times 3 + 0 \times (-2) \\ (-1) \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times 0 & (-1) \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times (-1) & (-1) \times 0 + 1 \times 3 + 2 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Effectuer les multiplications suivantes

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,
2. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$,
3. $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 Calculer - lorsque cela est possible - les produits des matrices A et B dans les cas suivants.

1. $A = B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,
3. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 Une usine fabrique deux produits, A et B. Chaque produit contient quatre matières différentes W, X, Y, Z. La fabrication de chaque unité de chaque matière nécéssite trois forme d'énergie, électricité, gaz, pétrole. Les deux tableaux suivants présentent les nombres d'unités nécessaires d'énergie pour produire une unité de chaque matière, les quantités de matières nécessaires pour produire une unité de chaque produit A et B. Utiliser la multiplication matricielle pour exprimer les quantités d'énergie nécessaires à la production d'une unité de chaque produit.

	W	X	Y	Z
A	2	3	1	1
B	4	2	0	1

	Electricité	Pétrole	Gaz
W	5	3	6
X	1	0	1
Y	0	4	0
Z	3	0	4

Exercice 5 Même chose avec trois produits finaux A, B, C et trois matières intermédiaires X,Y,Z. Les données étant présentées dans les tableaux suivants.

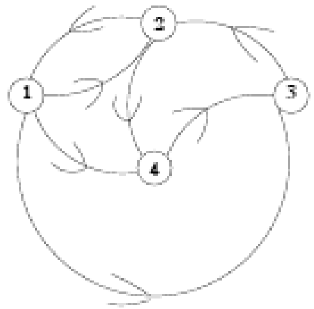
	A	B	C
X	2	3	1
Y	0	2	0
Z	1	2	1

	Electricité	Pétrole	Gaz
X	5	2	1
Y	0	2	1
Z	0	2	2

Exercice 6 Écrire sous forme matricielle le sytème d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2x & +3y & -3z & +2t & = & 5 \\ x & -3y & -z & +t & = & -1 \\ 2x & +y & +z & -t & = & 2 \end{cases}$$

Exercice 7 Grâce au calcul matriciel (et à la calculatrice) donner le nombre de chemins de longueur 7 allant de 1 à 3 dans le graphe de la page suivante. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 5 en tout ?



Propriété 1.1.3 *Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors*
- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ *(associativité),*
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ *(distributivité).*
- *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $A \times I_n = I_n \times A = A$.*

Remarque 1.1.3 Attention, $\boxed{A \times B \neq B \times A}$ en général.

Prenons le cas général avec A d'ordre $m \times p$ et B d'ordre $p \times n$. Le produit $A \times B$ est défini, c'est une matrice d'ordre $m \times n$. Qu'en est-il du produit $B \times A$? Il faut distinguer trois cas :
- si $m \neq n$ le produit $B \times A$ n'est pas défini ;
- si $m = n$ mais $p \neq n$, le produit $A \times B$ est défini et c'est une matrice d'ordre $m \times n$ tandis que le produit $B \times A$ est défini mais c'est une matrice d'ordre $p \times p$ donc $A \times B \neq B \times A$;
- si $m = n = p$, A et B sont deux matrices carrées d'ordre m. Les produits $A \times B$ et $B \times A$ sont aussi carrés et d'ordre m mais là encore, en général, $A \times B \neq B \times A$.

Exemple 1.1.6 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient $A \times B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 18 & -15 \end{pmatrix}$ et $B \times A = \begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 On dit que deux matrices A et B commutent si $A \times B = B \times A$. Trouver toutes les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Pour i, j entiers compris entre 1 et n, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) (ligne i et colonne j) qui vaut 1. Pour toute matrice $A = (aij)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note
- pour tout entier i compris entre 1 et n : $L_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ sa ligne numéro i (c'est une matrice à une ligne et n colonnes) et
- pour tout entier j compris entre 1 et n : $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ sa colonne numéro j (c'est une matrice à n lignes et une colonne).

On pourra écrire $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_n \end{pmatrix}$.

Définition 1.1.8 *On appelle **matrice de transvection** toute matrice de la forme :*

$$T_{ij}(\lambda) = I_n + E_{ij}$$

avec $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ est donc une matrice triangulaire dont tous les termes diagonaux valent 1 et de termes hors de la diagonale tous nuls sauf celui d'indice (i,j) (i. e. en ligne i et colonne j) qui vaut λ.

Définition 1.1.9 *On appelle **matrice de dilatation** toute matrice de la forme :*

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii},$$

avec $1 \leq i \neq j \leq n$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}^\star$.

Une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ est donc diagonale de termes diagonaux tous égaux à 1 sauf le numéro i qui vaut λ.

Théorème 1.1.1

- *la multiplication à gauche par une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier la ligne i par λ,*
- *la multiplication à droite par une matrice de dilatation $D_j(\lambda)$ a pour effet de multiplier la colonne j par λ,*
- *la multiplication à gauche par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$,*
- *la multiplication à droite par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la colonne C_j par $C_j + \lambda C_i$.*

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$ Soit A une matrice 3×3. Écrire sous forme matricielle l'opération qui consiste à ajouter la première colonne multipliée par 3 à la troisième colonne.

Définition 1.1.10 - *Matrice transposée*
*Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une matrice de format $m \times n$, on définit la **matrice transposée** de A, notée A^T, par $A = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$.*

C'est donc une matrice $n \times m$ obtenue en échangeant lignes et colonnes de la matrice initiale.

Exemple 1.1.7 Soit la matrice A d'ordre 2×3 suivante $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Sa transposée est la matrice A^T d'ordre 3×2 suivante $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Propriété 1.1.4

- $(A^T)^T = A$ *si* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ *si* $\alpha \in \mathbb{K}$ *et* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
- $(A + B)^T = A^T + B^T$ *si* $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
- $(A \times B)^T = B^T \times A^T$ *si* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$ Vrai-Faux 1.
Soient A et B deux matrices. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si le produit AB est défini, alors le produit BA est défini.
2. Si la somme $A + B$ est définie, alors le produit AB est défini.
3. Si le produit AB est défini, alors le produit $B^T A^T$ est défini.
4. Si la somme $A + B$ est définie, alors le produit AB^T est défini.

5. Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme $A+B$ est définie.
6. Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme $A+B^T$ est définie.
7. Si les produits AB et B^TA sont définis, alors la somme $A+A^T$ est définie.
8. Si les produits AB et B^TA sont définis, alors la somme $A+B^T$ est définie.
9. Si le produit AB est défini, alors la somme AA^T+BB^T est définie.
10. Si le produit AB est défini, alors la somme A^TA+BB^T est définie.

Définition 1.1.11 - *Matrice symétrique, matrice antisymétrique*

– *Une matrice A est dite **symétrique** si $A^T = A$.*
– *Une matrice A est dite **antisymétrique** si $A^T = -A$.*

Exemple 1.1.8

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 \\ 5 & 4 & 0 \\ -9 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique.
- $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -9 \\ -5 & 0 & 7 \\ 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique.

Définition 1.1.12 - *Matrice inversible, matrice singulière*

– *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** ou **régulière** si elle est symétrisable pour le produit matriciel, autrement dit s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que*
$$A \times B = B \times A = I_n.$$
– *L'**inverse**, s'il existe, d'une matrice A est noté A^{-1}.*
– *Une matrice non régulière est dite **singulière**.*

Exercice 11 Calculer a, b, c, d tels que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$.

Exercice 12 Vérifier que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 On considère le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} 3x_1 & +x_2 & = & y_1 \\ x_1 & -x_2 & = & y_2 \end{array} \right.$$

Exprimer y_1 et y_2 en fonction de x_1 et x_2. En déduire l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant les opérations sur les lignes. Recommencer avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 Considérons les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier qu'on a $B = A + 4I_3$.

2. Trouver une formule liant B et B^2.
3. Trouver une relation entre A, A^2 et I_3.
4. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 16 Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour un entier n quelconque. Faire la même chose avec le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ à la place du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Écrire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire des deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. En déduire $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis l'expression de A^n.

Proposition 1.1.1 *Soient A et B deux matrices inversibles, alors*
- *A^{-1} l'est aussi et $(A^{-1})^{-1} = A$,*
- *A^T l'est aussi et $(A^T)^{-1}$,*
- *$A \times B$ l'est aussi et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.*

Définition 1.1.13 *Deux matrices A et B de même taille $m \times n$ sont dites équivalentes si et seulement s'il existe deux matrices inversibles P et Q (de tailles respectives $n \times n$ et $m \times m$) telles que : $A = QBP^{-1}$.*

Définition 1.1.14 *Deux matrices carrées A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que : $A = PBP^{-1}$.*

Proposition 1.1.2 *Si deux matrices sont semblables, alors elles sont équivalentes.*

Exercice 17 Vrai-Faux 2.
Soit A une matrice carrée. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si A est inversible, alors $AA^T = A^T A$.
2. Si A est inversible, alors AA^T est inversible.
3. Si A est inversible, alors $A + A^T$ est inversible.
4. Si A est inversible, alors A est équivalente à la matrice identité.
5. Si A est inversible, alors A est semblable à la matrice identité.

Exercice 18 Vrai-Faux 3.
Soit A une matrice carrée. On dit que A est diagonale si tous ses coefficients d 'ordre (i, j) avec $i \neq j$, sont nuls. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si A est diagonale, alors A est inversible.
2. Si A est diagonale, alors A est symétrique.
3. Si A est diagonale et si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors A est inversible.
4. Si A est diagonale, alors A est semblable à la matrice identité.
5. Si A est diagonale, alors A est équivalente à la matrice identité.

Définition 1.1.15 - *Trace*
*Si A est une matrice carrée d'ordre n, on définit la **trace** de A comme la somme des éléments de la diagonale principale :*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exemple 1.1.9 La trace de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ est $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 + (-2) = 1$.

Propriété 1.1.5

– *Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors*
  - $tr(A^T) = tr(A)$,
  - $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

– *Si A est une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times m$, alors $tr(A \times B) = tr(B \times A)$.*

Exercice 19 Pour quelle valeur de x la trace de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2x^3 & 4 & 1 \\ 0 & 3x^2 & 2 \\ 5 & 6 & -12x \end{pmatrix}$ est-elle minimale ? Et pour quelle valeur de x est-elle maximale ?

Exercice 20 On note $\mathrm{tr}(A)$ la trace de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $tr(AB) = tr(BA)$.
2. En déduire que deux matrices carrées semblables ont la même trace.
3. Soit A une matrice carrée non nulle. Montrer que les traces de AA^T et A^TA sont strictement positives.

1.2 Calcul pratique d'un déterminant

Définition 1.2.1 - *Déterminant d'une matrice d'ordre n*

*Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ une matrice carrée d'ordre n. Étant donné un couple (i, j) d'entiers, $1 \le i, j \le n$, on note A_{ij} la matrice carrée d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A. On définit le **déterminant** de A, et on le note $\det(A)$, par récurrence sur l'ordre de la matrice A :*

– *si $n = 1$: le déterminant de A est le nombre $\det(A) = a_{11}$,*

– *si $n > 1$: le déterminant de A est le nombre*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \text{ quelle que soit la ligne } i,\ 1 \le i \le n,$$

ou, de manière équivalente, le nombre

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \text{ quelle que soit la colonne } j,\ 1 \le j \le n.$$

Remarque 1.2.1 Pour retrouver les signes de ces deux formules, on peut remarquer que la distribution des signes $+$ et $-$ avec la formule $(-1)^{i+j}$ est donnée par :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Exemple 1.2.1 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ alors

$$\det(A_{11}) = a_{22},\ \det(A_{12}) = a_{21},\ \det(A_{21}) = a_{12},\ \det(A_{22}) = a_{11}$$

et on peut calculer $\det(A)$ par l'une des formules suivantes :

- $a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (développement suivant la ligne $i = 1$),
- $-a_{21}\det(A_{21}) + a_{22}\det(A_{22}) = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}$ (développement suivant la ligne $i = 2$),
- $a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ (développement suivant la colonne $j = 1$),
- $-a_{12}\det(A_{12}) + a_{22}\det(A_{22}) = -a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}$ (développement suivant la colonne $j = 2$).

Ces formules donnent bien le même résultat.

Remarque 1.2.2 Il convient d'utiliser cette définition après avoir fait apparaître sur une même rangée le plus possible de zéros sachant que

- si deux colonnes (resp. deux lignes) sont identiques ou proportionnelles, alors $\det(A) = 0$,
- si on échange deux colonnes (resp. deux lignes), alors le déterminant est changé en son opposé,
- on ne change pas un déterminant si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).

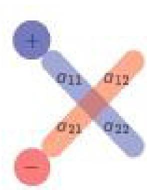
Exemple 1.2.2 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned}
\det(A_{11}) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 10,\ \det(A_{12}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 0,\ \det(A_{13}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0,\\
\det(A_{21}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -3,\ \det(A_{22}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5,\ \det(A_{23}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3,\\
\det(A_{31}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2,\ \det(A_{32}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,\ \det(A_{33}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2,
\end{aligned}$$

et on peut calculer $\det(A)$ par l'une des formules suivantes :

- $1 \times \det(A_{11}) + 0 \times \det(A_{12}) + 1 \times \det(A_{13}) = 10 + 0 + 0 = 10$,
- $0 \times \det(A_{21}) + 2 \times \det(A_{22}) + 0 \times \det(A_{23}) = 0 + 2 \times 5 + 0 = 10$, (formule pratique car il n'y a qu'un déterminant à calculer),
- $0 \times \det(A_{31}) + 3 \times \det(A_{32}) + 5 \times \det(A_{33}) = 0 + 0 + 5 \times 2 = 10$,
- $1 \times \det(A_{11}) + 0 \times \det(A_{21}) + 0 \times \det(A_{31}) = 10 + 0 + 0 = 10$, (formule pratique car il n'y a qu'un déterminant à calculer),
- $0 \times \det(A_{12}) + 2 \times \det(A_{22}) + 3 \times \det(A_{32}) = 0 + 2 \times 5 + 0 = 10$,
- $1 \times \det(A_{13}) + 0 \times \det(A_{23}) + 5 \times \det(A_{33}) = 0 + 0 + 5 \times 2 = 10$.

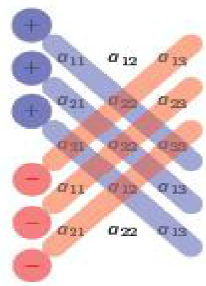
Proposition 1.2.1 - *Déterminant d'une matrice d'ordre 2*
Soit A une matrice carrée d'ordre $n = 2$. Le déterminant de A peut se calculer à l'aide de la technique suivante :



Exemple 1.2.3 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ alors

$$\det(A) = 5 \times 3 - 7 \times 4 = 15 - 28 = -13.$$

Proposition 1.2.2 - *Déterminant d'une matrice d'ordre 3 : Règle de Sarrus*
Soit A une matrice carrée d'ordre $n = 3$. Le déterminant de A peut se calculer à l'aide de la technique suivante :



Exemple 1.2.4 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\det(A) = (1 \times 2 \times 5 + 0 \times 0 \times 0 + 0 \times 0 \times 0) - (1 \times 2 \times 0 + 0 \times 3 \times 1 + 5 \times 0 \times 0) = 10.$$

Exemple 1.2.5 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, alors

$$\det(A) = (5 \times 3 \times 6 + 4 \times 1 \times 1 + 2 \times 7 \times 2) - (1 \times 3 \times 2 + 2 \times 1 \times 5 + 7 \times 4 \times 6) = -62.$$

Propriété 1.2.1 *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.*

Théorème 1.2.1 *A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.

Exercice 21 Trouver pour quelles valeurs de t la matrice $\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}$ est inversible.

Propriété 1.2.2
- $\det(A^T) = \det(A)$,
- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$,
- $\det(A \times B) = \det(A)\det(B)$.

Définition 1.2.2 *Rang*
*Le **rang** d'une matrice quelconque A est égal au plus grand entier s tel que l'on puisse extraire de A une matrice carrée d'ordre s inversible, c'est-à-dire de déterminant non nul. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes (ajout à une colonne - resp. une ligne - une combinaison linéaire des autres colonnes - resp. lignes) d'une matrice ne modifient pas le rang.*

Exemple 1.2.6 Soit la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Le rang de A est 2 :
- A est d'ordre 2×3 donc $s \leq \min\{2, 3\}$ soit $s = 0, 1$ ou 2 ;
- comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la deuxième colonne est nul, on ne peut pas conclure ;
- comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la troisième colonne est non nul, alors $s = 2$.

Exemple 1.2.7 Soit la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- A est d'ordre 3×3 donc $s \leq 3$,
- le déterminant de A est 0 donc $s \neq 3$,
- le déterminant de la sous-matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ est 5, donc $s = 2$.

Exercice 22 Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & -10 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 23 Vrai-Faux 4.

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si une matrice est de rang r, alors elle est équivalente à la matrice I_r.
2. Une matrice est de rang r si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est de rang r.
3. Une matrice est de rang r si et seulement si la famille de ses vecteurs lignes est de rang r.
4. Si une matrice A est de rang r, alors toute matrice formée de r colonnes parmi les colonnes de A est de rang r.
5. Si une matrice formée de r colonnes parmi les colonnes de A est de rang r, alors A est de rang $\geq r$.
6. La matrice nulle est la seule matrice de rang 0.
7. Si deux lignes de A ne sont pas proportionnelles, alors le rang de A est au plus 2.
8. Si deux lignes de A sont proportionnelles, alors le rang de A est strictement inférieur à son nombre de colonnes.
9. Si une matrice carrée de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, extraite de A est inversible, alors A est de rang $\geq r$.
10. Si A est de rang r, alors aucune matrice carrée de $\mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{R})$ extraite de A n'est inversible.
11. Si toute matrice carrée de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, extraite de A est de rang r, alors A est de rang r.

Chapitre 2

Systèmes linéaires

2.1 Intersection de droites et de plans

Une équation linéaire à deux inconnues, du type $a_1x + a_2y = b$, est l'équation d'une droite dans le plan. Plus précisément, si a_1, a_2 et b sont des réels fixés, tels que $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$, l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $a_1x + a_2y = b$ est une droite affine. Chercher les couples (x, y) qui vérifient plusieurs équations du même type, c'est chercher les points communs à plusieurs droites affines. Voici trois exemples de systèmes de 3 équations à 2 inconnues.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-y &=& -1 \\ x+y &=& 1 \\ y &=& 2 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcr} x-y &=& -1 \\ x+y &=& 1 \\ y &=& 1 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcr} x-y &=& -1 \\ 2x-2y &=& -2 \\ -x+y &=& 1 \end{array}\right. .$$

Le premier n'a pas de solution. Le second a une solution unique : la solution de ses deux premières équations vérifie la troisième. Le troisième système a une infinité de solutions : ses trois équations sont équivalentes.

La FIGURE 2.1 donne une interprétation géométrique des trois systèmes. Dans chacun des trois graphiques, D_1, D_2, D_3 sont les droites correspondant aux trois équations du système. Résoudre un système de m équations à 2 inconnues, c'est déterminer l'intersection de m droites dans le plan. Elle peut être vide, réduite à un point, ou égale à une droite.

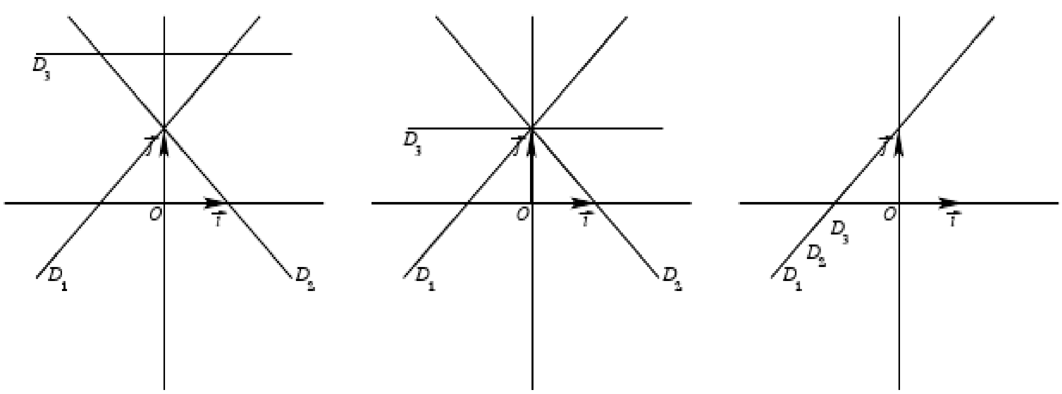


FIGURE 2.1 – *Interprétations géométriques de 3 systèmes linéaires de 3 équations à 2 inconnues.*

Une équation linéaire à trois inconnues x, y, z est l'équation d'un plan dans l'espace. Voici trois systèmes de deux équations à trois inconnues.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z &=& 1 \\ -x-y-z &=& -1 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcr} x+y+z &=& 1 \\ -x-y-z &=& 1 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcr} x+y+z &=& 1 \\ x-y+z &=& -1 \end{array}\right. .$$

Les deux équations du premier système représentent le même plan. L'ensemble des solutions du système est ce plan. Dans le second système, les équations sont celles de deux plans parallèles : leur intersection est vide. Le troisième système est le cas général : l'intersection des deux plans est une droite. Les trois cas sont illustrés par la FIGURE 2.2.

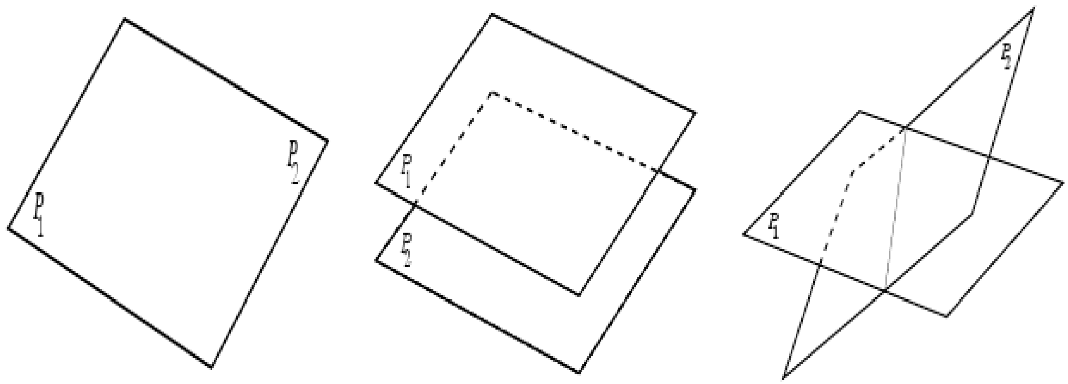


FIGURE 2.2 – *Interprétations géométriques de 3 systèmes linéaires de 2 équations à 3 inconnues.*

Un système de 3 équations à 3 inconnues peut avoir une solution unique (l'intersection de trois plans "en position générale" est un point de l'espace). Mais il peut se faire que deux des plans soient parallèles, auquel cas le système n'aura pas de solution, ou bien que l'un des plans contienne l'intersection des deux autres, auquel cas le système aura une infinité de solutions.

Un **système linéaire de m équations à n inconnues** se présente sous la forme suivante.

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1+ & \dots & +a_{1,j}x_j+ & \dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1+ & \dots & +a_{i,j}x_j+ & \dots & +a_{i,n}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1+ & \dots & +a_{m,j}x_j+ & \dots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right. .$$

Une solution de (S) est un n-uplet de réels qui satisfont à la fois ses m équations. Résoudre le système (S) c'est décrire l'ensemble des solutions.

$\boxed{\textbf{Exercice 24}}$ Trouver toutes les fonctions polynômes f du second degré définies sur $\mathbb{R}$ sachant que

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -3 \text{ (f' est la fonction dérivée de f)}$$

et dont la courbe représentative passe par le point $A\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 25}}$ Lorsqu'on augmente de 10 cm le côté AB du rectangle $ABCD$, l'aire double. Lorsqu'on augmente de 40 cm le côté BC du même rectangle $ABCD$, le périmètre double. Quelle est l'aire du rectangle $ABCD$?

$\boxed{\textbf{Exercice 26}}$ Julien cherche à résoudre le problème suivant. Un père dit à son fils : « Tiens, aujourd'hui j'ai 6 fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as en ce moment ». Sachant que la somme des âges du père et du fils est 95 ans, trouver l'âge de chacun d'eux.
Julien a écrit : « Soit x l'âge actuel du fils, soit y l'âge actuel du père. On a $x + y = 95$. »
Ne sachant pas traduire la première phrase de l'énoncé, il cherche à faire un dessin qui pourrait l'aider. Quel dessin lui suggérez-vous ?

$\boxed{\textbf{Exercice 27}}$ On a perdu les coefficients des trois disciplines d'un examen mais on connaît les résultats de 3 candidats :

Discipline \ Candidat	A	B	C
Mathématiques	10	5	12
Anglais	12	13	20
Informatique	9	10	8
Moyenne	10	8	12

Retrouver les coefficients de chacune des matières.

Exercice 28 Un capital de 50000 euros est partagé en deux parties. La première partie est placée à 6% et la seconde à 8%. Le revenu annuel est le même que si tout le capital était placé à $6,8\%$.
Calculer la valeur de chaque partie du capital ainsi placé.

2.2 Ensemble des solutions

Considérons un système (S) de m équations à n inconnues.

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1+ & \dots & +a_{1,j}x_j+ & \dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1+ & \dots & +a_{i,j}x_j+ & \dots & +a_{i,n}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1+ & \dots & +a_{m,j}x_j+ & \dots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right. .$$

- Les coefficients $a_{i,j}$ et b_i sont des réels donnés.
- Les variables x_i sont les **inconnues**.
- Il faut comprendre (S) comme la conjonction (“et”) de m assertions portant sur les variables $(x_1, \dots, x_n)$.
- Une solution est un n-uplet de réels qui vérifie chacune des m équations. L'ensemble des solutions est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.
- Un système est **impossible** ou **incompatible** s'il n'admet pas de solution. Un système est **possible** ou **compatible** s'il admet une ou plusieurs solutions.
- Deux systèmes à n inconnues sont **équivalents** si et seulement si leurs ensembles de solutions sont les mêmes.
- Par convention, on regroupe les termes contenant les inconnues à gauche de l'égalité, les termes constants à droite. La partie gauche s'appelle le **premier membre**, le m-uplet des constantes à droite de l'égalité est le **second membre**.
- On dit d'un système qu'il est **homogène** si tous les termes du second membre sont nuls. À un système (S), on associe le système homogène (H) obtenu en conservant le premier membre de (S) et en annulant le second membre.

$$(H)\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1+ & \dots & +a_{1,j}x_j+ & \dots & +a_{1,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1+ & \dots & +a_{i,j}x_j+ & \dots & +a_{i,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1+ & \dots & +a_{m,j}x_j+ & \dots & +a_{m,n}x_n & = & 0 \end{array}\right. .$$

On a le résultat fondamental suivant :

La solution générale d'un système linéaire est la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène associé.

On retrouve ce même principe dans des problèmes très différents : équations de récurrence, équations différentielles, etc.).

Exemple 2.2.1 Résolvons le système linéaire (S) suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 4y & = & -2 \\ 3x & + & 3y & = & 0 \end{array}\right.$$

– Le système homogène (H) associé à (S) est donné par $(H)\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 4y & = & 0 & (L_1) \\ 3x & + & 3y & = & 0 & (L_2) \end{array}\right.$ et peut se réécrire sous la forme matricielle $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Supposons que A désigne la matrice du système, on sait alors que A est inversible (ou que (H) admet une unique solution) si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Ici $\det(A) = (2 \times 3) - (3 \times 4) = -18 \neq 0$ donc (H) admet une unique solution (comme (S) d'ailleurs). On a $x = -y$ grâce à (L_2) et par substitution dans (L_1) on obtient $(x, y) = (0, 0)$, qui représente la solution générale du système homogène associé.
– Déterminons une solution particulière de (S). Si on a cette fois-ci
$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 4y & = & -2 & (L_1) \\ 3x & + & 3y & = & 0 & (L_2) \end{array}\right.$$
la ligne (L_2) nous fournit comme précédemment l'égalité $x = -y$ et par substitution dans (L_1), on trouve $2y = -2 \Leftrightarrow y = -1$. Par conséquent, $(x, y) = (1, -1)$ est une (la) solution particulière de (S).

Finalement $(0, 0) + (1, -1) = (1, -1)$ est la solution générale de (S).

Exemple 2.2.2 Résolvons le système linéaire (S) suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 4y & = & -2 \\ -x & - & 2y & = & 1 \end{array}\right.$$

– Le système homogène (H) associé à (S) est donné par $(H)\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 4y & = & 0 & (L_1) \\ -x & - & 2y & = & 0 & (L_2) \end{array}\right.$ et peut se réécrire sous la forme matricielle $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Supposons que A désigne la matrice du système, on sait alors que (H) admet une unique solution si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Ici $\det(A) = (2 \times (-2)) - (4 \times (-1)) = 0$ donc (H) n'admet pas une unique solution (même conclusion pour (S) d'ailleurs), (H) peut admettre une infinité de solutions ou n'admettre aucune solution. On a $x = -2y$ grâce à (L_2) et par substitution dans (L_1) on obtient $0 = 0$ (équation qui ne nous sert à rien). Par conséquent, la solution générale du système associé est donnée par $(x, y) = (-2y, y) = y(-2, 1)$ où y est un réel quelconque.
– Déterminons une solution particulière de (S). Si on a cette fois-ci
$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 4y & = & -2 & (L_1) \\ -x & - & 2y & = & 1 & (L_2) \end{array}\right.$$
la ligne (L_2) nous fournit l'égalité $x = -2y - 1$ et par substitution dans (L_1), on trouve $-2 = -2$ (équation qui ne nous sert à rien). Si on choisit $y = 1$ par exemple, $(x, y) = (-3, 1)$ est une solution particulière de (S).

Finalement $y(-2, 1) + (-3, 1)$ $(y \in \mathbb{R})$ est la solution générale de (S).

Exercice 29

1. Un système d'équations linéaires peut-il avoir deux solutions ?
2. Un système ayant moins d'équations que d'inconnues a-t-il nécessairement une infinité de solutions ?
3. La somme de deux solutions d'un système est-elle une solution de ce système ?
4. Un système homogène a-t-il toujours une solution ?

Exercice 30 *Vrai-Faux 1*

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si un système a plus d'inconnues que d'équations, alors il a une infinité de solutions.
2. Si un système a plus d'équations que d'inconnues, alors il a au plus une solution.
3. Si le rang d'un système est égal au nombre d'équations, et strictement inférieur au nombre d'inconnues, alors le système a une infinité de solutions.
4. Si un système a une solution unique, alors il a autant d'équations que d'inconnues.
5. Si un système a une solution unique, alors son rang est égal au nombre d'inconnues.
6. Si un système n'a pas de solution, alors son second membre est non nul.
7. Si un système a un second membre nul et si son rang est égal au nombre d'équations, alors sa solution est unique.
8. Si un système de deux équations à deux inconnues n'a pas de solution, alors les deux équations sont celles de deux droites parallèles dans le plan.
9. Si un système de deux équations à trois inconnues n'a pas de solution, alors les deux équations sont celles de deux droites parallèles dans l'espace.

Exercice 31 *Vrai-Faux 2*

Soit (S) un système linéaire et (H) le système homogène associé. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Si (S) n'a pas de solution alors (H) n'a pas de solution.
2. Si (S) n'a pas de solution alors (H) a une solution unique.
3. (S) a une solution unique si et seulement si (H) a une solution unique.
4. Si (S) a une solution unique alors (H) a une solution unique.
5. Si (S) a une infinité de solutions, alors (H) a une infinité de solutions.
6. Si s_0 et s_1 sont deux solutions de (S) alors $s_0 + s_1$ est solution de (H)
7. Si s_0 et s_1 sont deux solutions de (S) alors $2(s_0 - s_1)$ est solution de (H)
8. Si s_0 et s_1 sont deux solutions de (S) alors $2(s_0 - s_1)$ est solution de (S)
9. Si s_0 et s_1 sont deux solutions de (S) alors $-s_0 + 2s_1$ est solution de (S)

Le reste de ce chapitre sera consacré à la méthode du pivot de Gauss qui permet de calculer explicitement la (les) solution(s) de (S).

2.3 Transformations équivalentes

L'idée de la méthode de Gauss est de transformer par étapes, le système à résoudre en des systèmes plus simples, tous équivalents au système initial, jusqu'à un système dit "résolu", sur lequel on lit directement la solution. Pour un système linéaire, "plus simple" signifie "avec moins de termes", ou encore "plus de coefficients nuls". Pour annuler des termes, la méthode de Gauss combine les trois transformations de la proposition suivante.

Proposition 2.3.1 *Les transformations suivantes changent tout système en un système équivalent :*

1. *échanger deux lignes,*
2. *multiplier une ligne par un réel non nul,*
3. *ajouter une ligne à une autre ligne.*

Ici, une mise en garde s'impose. Lorsqu'on remplace une ligne par une combinaison linéaire des autres, toute solution du système initial est encore solution du nouveau système. Mais l'ensemble des solutions du nouveau peut être strictement plus grand. La méthode de Gauss consiste à appliquer successivement les transformations de la Proposition 2.3.1. Dans les deux sections suivantes, nous allons décrire les deux étapes principales.

2.4 Forme échelonnée

Nous dirons qu'un système est échelonné s'il se présente sous la forme suivante.

$$
(\mathrm{SE})\left\{\begin{array}{ccccccccc}
p_1y_1 & +c_{1,2}y_2+ & \dots & +c_{1,j}y_j+ & \dots & +c_{1,n}y_n & = & d_1 \\
 & p_2y_2+ & \dots & +c_{2,j}y_j+ & \dots & +c_{2,n}y_n & = & d_2 \\
 & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & p_ry_r+ & \dots & +c_{r,n}y_n & = & d_r \\
 & & & & & 0 & = & d_{r+1} \\
 & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & 0 & = & d_m
\end{array}\right. .
$$

Mettre un système (S) sous forme échelonnée, c'est passer de (S) à (SE) par les transformations de la Proposition 2.3.1, et une permutation éventuelle des coordonnées, de sorte que

1. les inconnues $(y_1, \dots, y_n)$ de (SE) sont celles de (S), mais dans un ordre qui peut être différent,
2. les coefficients $p_1, \dots, p_r$ sont tous non nuls.

Les coefficients $p_1, \dots, p_r$, que l'on appelle les pivots, jouent un rôle important. Pour arriver à la forme échelonnée avec des pivots non nuls on peut être amené au cours des calculs, à

1. permuter des variables
2. permuter des équations (application du point 1. de la Proposition 2.3.1).

Le principe général consiste à utiliser une équation à pivot non nul pour annuler les termes au-dessous du pivot dans les équations suivantes du système. Décrire formellement l'algorithme dans le cas général, conduirait à des notations compliquées. Le mieux est de comprendre son fonctionnement sur des exemples. Dans ce qui suit nous utilisons la notation algorithmique "$\leftarrow$" pour "prend la valeur". À part les permutations éventuelles de variables ou d'équations, les seules transformations utilisées sont du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$, soit "la ligne i est remplacée par la somme de la ligne i et de la ligne k multipliée par λ". Cette transformation change le système en un système équivalent, d'après la Proposition 2.3.1.

Exemple 2.4.1 On considère :

$$
(S_1)\left\{\begin{array}{ccccccc}
x & +2y & -z & +t & = & 1 \\
x & +3y & +z & -t & = & 2 \\
-x & +y & +7z & +2t & = & 3 \\
2x & +y & -8z & +t & = & 4
\end{array}\right.
\Leftrightarrow
\left\{\begin{array}{cccccccl}
x & +2y & -z & +t & = & 1 & \\
 & y & +2z & -2t & = & 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
 & 3y & +6z & +3t & = & 4 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
 & -3y & -6z & -t & = & 2 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1
\end{array}\right.
$$

$$
\Leftrightarrow
\left\{\begin{array}{cccccccl}
x & +2y & -z & +t & = & 1 & \\
 & y & +2z & -2t & = & 1 & \\
 & & & +9t & = & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\
 & & & -7t & = & 5 & L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2
\end{array}\right.
\Leftrightarrow
\left\{\begin{array}{ccccccc}
x & +2y & +t & -z & = & 1 \\
 & y & -2t & +2z & = & 1 \\
 & & 9t & & = & 1 \\
 & & -7t & & = & 5
\end{array}\right.
\quad \boxed{z \leftrightarrow t}
$$

$$
\Leftrightarrow (SE_1)
\left\{\begin{array}{cccccccl}
x & +2y & +t & -z & = & 1 & \\
 & y & -2t & +2z & = & 1 & \\
 & & 9t & & = & 1 & \\
 & & & 0 & = & \frac{52}{9} & L_4 \leftarrow L_4 + \frac{7}{9}L_3
\end{array}\right.
$$

Exemple 2.4.2 On considère :

$$
(S_2)\left\{\begin{array}{ccccccc}
x & +y & -3z & -4t & = & -1 \\
2x & +2y & +2z & -3t & = & 2 \\
3x & +6y & -2z & +t & = & 8 \\
2x & +y & +5z & +t & = & 5
\end{array}\right.
\Leftrightarrow
\left\{\begin{array}{cccccccl}
x & +y & -3z & -4t & = & -1 & \\
 & & 8z & +5t & = & 4 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
 & 3y & +7z & +13t & = & 11 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\
 & -y & +11z & +9t & = & 7 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1
\end{array}\right.
$$

$$
\Leftrightarrow
\left\{\begin{array}{cccccccl}
x & +y & -3z & -4t & = & -1 & \\
 & -y & +11z & +9t & = & 7 & L_4 \leftarrow L_2 \\
 & 3y & +7z & +13t & = & 11 & \\
 & & 8z & +5t & = & 4 & L_2 \leftarrow L_4
\end{array}\right.
\Leftrightarrow
\left\{\begin{array}{cccccccl}
x & +y & -3z & -4t & = & -1 & \\
 & -y & +11z & +9t & = & 7 & \\
 & & 40z & +40t & = & 32 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\
 & & 8z & +5t & = & 4 &
\end{array}\right.
$$

$$\Leftrightarrow (SE_2)\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & +y & -3z & -4t & = & -1 & \\ & -y & +11z & +9t & = & 7 & \\ & & 40z & +40t & = & 32 & \\ & & & -3t & = & -\frac{12}{5} & L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{5}L_3 \end{array}\right.$$

Exemple 2.4.3 *On considère :*

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rrrrrr} x & -y & +z & +t & = & 3 \\ 5x & +2y & -z & -3t & = & 5 \\ -3x & -4y & +3z & +2t & = & 1 \\ 6x & +y & -2t & = & 8 & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & -y & +z & +t & = & 3 & \\ & 7y & -6z & -8t & = & -10 & L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ & -7y & +6z & +5t & = & 10 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ & 7y & -6z & -8t & = & -10 & L_4 \leftarrow L_4 - 6L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & -y & +z & +t & = & 3 & \\ & +7y & -6z & -8t & = & -10 & \\ & & & -3t & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ & & & 0 & = & 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow (SE_3)\left\{\begin{array}{rrrrrr} x & -y & +t & +z & = & 3 \\ & +7y & -8t & -6z & = & -10 \\ & & & -3t & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Remarquez - dans le premier exemple - l'échange de z et t pour respecter la règle des pivots non nuls. La forme échelonnée n'est pas tout à fait la fin de l'histoire, mais elle donne déjà beaucoup de renseignements sur l'ensemble des solutions. Le système (S) peut contenir deux types d'équations. Celles dont le premier membre est nul, s'il y en a, sont les **équations de compatibilité**. Le système ne peut avoir de solution que si leur second membre est aussi nul.

Exercice 32 Montrez que le système $\left\{\begin{array}{rcl} x - y + 2z & = & 1 \\ 2x + 12y + z & = & 5 \\ 3x - 12y + 8z & = & 1 \end{array}\right.$ est équivalent à $\left\{\begin{array}{rcr} x - y + 2z & = & 1 \\ 14y - 3z & = & 3 \\ z & = & -1 \end{array}\right.$

Observons que l'entier r est nécessairement inférieur ou égal à m et à n.

$$r \leq \min(m, n).$$

Définition 2.4.1 *Le* ***rang*** *d'un système d'équations linéaires est le nombre d'équations que compte tout système échelonné équivalent. Il est égal au rang de la matrice des coefficients du système.*

Définition 2.4.2 *Si on ajoute le vecteur colonne des seconds membres b à la matrice des coefficients A, on obtient ce qu'on appelle la* ***matrice augmentée*** *que l'on note $[A|b]$.*

Théorème 2.4.1 *Un système $Ax = b$ de m équations à n inconnues est compatible si et seulement si $rg(A) = rg([A|b])$.*

1. *Si le système a n équations et n inconnues, la matrice A carrée d'ordre n.*
   (a) *Si $rg(A) = n$, (i.e. si $\det(A) \neq 0$) alors $rg(A) = rg([A|b])$ et la solution est unique.*
   (b) *Si $rg(A) = rg([A|b]) < n$, il y a une infinité de solutions.*
   (c) *Si $rg(A) \neq rg([A|b])$, il n'y a pas de solution.*
2. *Si le système a m équations et n inconnues avec $m > n$ alors*
   (a) *Si $rg(A) = rg([A|b]) = n$, la solution est unique.*
   (b) *Si $rg(A) = rg([A|b]) < n$, il y a une infinité de solutions.*
   (c) *Si $rg(A) \neq rg([A|b])$, il n'y a pas de solution.*
3. *Si le système a m équations et n inconnues avec $m < n$ alors*
   (a) *Si $rg(A) = rg([A|b]) \leq m < n$, il y a une infinité de solutions.*
   (b) *Si $rg(A) \neq rg([A|b])$, il n'y a pas de solution.*

Remarque 2.4.1 Soit $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ la matrice des coefficients du système (S). Alors

$$\begin{gathered} 0\le rg(A)\le \min\{n,p\}\\ rg(A)\le rg([A|b])\le \min\{n,p+1\}\end{gathered}$$

Exemple 2.4.4

1. n équations et n inconnues.
   (a) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-3&-7\\-6&4&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}12\\-26\\-4\end{pmatrix}$. On a $rg(A)=3$ ($\det(A)\neq 0$) donc $rg(A)=rg([A|b])$ et la solution est unique.
   (b) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-3&-7\\3&-2&-7\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}14\\-26\\-22\end{pmatrix}$. On a $rg(A)=rg([A|b])=2<3$ donc il y a une infinité de solutions.
   (c) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-3&-7\\3&-2&-7\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}14\\-26\\-20\end{pmatrix}$. On a $rg(A)=2\neq rg([A|b])=3$ donc il n'y a pas de solution.
2. m équations et n inconnues avec $m>n$.
   (a) $A=\begin{pmatrix}2&4\\2&-3\\1&-4\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}4\\18\\14\end{pmatrix}$. On a $rg(A)=rg([A|b])=2$ donc la solution est unique.
   (b) $A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\-1&2&3\\0&-1&-4\\-2&3&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}6\\0\\-3\\-3\end{pmatrix}$. On a $rg(A)=rg([A|b])=2<3$ donc il y a une infinité de solutions.
   (c) $A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\-1&2&3\\0&-1&-4\\-2&3&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}6\\0\\-4\\-3\end{pmatrix}$. On a $rg(A)=2\neq rg([A|b])=3$ donc il n'y a pas de solution.
3. m équations et n inconnues avec $m<n$.
   (a) $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$. On a $rg(A)=rg([A|b])=2<3$ donc il y a une infinité de solutions.
   (b) $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\4&-2&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$. On a $rg(A)=1\neq rg([A|b])=2$ donc il n'y a pas de solution.

Exercice 33 *Vrai-Faux 3*

Soit (S) un système, que l'on résout par la méthode de Gauss. On note (SE) le système sous forme échelonnée. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Si au moins un des pivots est nul, le système est impossible.
2. Si (S) a une solution unique, alors dans (SE), aucune équation n'a son premier membre nul.
3. Si (S) a plus d'équations que d'inconnues, alors dans (SE), au moins une équation a son premier membre nul.
4. Si (S) a moins d'équations que d'inconnues, alors dans (SE) aucune équation n'a son premier membre nul.
5. Si dans (SE) une équation a ses deux membres nuls, alors (S) a une infinité de solutions.

6. Si (S) a moins d'équations que d'inconnues, et si dans (SE) toute équation dont le premier membre est nul a un second membre nul, alors le système a une infinité de solutions
7. Si le système a une infinité de solutions alors il a moins d'équations que d'inconnues, ou bien au moins une équation dans (SE) a un premier membre nul.
8. Si le système est impossible alors dans (SE) aucune équation n'a un second membre nul.

2.5 Forme résolue

Une fois le système mis sous forme échelonnée, s'il y a des équations de compatibilité et si l'un des seconds membres de ces équations est non nul, le système n'a pas de solution (on dit qu'il est impossible). C'est le cas par exemple pour le système (S_1) de la section précédente. S'il n'y a pas d'équations de compatibilité ou si leurs seconds membres sont nuls, le système a des solutions et il faut les calculer. À partir du système échelonné (SH), les étapes successives sont les suivantes :

1. supprimer les équations de compatibilité s'il y en a,
2. diviser chacune des équations restantes par son pivot,
3. si $r < n$, passer les termes en $y_{r+1}, \ldots, y_n$ dans le second membre,
4. calculer $y_r, y_{r-1}, \ldots, y_1$, par combinaisons de lignes, en annulant les termes au dessus de chaque pivot et en commençant par le dernier. Si $r < n$, $y_{r+1}, \ldots, y_n$ sont traités comme des paramètres, qui peuvent prendre des valeurs réelles arbitraires.

Nous reprenons comme exemples les systèmes (S_2) et (S_3) de la section précédente.

$$(SE_2)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & +y & -3z & -4t & = & -1 \\ & -y & +11z & +9t & = & 7 \\ & & 40z & +40t & = & 32 \\ & & & -3t & = & -\frac{12}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccc} x & +y & -3z & -4t & = & -1 & \\ & y & -11z & -9t & = & -7 & L_2 \leftarrow -L_2 \\ & & z & +t & = & \frac{4}{5} & L_3 \leftarrow \frac{1}{40}L_3 \\ & & & t & = & \frac{4}{5} & L_4 \leftarrow -\frac{1}{3}L_4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & +y & -3z & & = & \frac{11}{5} & L_1 \leftarrow L_1 + 4L_4 \\ & y & -11z & & = & \frac{1}{5} & L_2 \leftarrow L_2 + 9L_4 \\ & & z & & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ & & & t & = & \frac{4}{5} & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & +y & & & = & \frac{11}{5} & L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ & y & & & = & \frac{1}{5} & L_2 \leftarrow L_2 + 11L_3 \\ & & z & & = & 0 & \\ & & & t & = & \frac{4}{5} & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & = & 2 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & y & & & = & \frac{1}{5} & \\ & & z & & = & 0 & \\ & & & t & = & \frac{4}{5} & \end{array}\right.$$

Le système est maintenant sous forme résolue : $(2, \frac{1}{5}, 0, \frac{4}{5})$ est la seule solution.

Voici un autre exemple.

$$(SE_3)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & -y & +t & +z & = & 3 \\ & +7y & -8t & -6z & = & -10 \\ & & -3t & & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & -y & +t & +z & = & 3 & \\ & y & -\frac{8}{7}t & -\frac{6}{7}z & = & -\frac{10}{7} & L_2 \leftarrow \frac{1}{7}L_2 \\ & & t & & = & 0 & L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & -y & +t & = & 3 - z \\ & y & -\frac{8}{7}t & = & -\frac{10}{7} + \frac{6}{7}z \\ & & t & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} x & -y & & = & 3 - z & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ & y & & = & -\frac{10}{7} + \frac{6}{7}z & L_2 \leftarrow L_2 + \frac{8}{7}L_3 \\ & & t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} x & & & = & \frac{11}{7} - \frac{1}{7}z & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ & y & & = & -\frac{10}{7} + \frac{6}{7}z & \\ & & t & = & 0 & \end{array}\right.$$

Le système est maintenant sous forme résolue. Il admet une infinité de solutions, dépendant du paramètre z. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions s'écrit

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\tfrac{11}{7}, -\tfrac{10}{7}, 0, 0\right) + z\left(-\tfrac{1}{7}, \tfrac{6}{7}, 1, 0\right), z \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathcal{S}$ est une droite affine, passant par la solution particulière $(\frac{11}{7}, -\frac{10}{7}, 0, 0)$, de vecteur directeur $(-\frac{1}{7}, \frac{6}{7}, 1, 0)$. Évidemment l'écriture de l'ensemble des solutions obtenue par la méthode de Gauss n'est pas la seule possible. Dans l'exemple ci-dessus, $\mathcal{S}$ pourrait aussi s'écrire :

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z, t) = (2, -4, -3, 0) + \lambda(1, -6, -7, 0), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 34 *Vrai-Faux 4*

Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y &=& a \\ -2x + 4y &=& b \end{array} \right. .$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S). Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Pour tout couple (a, b), $\mathcal{S}$ est un singleton.
2. Il existe (a, b) tel que $\mathcal{S}$ soit un singleton.
3. Si $a = b$ alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble vide.
4. Si $b = -2a$ alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble vide.
5. Si $b = -2a$ alors $\mathcal{S}$ est une droite affine.

Exercice 35 *Vrai-Faux 5*

Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x + ay &=& 1 \\ x + by &=& 0 \end{array} \right. .$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S). Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Pour tout couple (a, b), $\mathcal{S}$ est un singleton.
2. Il existe (a, b) tel que $\mathcal{S}$ soit un singleton.
3. Si $a = b$ alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble vide.
4. Si $b = 2a$ alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble vide.
5. Si $a \neq 0$ et $b = 2a$ alors $\mathcal{S}$ est un singleton.

Exercice 36 *Vrai-Faux 6*

Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x + ay &=& 1 \\ 2x + by &=& 2 \end{array} \right. .$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S). Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Pour tout couple (a, b), $\mathcal{S}$ est une droite affine.
2. Il existe (a, b) tel que $\mathcal{S}$ soit une droite affine.
3. Il existe (a, b) tel que $\mathcal{S}$ soit l'ensemble vide.
4. Si $b = 2a$ alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble vide.
5. Si $b = 2a$ alors $\mathcal{S}$ est une droite affine.

Exercice 37 *Vrai-Faux 7*

Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 1\\ -ax+ay-z &=& -1\\ bz &=& 1\end{array}\right. .$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S).

1. Pour tout a, $\mathcal{S}$ est non vide.
2. Si $b \neq 0$, alors pour tout a, $\mathcal{S}$ est un singleton.
3. Si $(a,b)=(1,1)$, alors $\mathcal{S}$ est une droite affine.
4. Si $(a,b)\neq(1,1)$, alors $\mathcal{S}$ a au plus un élément.
5. Si $(0,0,1)\in\mathcal{S}$, alors $b=1$.

Exercice 38 Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel a, l'ensemble des solutions des systèmes suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y &=& 2\\ x-ay &=& a\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} ax+y &=& 2\\ x+ay &=& 2\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+(1-a)y &=& 1\\ (1-a)x-ay &=& a\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} ax+(1-a)y &=& a\\ ax+ay &=& a\end{array}\right. .$$

Exercice 39 Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+3z &=& 5\\ 2x-4y+z &=& 5\\ 3x-5y+2z &=& 8\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z &=& 5\\ 2x+y+z &=& 10\\ x+2z &=& 0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+3z &=& 2\\ -x+4y+z &=& -1\\ 3x-2y-3z &=& 4\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z &=& 3\\ x-y+z &=& 2\\ x+y+2z &=& 0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -y+z &=& 1\\ -5x+2y-z &=& -1\\ x-2z &=& 4\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} +y-2z &=& 3\\ -2x-3y+z &=& 2\\ 3x+y-2z &=& 0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 10x+9y+z &=& -50\\ 9x+10y+5z &=& 40\\ x+5y+9z &=& 180\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 10x+9y+z &=& -50\\ 9x+10y+5z &=& 41\\ x+5y+9z &=& 180\end{array}\right.$$

Exercice 40 Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+3z &=& 0\\ 2x-4y+z &=& 0\\ 3x-6y+2z &=& 0\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z &=& 0\\ 2x+y-2z &=& 0\\ x-z &=& 0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+3z &=& 0\\ -x+4y+z &=& 3\\ -3y-4z &=& -3\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z &=& 0\\ x-y+z &=& 1\\ x+2y-3z &=& -2\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -y+z &=& 1\\ 3x+2y-z &=& 2\\ x-2z &=& -1\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} +y-2z &=& 3\\ -2x-3y+z &=& -2\\ 3x+y-3z &=& 1\end{array}\right.$$

Exercice 41 Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y-z-t &=& 3\\ 2x-z+3t &=& 9\\ 3x+3y+2z &=& 4\\ -x-2y+z-t &=& 0\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z-t &=& 1\\ x+y-z-t &=& -1\\ x+y+z-t &=& 0\\ x-y-z+t &=& 2\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+4y+z+2t &=& 3\\ 6x+8y+2z+5t &=& 7\\ 9x+12y+3z+10t &=& 13\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x-2y+z+t &=& -2\\ 2x-y-z-t &=& -1\\ x+y+z+t &=& -8\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z &=& 4\\ x+3y-z &=& 11\\ 2x+5y-5z &=& 13\\ x+4y+z &=& 18\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} y+z &=& 5\\ x+z &=& 4\\ x+y+2z &=& 9\\ -x+y &=& 1\end{array}\right.$$

Exercice 42 Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel a, l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-2z &=& 5\\ x-2y+3z &=& 2\\ 4x-y+4z &=& a\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x-y+az &=& a\\ x+ay-z &=& -1\\ x+y+z &=& 2\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+(2a-1)z &=& 1\\ ax+y+z &=& 1\\ x+ay+z &=& 3(a+1)\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 3ax+(3a-7)y+(a-5)z &=& a-1\\ (2a-1)x+(4a-1)y+2az &=& a+1\\ 4ax+(5a-7)y+(2a-5)z &=& a-1\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+ay+4z &=& 0\\ x+y+2az &=& -3\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z+t &=& 1\\ x+3y+z-t &=& 1\\ 2x+y-8z+t &=& a\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+az &=& 1\\ 3x-ay+2z &=& 1\\ ax+y-z &=& 0\\ x-2y+z &=& a\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z+t &=& 1\\ x+ay+z+t &=& -1\\ x+y+az+t &=& 1\\ x+y+z+at &=& -1\end{array}\right.$$

Exercice 43 Déterminer, selon les valeurs des paramètres réels a et b, l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y-z &=& 1\\ 5x+2y-2z &=& a\\ 4x+y-z &=& b\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} ax+(b-1)y+2z &=& 1\\ ax+(2b-3)y+3z &=& 1\\ ax+(b-1)y+(b+2)z &=& 2b-3\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z &=& 2\\ x-y+z &=& 4\\ 3x+3y-z &=& 4a\\ (2-a)x+2y-2z &=& -2b\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z+t &=& 1\\ x+ay+z+t &=& b\\ x+y+az+t &=& b^2\\ x+y+z+at &=& b^3\end{array}\right.$$

Exercice 44 Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

1. (a) Si un système a 4 équations et 2 inconnues, alors il est impossible.
   (b) Si un système a 1 équation et 3 inconnues, alors il a une infinité de solutions.
   (c) Si un système a 3 équations, 2 inconnues, et un second membre nul, alors il a au moins une solution.

(d) Si un système a 2 équations, 2 inconnues, et un second membre nul, alors il a exactement une solution.

(e) Si un système a 3 équations et 2 inconnues, et un second membre nul, alors il a une infinité de solutions.

2. Soit (S) un système de 2 équations à 3 inconnues.
   (a) Le système (S) a forcément une infinité de solutions.
   (b) Si les deux équations ont le même premier membre, alors le système (S) a une infinité de solutions.
   (c) L'ensemble des solutions du système (S) est forcément une droite affine.
   (d) Le système (S) est impossible si et seulement si les deux équations sont celles de deux plans parallèles non confondus.
   (e) Si le système (S) a une solution, alors il en a une infinité.
3. Soit (S) un système linéaire et (H) le système homogène associé.
   (a) Le système (H) a forcément au moins une solution.
   (b) Si le système (S) est impossible, alors le système (H) a une infinité de solutions.
   (c) Si le système (S) a une infinité de solutions, alors le système (H) a une infinité de solutions.
   (d) Si s_0 et s_1 sont deux solutions de (S), alors $3s_0 - 2s_1$ est solution de (H).
   (e) Si s_0 et s_1 sont deux solutions de (H), alors $3s_0 - 2s_1$ est solution de (S).
4. Soit (S) un système, que l'on résout par la méthode de Gauss. On note (SE) le système sous forme échelonnée.
   (a) Si (S) a 2 équations et 3 inconnues, alors dans (SE) aucune équation n'a son premier membre nul.
   (b) Si (S) a 3 équations et 2 inconnues, alors dans (SE) au moins une équation a son premier membre nul.
   (c) Si (S) a 4 équations et 3 inconnues, alors dans (SE) exactement une équation a son premier membre nul.
   (d) Si dans (SE) toute équation dont le premier membre est nul a aussi un second membre nul, alors le système (S) a au moins une solution.
   (e) Si (S) a une solution unique, alors dans (SE) aucune équation n'a son premier membre nul.
5. Soit (S) un système de 4 équations à 3 inconnues.
   (a) Le rang de (S) est au moins égal à 3.
   (b) Si (S) est de rang 3, alors (S) a une solution unique.
   (c) Si (S) est de rang 2, alors soit (S) est impossible, soit l'ensemble des solutions de (S) est une droite affine.
   (d) Si (S) est de rang 1, alors l'ensemble des solutions de (S) est un plan affine.
   (e) Si (S) est de rang 3 et si son second membre est nul, alors (0, 0, 0) est l'unique solution de (S).
6. Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcl} 4x - 2y & = & a \\ -2x + y & = & b \end{array}\right.$$

   Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S).
   (a) Si $a = b \neq 0$ alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble vide.
   (b) Il existe un couple (a, b) tels que $\mathcal{S}$ soit un singleton.
   (c) Pour tout couple (a, b) tel que $a \neq b$, le système (S) est impossible.
   (d) Il existe un couple (a, b) tels que $\mathcal{S}$ soit un espace affine de dimension 2.
   (e) Si $a = -2b$ alors $\mathcal{S}$ est une droite affine.

7. Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :
$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcl} x-ay &=& a \\ ax-ay &=& b \end{array}\right. .$$
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S).
   (a) Si $(a,b)=(1,1)$, alors $\mathcal{S}$ est une droite affine.
   (b) Si $a=0$, alors pour tout b le système est impossible.
   (c) Si $(a,b)=(1,2)$, alors $\mathcal{S}$ est un singleton.
   (d) Si $(a,b)=(2,1)$, alors $\mathcal{S}$ est un singleton.
   (e) Si $a\neq b$, alors $\mathcal{S}$ n'est pas vide.
8. Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :
$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcl} x-ay &=& 1 \\ -2x+by &=& -2 \end{array}\right. .$$
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S).
   (a) Si le produit ab est nul, alors $\mathcal{S}$ est un singleton.
   (b) Pour tout couple (a,b), le système (S) a au moins une solution.
   (c) Pour tout couple (a,b), $(1,0)$ appartient à $\mathcal{S}$.
   (d) Il existe un couple (a,b) tel que $(0,0)$ appartienne à $\mathcal{S}$.
   (e) Si $a=b$, alors $\mathcal{S}$ est une droite affine.
9. Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :
$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 1 \\ ay+z &=& 1 \\ bz &=& 2a \end{array}\right. .$$
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S).
   (a) Pour $(a,b)=(1,1)$ le système (S) est sous forme échelonnée.
   (b) Si $(a,b)=(0,1)$, alors $\mathcal{S}$ est vide.
   (c) Si $(a,b)=(0,0)$, alors $\mathcal{S}$ est un plan affine.
   (d) Si $b\neq 0$, alors pour tout a, $\mathcal{S}$ est un singleton.
   (e) Si $a=0$, alors pour tout b, $\mathcal{S}$ est vide.
10. Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :
$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 1 \\ -ax+ay-z &=& -1 \\ -x+y+bz &=& b \end{array}\right. .$$
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S).
   (a) Si $a=1$, alors pour tout b, $\mathcal{S}$ est une droite affine.
   (b) Pour tout (a,b), $\mathcal{S}$ est non vide.
   (c) Il existe (a,b) tel que $\mathcal{S}$ soit un singleton.
   (d) Pour $(a,b)=(1,0)$, $(0,0,0)\in\mathcal{S}$.
   (e) Pour $(a,b)=(1,-1)$, $\mathcal{S}$ est un plan affine.

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter au cours. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Exercice 45 Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système :

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcl} ay+az & = & ab \\ bz & = & a \\ x+y+z & = & 1 \end{array}\right.$$

1. Mettre le système (S) sous forme échelonnée, discuter son rang selon les valeurs de a et b.
2. Si a et b sont tous les deux non nuls, montrer que le système a une solution unique, et donner l'expression de cette solution en fonction de a et b.
3. Pour $a=0$, donner des équations paramétriques de l'ensemble des solutions de (S).

2.6 Les formules de Cramer

Quand un système linéaire de n équations à n inconnues est de rang n, il a une solution unique. Il existe une formule explicite qui relie la solution $(x_1,\ldots,x_n)$ aux coefficients. Elle est connue, au moins pour les faibles valeurs de n, depuis très longtemps, même si elle est attribuée traditionnellement au mathématicien genevois Gabriel Cramer (1704-1752)

Commençons par le cas $n=2$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2 & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2 & = & b_2 \end{array}\right. .$$

Ce système a une solution unique si et seulement si son déterminant est non nul :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} \neq 0.$$

Si c'est le cas, les coordonnées de la solution s'écrivent comme des rapports de déterminants :

$$x_1 = \frac{b_1a_{2,2}-b_2a_{1,2}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}}{\Delta},\ x_2 = \frac{b_2a_{1,1}-b_1a_{2,1}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Une formule analogue permet de calculer la solution d'un système 3×3 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+a_{1,3}x_3 & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+a_{2,3}x_3 & = & b_2 \\ a_{3,1}x_1+a_{3,2}x_2+a_{3,3}x_3 & = & b_3 \end{array}\right. .$$

Ce système a une solution unique si et seulement si son déterminant est non nul :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si c'est le cas, les coordonnées de la solution s'écrivent encore comme des rapports de déterminants :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} \end{vmatrix}}{\Delta},\ x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

La notion de déterminant s'étend à des tableaux carrés de nombres $n\times n$ pour n quelconque. On peut en donner la définition récursive suivante.

Définition 2.6.1 *Soit $(a_{i,j})$, $i,j=1,\ldots,n$ un tableau carré de $n\times n$ réels.*

1. *Si $n = 1$, on appelle déterminant d'un tableau contenant un seul réel ce réel lui-même.*
2. *si $n > 1$, pour $i, j = 1, \ldots, n$ notons $\Delta_{i,j}$ le déterminant du tableau carré $(n-1) \times (n-1)$ obtenu en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne du tableau initial. On appelle déterminant du tableau $n \times n$ la quantité*

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}.$$

Vous pouvez vérifier que l'application de cette définition à un déterminant 2×2 ou 3×3 donne bien le calcul que vous savez effectuer.

Les formules de Cramer expriment les coordonnées de la solution d'un système de n équations à n inconnues comme des rapports de déterminants. Soit le système

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1+ & \ldots & +a_{1,j}x_j+ & \ldots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1+ & \ldots & +a_{i,j}x_j+ & \ldots & +a_{i,n}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1+ & \ldots & +a_{m,j}x_j+ & \ldots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \right. .$$

Le déterminant de ce système est celui du tableau des coefficients du premier membre :

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccccc} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{array} \right| .$$

Théorème 2.6.1 *Le système (S) a une solution unique si et seulement si son déterminant Δ est non nul. Pour $j = 1, \ldots, n$, notons Δ_j le déterminant obtenu en remplaçant la j-ième colonne de Δ par le second membre. Si $\Delta \neq 0$, l'unique solution du système (S) est telle que :*

$$\forall j = 1, \ldots, n,\ x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}.$$

Pour séduisantes qu'elles soient, les formules de Cramer sont parfaitement inefficaces. Le problème vient du calcul du déterminant. Si on applique la Définition récursive 2.6.1, elle implique n calculs de déterminants de taille $(n-1) \times (n-1)$, suivis de n multiplications et $(n-1)$ additions. Pour chacun des déterminants de taille $(n-1) \times (n-1)$, il faudra recommencer avec $n-1$ déterminants de taille $(n-2) \times (n-2)$. Au total, si on programme avec un algorithme récursif la Définition 2.6.1, le calcul d'un déterminant $n \times n$ prendra de l'ordre de $n(n!)$ opérations. Il se trouve que le bon moyen algorithmique de calculer un déterminant est … la méthode du pivot de Gauss. On montre en effet qu'un déterminant n'est pas modifié si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres. Il est changé en son opposé si deux lignes ou deux colonnes sont permutées. Si on applique la méthode du pivot de Gauss au système (S), on arrive à un système échelonné (SE). Le déterminant de (SE) est celui d'un tableau de nombres triangulaire : ses coefficients au-dessous de la diagonale sont nuls. Le déterminant de (SE), qui est égal ou opposé à celui de (S), est tout simplement le produit des pivots. Le nombre d'opérations pour calculer un déterminant $n \times n$ par la méthode du pivot de Gauss est de l'ordre de $\frac{2}{3}n^3$, soit très inférieur à ce que requiert la Définition 2.6.1. Donc pour utiliser les formules de Cramer, il faudrait appliquer la méthode du pivot de Gauss à $(n+1)$ systèmes, avant d'effectuer les quotients des déterminants obtenus : mieux vaut ne l'appliquer qu'à un seul !

Exercice 46 Résolvez le système $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2.7 Calcul de l'inverse de A

Définition 2.7.1 *Soit A une matrice carrée d'ordre n. Étant donné un couple (i,j) d'entiers avec $1 \leq i, j, \leq n$, on note A_{ij} la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A. On appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij} le nombre $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$.*

A étant inversible, pour obtenir A^{-1} il suffit de résoudre le système $Ax = b$ qui admet pour solution $x = A^{-1}b$. On peut alors calculer A^{-1} de deux manières suivantes :

1. (a) On calcule la matrice des cofacteurs des éléments de A, appelée **comatrice** de A,
   (b) on transpose la comatrice de A,
   (c) on divise par $\det(A)$.
2. La matrice A est inversible si et seulement si on obtient par opérations élémentaires sur les lignes de A une matrice triangulaire sans zéros sur la diagonale. Elle est non inversible si et seulement si on obtient une matrice triangulaire, avec un zéro sur la diagonale. Si A est inversible, on effectue les mêmes opérations sur la matrice $[A|I_n]$ jusqu'à obtenir $[I_n|A^{-1}]$.

Exercice 47

1. Calculez l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ à l'aide des deux méthodes précédentes.
2. Utilisez la question précédente pour résoudre le système
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & 2 \\ -x+y+z & = & 5 \\ x-y+z & = & 3 \end{array} \right. .$$

Exercice 48 Un modèle de chaîne haute fidélité en vente promotionnelle est constituée de 3 éléments :
- un amplificateur-récepteur de radio de prix x,
- une platine CD de prix y,
- une paire d'enceintes acoustiques de prix z.

(Les prix sont donnés en euros).
Si une remise de 10% est faite sur le prix x et une remise de 10% sur le prix y, la chaîne complète coûterait $435,6$ euros.
Si les remises sur les prix x et z étaient respectivement de 20% et de 10%, la chaîne complète coûterait $422,4$ euros.
Finalement, si les remises sur les prix y et z étaient respectivement de 10% et de 20%, la chaîne complète coûterait $421,3$ euros.

1. Former le système de trois équations à trois inconnues x, y et z qui résulte des données précédentes.
2. Calculer x, y et z.

Exercice 49 Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par
$$f(x) = -2\ln x + \frac{2}{x^2-1} - 2.$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction F définie sur $]-1;+\infty[$ par :
$$F(x) = ax\ln x + b\ln(x-1) + c\ln(x+1) \text{ soit une primitive de } f \text{ sur }]-1;+\infty[.$$
2. Calculer $\displaystyle\int_2^3 \left(-2\ln x + \frac{2}{x^2-1} - 2\right) dx$.
   (on donnera la valeur exacte en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$).

Exercice 50 Une entreprise fabrique trois produits A,B et C à partir de trois facteurs de production U, V et W. La fabrication :
- d'une unité de A consomme 3 unités de U, 1 unité de V et 2 unités de W,
- d'une unité de B consomme 2 unités de U, 2 unités de V et 1 unité de W,
- d'une unité de C consomme 0 unité de U, 1 unité de V et 1 unité de W.

L'entreprise dispose d'un stock de 18 unités de U, 9 unités de V et 10 unités de W.
Un programme de fabrication est défini par les trois valeurs
. x : quantité de produit A fabriqué,
. y : quantité de produit B fabriqué,
. z : quantité de produit C fabriqué.
On demande de déterminer, s'il existe, un programme de fabrication qui épuise exactement le stock de facteurs disponibles.

1. Écrire sous la forme d'un système linéaire les relations que doivent remplir x, y et z.
2. Résoudre ce système en détaillant la méthode choisie.
3. Donner en conclusion la réponse au problème.

Exercice 51 Une entreprise de mécanique fabrique trois types de pièces A, B et C dans trois ateliers d'usinage, montage et finitions. Les données techniques et commerciales relatives à cette fabrication sont résumées dans le tableau suivant :

	Nombre d'heures-machines nécessaires à la fabrication d'un lot de 10 pièces			Prix de vente d'un
	usinage	montage	finitions	lot
Pièces A	1	1,5	1,5	335
Pièces B	2	1,5	2,5	515
Pièces C	4	4,5	1,5	925
Coût variable de l'heure (euros)	60	80	50	
Capacité de l'atelier (h/mois)	2000	2400	2400	

1. Existe-t-il un programme de fabrication utilisant à plein les capacités de chaque atelier ?
2. Quel est le bénéfice réalisé :
   (a) lors de la fabrication et de la vente de 800 pièces A, 200 pièces B et 200 pièces C ?
   (b) pour le programmme trouvé au 1. ?

Exercice 52 Une entreprise fabrique des appareils de trois types différents (L), (C) et (V).
Pour un appareil de type (L), on a besoin de 10kg d'acier, 2kg de peinture et 10h de travail.
Pour un appareil de type (C), on a besoin de 4kg d'acier, 1kg de peinture et 6h de travail.
Pour un appareil de type (V), on a besoin de 10kg d'acier, 2kg de peinture et 12h de travail.
On appelle respectivement x, y et z les quantités d'appareils (L), (C) et (V) fabriqués et a, p et t les quantités d'acier (en kg) de peinture (en kg) et de travail (en heures) nécessaires pour leur fabrication.

1. Déterminer à l'aide des données précédentes le système linéaire induisant x, y, z, a, p et t.
2. En déduire les quantités d'appareils de chaque type (L), (C) et (V) fabriqués en un mois, sachant que 4200 kg d'acier, 800 kg de peinture et 5000 heures de travail ont été nécessaires.

Chapitre 3

Dimension finie

Ce chapitre est fondamental : les espaces vectoriels vous accompagneront tout au long de vos études mathématiques, et il est indispensable d'avoir compris les espaces de dimension finie avant d'aller plus loin. Même si les espaces vectoriels vous sont présentés ici sous forme assez générale, l'objectif principal est de comprendre le cas de $\mathbb{R}^n$, l'espace vectoriel des n-uplets de réels. N'hésitez pas à vous reporter à l'intuition géométrique que vous avez des vecteurs en dimension 2 et 3.

3.1 Espaces et sous-espaces

Nous considérons dans ce chapitre la théorie des espaces vectoriels de dimension finie. Dans la mesure où il ne sera question que de vecteurs, abandonner les flèches au-dessus de leurs écritures ne devrait pas introduire de confusion. Un espace vectoriel est un ensemble sur lequel sont définies

- une addition interne (on peut ajouter entre eux deux éléments de l'ensemble) ;
- une multiplication externe (on peut multiplier un élément de l'ensemble par un nombre réel).

Ces deux opérations doivent vérifier certaines propriétés de compatibilité qui sont listées dans la Définition 3.1.1.

Définition 3.1.1 *On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si E est muni d'une addition et d'une multiplication externe vérifiant les propriétés suivantes.*

- *Addition :* $\left\{\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (v,w) & \mapsto & v+w \end{array}\right.$
  1. *Associativité :* $\forall u,v,w\in E,\ u+(v+w)=(u+v)+w.$
  2. *Élément neutre :* $\exists e\in E\ ,\ \forall v\in E,\ v+e=e+v=v.$
  3. *Opposé :* $\forall v\in E, \exists v'\in E, v+v'=v'+v=e.$
  4. *Commutativité :* $\forall v,w\in E,\ v+w=w+v.$
- *Multiplication externe :* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times E & \to & E \\ (\lambda,v) & \mapsto & \lambda v \end{array}\right.$
  5. *Associativité :* $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall v\in E\ ,\ \lambda(\mu v)=(\lambda\mu)v.$
  6. *Elément neutre :* $\forall v\in E,\ 1v=v.$
  7. *Distributivité (1) :* $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall v\in E,\ (\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v.$
  8. *Distributivité (2) :* $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall v,w\in E,\ \lambda(v+w)=\lambda v+\lambda w.$

La proposition suivante nous autorisera à noter 0 l'élément neutre pour l'addition (nous l'appellerons "vecteur nul") et $-v$ l'opposé de v.

Proposition 3.1.1 *Soit E un espace vectoriel.*

1. *Le produit par le réel 0 d'un vecteur v quelconque est l'élément neutre pour l'addition :*

$$\forall v\in E,\ 0v=e.$$

2. *Le produit par le réel -1 d'un vecteur v quelconque est son opposé pour l'addition :*
$$\forall v \in E,\ v + (-1)v = e.$$

Exercice 53 Parmi les espaces suivants, quels sont ceux qui sont des espaces vectoriels ?

1. $A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } a + b = 1 \right\}$
2. $B = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } 2a - 5b + c = 0 \text{ et } b + c = 0 \right\}$
3. $C = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \alpha + \gamma - 2\delta = -1 \text{ et } 2\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \right\}$
4. $D = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } a^2 + b = 0 \right\}$
5. $E = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } a - 2b - 3c - 4d = 0 \right\}$
6. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \left\{ \begin{array}{rcl} a - 2b + c & = & 0 \\ b - 2a + c & = & 0 \\ c - 2b + a & = & 0 \end{array} \right. \right\}$
7. $G = \left\{ X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 3X \right\}$
8. $H = \left\{ X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 4X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
9. $K = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = X \right\}.$

L'exemple fondamental est l'ensemble des n-uplets de réels :
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble des n-uplets de réels (couples pour $n = 2$, triplets pour $n = 3, \ldots$), est muni de l'addition et de la multiplication par un réel, coordonnée par coordonnée.
- Addition : $(1, 2, 3, 4) + (3, -1, -2, 2) = (4, 1, 1, 6)$,
- Multiplication externe : $(-2)(3, -1, -2, 2) = (-6, 2, 4, -4)$.

Le singleton contenant seulement le vecteur nul est un espace vectoriel particulier.

L'associativité de l'addition permet d'écrire (sans parenthèses) des combinaisons linéaires de vecteurs.

Définition 3.1.2 *Soient $v_1, \ldots, v_n$ n vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$, tout vecteur s'écrivant :*
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,$$
où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels.

Il est inutile de s'inquiéter de la quantité de propriétés à vérifier dans la Définition 3.1.1. Dans tous les exemples que l'on rencontrera, les opérations sont parfaitement naturelles et leurs propriétés évidentes. On ne vérifie d'ailleurs jamais les 8 propriétés de la Définition 3.1.1. La raison pour laquelle c'est inutile est que tous les espaces vectoriels que l'on utilise sont des sous-espaces d'un espace vectoriel, c'est-à-dire qu'ils sont des sous-ensembles, sur lesquels on applique localement les opérations de l'espace entier.

Définition 3.1.3 *Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E s'il est un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication externe de E.*

Observons que tout sous-espace vectoriel de E contient au moins le vecteur nul. La notion prend tout son intérêt grâce au théorème suivant.

Théorème 3.1.1 *Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-ensemble non vide de E. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :*

$$\begin{array}{ll} \forall v, w \in F & v + w \in F \ ; \\ \forall v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R} & \lambda v \in F. \end{array} \tag{3.1}$$

Théorème 3.1.2 *Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-ensemble non vide de E. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. *F est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *F contient toutes les combinaisons linéaires de 2 de ses vecteurs.*
$$\forall v, w \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda v + \mu w \in F.$$
3. *Pour tout $n > 1$, F contient toutes les combinaisons linéaires de n de ses vecteurs.*
$$\forall v_1, \ldots, v_n \in F,\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1} \lambda_i v_i \in F.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 54}}$ Vrai-Faux 1. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0\}$,
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 1\}$,
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$,
4. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0 \text{ et } x + y + z = 1\}$,
5. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \sin(x) = 0\}$,
6. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}$,
7. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x| = |y| = |z|\}$,
8. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,
9. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.

3.2 Combinaisons linéaires

D'après le Théorème 3.1.2, un sous-espace vectoriel contient toutes les combinaisons linéaires d'un nombre quelconque de vecteurs : pour tout entier n, pour tous vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de E, et pour tous réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$,

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in E.$$

Une des manières de fabriquer un sous-espace vectoriel est de partir d'un ensemble quelconque d'éléments, puis de lui ajouter toutes les combinaisons linéaires de ces éléments.

Définition 3.2.1 *Soit E un espace vectoriel et V un ensemble non vide (fini ou non) de vecteurs de E. On appelle sous-espace engendré par V l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini quelconque d'éléments de V.*

L'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de V est un espace vectoriel, d'après le Théorème 3.1.2. Le même théorème implique aussi que tout espace vectoriel contenant V doit contenir toutes les combinaisons linéaires de ses éléments. Donc le sous-espace engendré par V est inclus dans tout sous-espace contenant V.

Une famille finie de vecteurs est un n-uplet de vecteurs.

$$\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$$

L'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_n$.

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \forall i = 1, \ldots, n, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

À cause de la commutativité de l'addition, changer l'ordre dans lequel on écrit les vecteurs de la famille, ne modifie pas l'espace engendré.
Pour $n = 1$, l'espace engendré par un seul vecteur v (non nul) est une droite vectorielle :

$$\{\lambda v, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Pour $n = 2$, l'espace engendré par deux vecteurs v et w (non proportionnels) est un plan vectoriel :

$$\{\lambda v + \mu w, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est engendré par les n vecteurs

$$(1, 0, \ldots, 0),\ (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1).$$

En effet, on peut écrire tout vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, comme la combinaison linéaire :

$$x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1).$$

Deux familles de vecteurs différentes peuvent engendrer le même espace vectoriel. Par exemple $\mathbb{R}^2$ est engendré par

$$\mathcal{F} = ((1, 0), (0, 1)),$$

mais aussi par

$$\mathcal{G} = ((1, 1), (1, -1)).$$

En effet, tout vecteur (x, y) s'écrit :

$$(x, y) = \frac{x + y}{2}(1, 1) + \frac{x - y}{2}(1, -1).$$

Exercice 55 On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont combinaisons linéaires de e_1 et e_2.
2. Parmi les vecteurs suivants, repérer ceux qui sont combinaisons linéaires de e_1 et e_2 puis expliciter la combinaison linéaire correspondante.

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 56 On considère les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que tout vecteur X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3.
2. Est-ce le cas si l'on considère seulement la famille e_1, e_2 ?
3. Est-ce le cas si l'on remplace e_3 par le vecteur $\tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$?
4. Est-ce le cas si l'on choisit la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?

Exercice 57 Pour chacune des familles des vecteurs suivantes, déterminer son rang et donner une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre.

1. $((1,0,1),(-1,0,-1),(2,0,2))$
2. $((1,0,1),(-1,0,-1),(2,0,2),(0,1,0),(1,1,1),(1,-2,1))$
3. $((1,0,1),(-1,0,-1),(2,0,2),(0,1,0),(1,1,1),(1,-2,-1))$
4. $((1,0,1,0),(-1,0,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,2,1,2))$
5. $((1,0,1,0),(-1,0,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,2,1,0))$
6. $((1,0,1,0),(-1,0,-1,0),(1,1,1,0),(0,1,0,1),(1,2,1,0))$

Définition 3.2.2 *Soit E un espace vectoriel et F une famille d'éléments de E. On dit que F est une famille génératrice si l'espace engendré par F est égal à E.*

Par exemple $\mathcal{F} = ((1,0),(0,1))$ et $\mathcal{G} = ((1,1),(1,-1))$ sont deux familles génératrices de $\mathbb{R}^2$. Par contre $((0,1),(0,2))$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. Les familles suivantes sont aussi des familles génératrices de $\mathbb{R}^2$.

$$((1,0),(0,1),(1,1))\,;\ ((1,1),(1,-1),(0,1))\,;\ ((1,0),(0,1),(1,1),(1,-1)).$$

Par rapport à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, elles contiennent des vecteurs superflus. Si dans une famille de vecteurs, un vecteur est combinaison linéaire des autres, on peut l'enlever de la famille sans changer l'espace engendré. Une famille de laquelle on ne peut rien enlever sans changer l'espace engendré est une famille libre.

Définition 3.2.3 *Soit $F = (v_1, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs. On dit que $\mathcal{F}$ est une famille libre si pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow (\forall i = 1, \dots, n, \lambda_i = 0).$$

Elle est dite liée dans le cas contraire.

On dit aussi que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont linéairement indépendants quand leur famille est libre. Comme cas particuliers, une famille contenant le vecteur nul est liée ; une famille contenant un seul vecteur non nul est libre. On utilise souvent la caractérisation suivante :

Proposition 3.2.1 *Soit n un entier au moins égal à 2. Une famille de n vecteurs est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.*

Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $((0,1),(0,2))$ est liée. A l'inverse, les familles $\mathcal{F} = ((1,0),(0,1))$ et $\mathcal{G} = ((1,1),(1,-1))$ sont deux familles libres de $\mathbb{R}^2$. Dans $\mathbb{R}^n$, $((1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1))$ est une famille libre.

Exercice 58 Vrai-Faux 2. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont génératrices, lesquelles ne le sont pas, et pourquoi ?

1. $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$,
2. $\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$,
3. $\{(0,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0)\}$,
4. $\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\}$,
5. $\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1)\}$.

Exercice 59 Vrai-Faux 3. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, lesquelles sont génératrices, lesquelles ne le sont pas, et pourquoi ?

1. $\{(0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-2,7,-10,-1)\}$,
2. $\{(0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\}$,
3. $\{(1,2,3,4),(5,6,7,0),(8,9,0,0),(1,0,0,0)\}$,
4. $\{(0,1,-1,0),(1,0,-1,0),(1,-1,0,0),(0,0,0,1)\}$,
5. $\{(1,1,1,2),(1,1,2,1),(1,2,1,1),(2,1,1,1)\}$.

Exercice 60 Vrai-Faux 4. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont libres, lesquelles ne le sont pas, et pourquoi ?

1. $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$,
2. $\{(1,1,0),(-1,-1,0)\}$,
3. $\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$,
4. $\{(0,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0)\}$,
5. $\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1)\}$.

Exercice 61 Vrai-Faux 5. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, lesquelles sont libres, lesquelles ne le sont pas, et pourquoi ?

1. $\{(0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-2,7,-10,-1)\}$,
2. $\{(0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-1,4,-6,0)\}$,
3. $\{(0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\}$,
4. $\{(0,1,-1,0),(1,0,-1,0),(1,-1,0,0),(0,0,0,1)\}$,
5. $\{(1,1,1,2),(1,1,2,1),(1,2,1,1),(2,1,1,1)\}$.

3.3 Bases

Ce chapitre ne traite que des espaces finiment engendrés.

Définition 3.3.1 *On dit qu'un espace vectoriel est finiment engendré s'il est engendré par un nombre fini de vecteurs.*

Voici deux observations symétriques.

1. Si on ajoute un vecteur à une famille génératrice, alors elle ne peut plus être libre. En effet, tout vecteur ajouté est forcément combinaison linéaire des précédents, ce qui n'est pas possible dans une famille libre.

2. Si on enlève un vecteur à une famille libre, alors elle ne peut plus être génératrice. En effet, le vecteur que l'on vient d'enlever n'est pas combinaison linéaire des autres, donc il n'est pas dans l'espace engendré par les autres.

Définition 3.3.2 *On appelle base toute famille à la fois génératrice et libre.*

Nous avons déjà rencontré plusieurs bases. Les familles $((1,0),(0,1))$ et $((1,1),(1,-1))$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$. Dans $\mathbb{R}^n$, $((1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1))$ est une base, que l'on appelle la base canonique. **Exercice 62** Soit $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ la base naturelle de $\mathbb{R}^3$ (ou base canonique). On considère les trois vecteurs v_1, v_2 et v_3 définis par :

$$v_1=-2e_1-4e_2+5e_3,\quad v_2=3e_1+4e_2-5e_3,\quad v_3=-4e_1-7e_2+10e_3.$$

Montrer que $\mathcal{B}'=\{v_1,v_2,v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

La proposition suivante nous permettra de parler de bases en étant assurés de leur existence. Sa démonstration montrera aussi qu'on peut extraire une base de toute famille génératrice.

Proposition 3.3.1 *Dans un espace vectoriel, différent de* $\{0\}$ *et finiment engendré, il existe une base.*

Exercice 63

1. Montrer que la famille $\mathcal{S}=\{(1,0),(1,1)\}\subseteq\mathbb{R}^2$ engendre $\mathbb{R}^2$.
2. La famille $\mathcal{S}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$? Pourquoi ?

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 3.3.1 *Dans un espace vectoriel, différent de* $\{0\}$ *et finiment engendré, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.*

Le Théorème 3.3.1 permet de définir rigoureusement la notion de dimension.

Définition 3.3.3 *Soit E un espace vectoriel, différent de* $\{0\}$ *et finiment engendré. On appelle dimension de E le nombre d'éléments commun à toute base de E.*

On étend la définition à un espace vectoriel contenant seulement le vecteur nul, en convenant que sa dimension est 0. Les espaces de dimension 1 sont les droites vectorielles, ceux de dimension 2 sont les plans vectoriels. L'espace $\mathbb{R}^n$ est de dimension n. Les sous-espaces de dimension $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$ s'appellent les hyperplans de $\mathbb{R}^n$. Si on connaît la dimension de l'espace, il est facile de vérifier si une famille de vecteurs est ou non une base, grâce au Théorème suivant.

Théorème 3.3.2 *Dans un espace vectoriel de dimension n :*

1. *toute famille libre a au plus n éléments,*
2. *toute famille libre de n éléments est une base,*
3. *toute famille génératrice a au moins n éléments,*
4. *toute famille génératrice de n éléments est une base.*

Comme il est naturel, tout sous-espace vectoriel d'une espace vectoriel de dimension finie est lui-même de dimension finie.

Proposition 3.3.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Tout sous-espace vectoriel de E est de dimension finie, inférieure ou égale à n.*

La dimension de l'espace engendré par une famille de vecteurs est le rang de cette famille.

Définition 3.3.4 *On appelle rang d'une famille de vecteurs la dimension de l'espace vectoriel qu'elle engendre. .*

Les observations suivantes sont des conséquences faciles du Théorème 3.3.2 :
- le rang d'une famille de n vecteurs est au plus n,
- le rang d'une famille de n vecteurs est n si et seulement si cette famille est libre,
- le rang d'une famille de n vecteurs est n si et seulement si cette famille est une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre.

Nous verrons plus loin un moyen systématique pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, et en extraire une base de l'espace engendré. L'intérêt des bases est qu'elles permettent d'identifier tout espace de dimension finie à $\mathbb{R}^n$, grâce à la notion de coordonnées.

Théorème 3.3.3 *Soit E un espace de dimension n et $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Pour tout vecteur $v \in E$ il existe un n-uplet de réels $(x_1, \ldots, x_n)$ unique tel que :*

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i.$$

Les réels $x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées de v dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$. Par exemple, les coordonnées de $(2, 3)$ dans la base $((1, 0), (0, 1))$ sont 2 et 3. Dans la base $((1, 1), (1, -1))$, ses coordonnées sont $\frac{5}{2}, \frac{-1}{2}$. Les coordonnées de $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont $x_1, \ldots, x_n$.

Exercice 64 Déterminer, parmi les familles suivantes, celles qui sont des bases de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \right\}, B_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} \right\}, B_3 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\},$$
$$B_4 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}, B_5 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 65 On considère l'ensemble $F = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\2 & -2 & 2\\2 & -4 & 4\end{pmatrix} X = 2X \right\}$

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Donner une famille génératrice.
3. Cette famille génératrice est-elle une base de F ?

Exercice 66 On considère les espaces vectoriels (e.v.) suivants

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\},\ E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$$
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\},\ E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}.$$

1. Déterminer la dimension de E.
2. Donner une base de E.

Exercice 67 Compléter les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

1. $((1, 1, 1))$
2. $((1, 1, 0))$
3. $((1, 1, 1), (1, -1, -1))$
4. $((1, 1, 0), (1, -1, 0))$
5. $((1, 1, 0), (1, 1, 1))$
6. $((1, 1, 0), (1, -1, 1))$

3.4 Morphismes

Une application entre deux espaces vectoriels est dite linéaire si elle envoie une combinaison linéaire de vecteurs sur la même combinaison linéaire de leurs images.

Définition 3.4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application de E dans F. On dit que f est une application linéaire si*

$$\begin{array}{rc} \forall v, w \in E & f(v+w) = f(v) + f(w), \\ \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} & f(\lambda v) = \lambda f(v). \end{array}$$

Une application linéaire f de E dans F envoie nécessairement le vecteur nul de E sur le vecteur nul de F. Elle envoie l'opposé de v sur l'opposé de $f(v)$. La proposition suivante se démontre facilement, dans le style du Théorème 3.1.2.

Proposition 3.4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels, et f une application de E dans F. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. *f est une application linéaire.*
2. *$\forall v, w \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f(\lambda v + \mu w) = \lambda f(v) \mu f(w)$.*
3. *Pour tout $n > 1$, $\forall v_1, \ldots, v_n \in E$, $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$*
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i).$$

Voici quelques exemples d'applications linéaires :
- de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \mapsto (x+y, 2x+3y)$,
- de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$: $(x, y) \mapsto (y, x, x+y)$,
- de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$: $(x, y, z) \mapsto (y-x, 2z+y)$.

Une application linéaire respecte la structure d'espace vectoriel : l'image d'une somme est la somme des images, l'image du produit par un réel est le produit de l'image par le même réel. D'une application entre deux structures algébriques (groupes, corps, ...) qui respecte la structure, on dit qu'elle est un morphisme. Le vocabulaire classique est le suivant.

Définition 3.4.2 *Une application linéaire de E dans F est un*
- *endomorphisme si $E = F$,*
- *isomorphisme si elle est bijective,*
- *automorphisme si $E = F$ et l'application est bijective.*

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Théorème 3.4.1 *Soient E, F, G trois espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. La composée $g_o f$ est une application linéaire de E dans G :*

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ E & \to & F & \to & G \\ u & \mapsto & f(u) & \mapsto & g_o f(u) = g(f(u)). \end{array}$$

Si une application f est un isomorphisme, son application réciproque, que nous noterons f^{-1} est aussi une application linéaire.

Théorème 3.4.2 *Soit f un isomorphisme de E dans F. Sa réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.*

La composée de f par f^{-1} est l'application identique, ou identité, de E dans lui même. C'est un automorphisme particulier, que nous noterons Id_E :

$$\begin{array}{rcl} Id_E : E & \mapsto & E \\ v & \to & Id_E(v) = v \end{array} .$$

Une combinaison linéaire d'applications linéaires est encore une application linéaire.

Théorème 3.4.3 *Soient E et F deux espaces vectoriels. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux réels. L'application $\lambda f + \mu g$ est encore une application linéaire.*

Nous terminons la section par des interprétations géométriques d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Considérons un plan vectoriel muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$. À tout couple de réels (x, y) est associé le vecteur $x_{\vec{i}} + y_{\vec{j}}$. Une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même est associée à une transformation géométrique du plan, qui à un vecteur associe un autre vecteur. En voici trois (cf. FIGURE 3.1) :

- rotation d'angle $\pi/2$: $(x, y) \to (-y, x)$,
- symétrie par rapport à la première bissectrice : $(x, y) \mapsto (y, x)$,
- projection (orthogonale) sur la première bissectrice : $(x, y) \mapsto ((x + y)/2, (x + y)/2)$.

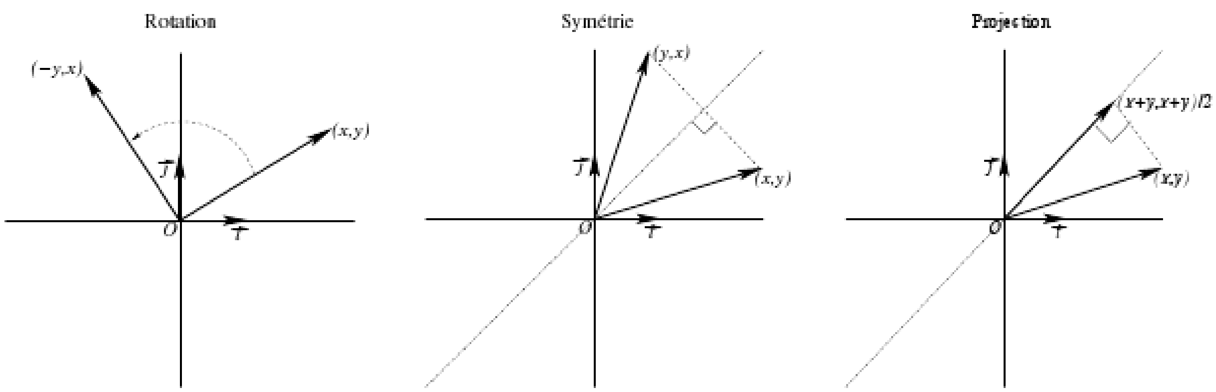


FIGURE 3.1 – *Interprétations géométriques de trois applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: rotation d'angle $\pi/2$, symétrie par rapport à la première bissectrice, projection sur la première bissectrice.*

Les rotations et les symétries sont des automorphismes du plan vectoriel. Les projections sont des endomorphismes, mais elles ne sont pas bijectives. Observons que les translations, par exemple $(x, y) \mapsto (x+2, y-1)$, ne sont pas linéaires. Ce sont des bijections, mais pas des automorphismes du plan vectoriel.

3.5 Images et noyaux

Qu'une application linéaire respecte les combinaisons linéaires entraîne qu'elle respecte aussi les sous-espaces vectoriels, au sens suivant.

Théorème 3.5.1 *Soient E, F deux espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F.*

1. *Soit A un sous-espace vectoriel de E. Alors*
$$f(A) = \{f(v), v \in A\},$$
est un sous-espace vectoriel de F.
2. *Soit B un sous-espace vectoriel de F. Alors*
$$f^{-1}(B) = \{v \in E, f(v) \in B\},$$
est un sous-espace vectoriel de E.

L'ensemble des images par une application linéaire des éléments d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée (point 1.). L'ensemble des éléments de l'espace de départ dont l'image par une application linéaire est dans un sous-espace de l'espace d'arrivée, est un sous-espace de l'espace de départ (point 2.). Attention à la notation $f^{-1}(B)$: elle a un sens même si l'application f n'est pas bijective et donc si l'application réciproque f^{-1} n'existe pas.

Parmi les cas particuliers du Théorème 3.5.1, l'image et le noyau jouent un rôle important.

Définition 3.5.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On appelle :*

1. *image de f et on note $Im(f)$ le sous-espace vectoriel de F :*
$$Im(f) = f(E) = \{f(v), v \in E\}.$$
2. *noyau de f et on note $Ker(f)$ le sous-espace vectoriel de E :*
$$Ker(f) = f^{-1}(0) = \{v \in E, f(v) = 0\}.$$

La notation Ker vient de l'allemand, où noyau se dit "Kern".

Considérons par exemple l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $f : (x, y) \mapsto (x + y, x + y, x + y)$. Son image est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(1, 1, 1)$. Son noyau est l'ensemble des vecteurs (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x + y = 0$: c'est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par le vecteur $(1, -1)$. $Im(f) = \{\lambda(1, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $Ker(f) = \{\lambda(1, -1), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Proposition 3.5.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. L'application f est :*

1. *surjective si et seulement si $Im(f) = F$,*
2. *injective si et seulement si $Ker(f) = \{0\}$.*

Le rang d'une application linéaire est la dimension de son image.

Définition 3.5.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F. On appelle rang de f la dimension de $Im(f)$:*
$$rang(f) = dim(Im(f)).$$

Supposons que E soit de dimension n et choisissons une base $(b_1, \dots, b_n)$. L'image par f de tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $f(b_1), \dots, f(b_n)$. Donc $Im(f)$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $(f(b_1), \dots, f(b_n))$. Le rang de f est la dimension de ce sous-espace ; c'est donc le rang de la famille de vecteurs $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ (cf. Définition 3.3.4). Observons que le rang est inférieur ou égal aux deux dimensions des espaces vectoriels de départ et d'arrivée.
$$\text{rang}(f) \leq \min\{dim(E), dim(F)\}.$$

Théorème 3.5.2 *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans F. L'application f est :*

1. *surjective si et seulement si l'image de toute famille génératrice dans E est une famille génératrice dans F,*
2. *injective si et seulement si l'image de toute famille libre dans E est une famille libre dans F,*
3. *bijective si et seulement si l'image de toute base de E est une base de F.*

La conjonction des Théorèmes 3.5.2 et 3.3.2 implique les relations suivantes entre les dimensions des espaces de départ et d'arrivée.

Corollaire 3.5.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F.*

1. *Si f est surjective alors $dim(E) \geq dim(F)$.*
2. *Si f est injective alors $dim(E) \leq dim(F)$.*
3. *Si f est bijective alors $dim(E) = dim(F)$.*

La dimension est donc une forte contrainte sur la nature des applications linéaires. On peut aussi voir cette contrainte comme suit :

Corollaire 3.5.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension. Une application linéaire de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective ou surjective.*

Il ne peut exister un isomorphisme entre deux espaces vectoriels que s'ils ont la même dimension. Réciproquement, si deux espaces ont la même dimension, on peut toujours construire un isomorphisme entre eux, en envoyant une base de l'un sur une base de l'autre. En particulier, tous les espaces vectoriels de dimension n sont isomorphes à $\mathbb{R}^n$. Si E est de dimension n, avec une base $(b_1, \ldots, b_n)$, tous les vecteurs de E ont une décomposition unique

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i ,$$

où les x_i sont les coordonnées de v (cf. Théorème 3.3.3). L'application de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à v associe le n-uplet de ses coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$. La somme des dimensions de l'image et du noyau est la dimension de l'espace de départ : le Théorème 3.5.3 ci-dessous, est le Théorème du rang.

Théorème 3.5.3 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F.*

$$dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim(E).$$

Exercice 68 On considère les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{l|l} f : (x, y) \mapsto (-x, -y) & f : (x, y) \mapsto (2x, 2y) \\ f : (x, y) \mapsto (x, 0) & f : (x, y) \mapsto (x, x) \\ f : (x, y) \mapsto (y, 0) & f : (x, y) \mapsto (y, y) \\ f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y) & f : (x, y) \mapsto (x - y, x + y) \end{array}$$

Pour chacune de ces applications :

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Donner une interprétation géométrique de f comme transformation du plan vectoriel, muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.
3. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$. L'application est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^2$?
4. Reprendre les deux questions précédentes pour l'application $f - I$, où f est l'application considérée et I désigne l'application identique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 69 On considère les applications suivantes.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x - y, y - z) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y, 2x + 3y) \end{array}$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. L'application g est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer $g \circ f$. Est-elle injective ? surjective ?
4. Déterminer $f \circ g$. Est-elle injective ? surjective ?

3.6 Écriture matricielle

Les espaces vectoriels considérés sont tous de dimension finie > 1. Observons d'abord qu'une application linéaire est déterminée par l'image qu'elle donne d'une base de l'espace de départ.

Proposition 3.6.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $(b_1, \dots, b_n)$ une base de E. Soit $(w_1, \dots, w_n)$ un n-uplet de vecteurs de F. Il existe une application linéaire unique f telle que pour tout $i = 1, \dots, n$, $f(b_i) = w_i$.*

Si on choisit une base dans l'espace d'arrivée, alors les images des vecteurs de la base de départ ont des coordonnées dans cette base. S'il y a n vecteurs de base au départ et m à l'arrivée, l'application linéaire est déterminée par $m \times n$ réels : m coordonnées pour chacun des n vecteurs de base. Une matrice est la représentation sous forme de tableau de ces $m \times n$ réels. Notons $(b_1, \dots, b_n)$ une base de l'espace de départ, et $(c_1, \dots, c_m)$ une base de l'espace d'arrivée. Soit $a_{i,j}$ la i-ième coordonnée de $f(b_j)$:

$$\forall j = 1, \dots, n,\ f(b_j) = a_{1,j}c_1 + \dots + a_{i,j}c_i + \dots + a_{m,j}c_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}c_i.$$

Les coordonnées des vecteurs images $f(b_1), \dots, f(b_n)$ sont conventionnellement notées en colonnes. L'indice i (des vecteurs de la base d'arrivée) est l'indice de ligne, l'indice j (des vecteurs de la base de départ) est l'indice de colonne.

$$
\begin{array}{ccccc|cl}
 & & \text{départ} & & & & \\
f(b_1) & \dots & f(b_j) & \dots & f(b_n) & & \\
\hline
a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} & c_1 & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} & c_i & \text{arrivée} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{m,1} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} & c_m &
\end{array}
$$

Le plus souvent, on se ramènera au cas où l'espace de départ est $\mathbb{R}^n$ et l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^m$, les deux étant munis de leurs bases canoniques.

Comme premier exemple, considérons l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$f : (x, y) \mapsto (x + y, 2x + 3y, x - y).$$

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $((1, 0), (0, 1))$. L'image de ces deux vecteurs est

$$f((1, 0)) = (1, 2, 1) \text{ et } f((0, 1)) = (1, 3, -1).$$

La matrice de f est donc la suivante (attention à l'écriture des vecteurs de l'espace d'arrivée en colonnes).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Munissons maintenant $\mathbb{R}^2$ de la base $((1, 1), (1, -1))$ au départ, et $\mathbb{R}^3$ de la base $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ à l'arrivée. Les images des vecteurs de la base de départ sont

$$\begin{aligned} &f((1, 1)) = (2, 5, 0) = -3(1, 0, 0) + 5(1, 1, 0) + 0(1, 1, 1) \text{ et} \\ &f((1, -1)) = (0, -1, 2) = 1(1, 0, 0) - 3(1, 1, 0) + 2(1, 1, 1). \end{aligned}$$

D'où la matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quand l'espace d'arrivée et l'espace de départ sont les mêmes (l'application est un endomorphisme), on choisit la même base au départ et à l'arrivée. La matrice d'un endomorphisme a autant de lignes que de colonnes : on dit qu'elle est carrée.
Voici les matrices de trois endomorphismes de $\mathbb{R}^2$, dans la base canonique.

– Rotation d'angle $\pi/2$: $(x, y) \mapsto (-y, x)$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
– Symétrie par rapport à la première bissectrice : $(x, y) \mapsto (y, x)$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
– Projection sur la première bissectrice : $(x, y) \mapsto ((x + y)/2, (x + y)/2)$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dans un espace de dimension n, la matrice de l'application identique est la matrice carrée $n \times n$ qui a des 1 sur la diagonale (termes d'indices (i, i)) et des 0 en dehors (termes d'indices (i, j) avec $i \neq j$). On l'appelle matrice identité d'ordre n et on la note I_n :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La représentation matricielle présente l'avantage d'automatiser de nombreux calculs. Nous consacrerons le chapitre suivant au calcul matriciel. Pour l'instant nous allons voir comment la matrice d'une application linéaire permet de calculer l'image d'un vecteur dont on se donne les coordonnées dans la base de départ. Reprenons la situation générale : $(b_1, \dots, b_n)$ est une base de l'espace de départ, et $(c_1, \dots, c_m)$ une base de l'espace d'arrivée. Le coefficient d'indice (i, j) de la matrice de f, noté $a_{i,j}$, est la i-ième coordonnée de $f(b_j)$:

$$\forall j = 1, \dots, n,\ f(b_j) = a_{1,j}c_1 + \dots + a_{i,j}c_i + \dots + a_{m,j}c_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}c_i.$$

Considérons maintenant un vecteur v de l'espace de départ, dont les coordonnées dans la base $(b_1, \dots, b_n)$ sont $(x_1, \dots, x_n)$:

$$v = x_1b_1 + \dots + x_nb_n.$$

L'image de v par f est :

$$f(v) = x_1f(b_1) + \dots + x_nf(b_n) = \sum_{j=1}^{n} x_jf(b_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}c_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \right) c_i.$$

Donc le vecteur $f(v)$ se décompose dans la base $(c_1, \dots, c_m)$ en $f(v) = y_1c_1 + \dots + y_mc_m$, avec :

$$\forall i = 1, \dots, m,\ y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j.$$

On dit que le vecteur $(y_i)_{i=1,\dots,m}$ est le produit de la matrice $(a_{i,j})$ par le vecteur $(x_j)_{j=1,\dots,n}$. Observez que ce produit n'a de sens que si le nombre de coordonnées du vecteur est égal au nombre de colonnes de la matrice. Il est commode, pour calculer le produit d'une matrice par un vecteur, de représenter les x_i en colonne, au-dessus et à droite de la matrice $(a_{i,j})$ (voir FIGURE 3.2) :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{array}.$$

Reprenons l'exemple de l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$f : (x, y) \mapsto (x + y, 2x + 3y, x - y).$$

Les bases respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ étant les bases canoniques, la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

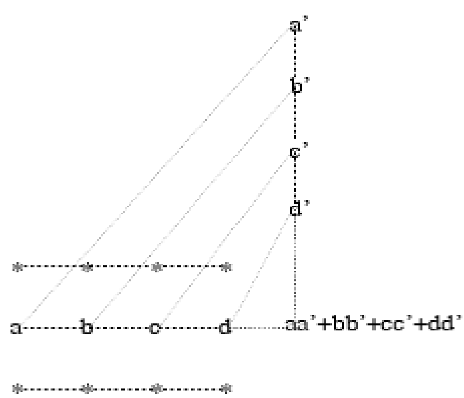


FIGURE 3.2 – *Comment présenter le produit d'une matrice par un vecteur colonne.*

Pour vérifier la cohérence de la notation matricielle, calculons le produit de cette matrice par un vecteur de $\mathbb{R}^2$ quelconque (x, y).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + 3y \\ x - y \end{pmatrix} \end{array}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 70}}$ On considère les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{l|l} f : (x, y) \mapsto (-x, -y) & f : (x, y) \mapsto (2x, 2y) \\ f : (x, y) \mapsto (x, 0) & f : (x, y) \mapsto (x, x) \\ f : (x, y) \mapsto (y, 0) & f : (x, y) \mapsto (y, y) \\ f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y) & f : (x, y) \mapsto (x - y, x + y) \end{array}$$

Déterminer la matrice de chacune de ces applications dans les bases suivantes de $\mathbb{R}^2$.

1. $((1,0),(0,1))$
2. $((0,1),(1,0))$
3. $((0,2),(-3,0))$
4. $((0,1),(1,1))$
5. $((1,1),(1,-1))$

$\boxed{\textbf{Exercice 71}}$ Pour tout entier n, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa bas canonique. Donner la matrice de chacune des applications f suivantes. Déterminer une base de $Im(f)$ et une base de $Ker(f)$.

1. $f : \mathbb{R}^{\nvDash} \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto f(x,y) = (x+y, x-y, 2x)$.
2. $f : \mathbb{R}^{\nVdash} \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (0, y-z, z-x)$.
3. $f : \mathbb{R}^{\nVdash} \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$.
4. $f : \mathbb{R}^{\ntrianglerighteq} \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z,t) \mapsto f(x,y,z,t) = (x+y+2z-t, 2x+y+z+t)$.
5. $f : \mathbb{R}^{\ntrianglerighteq} \to \mathbb{R}$, $(x,y,z,t) \mapsto f(x,y,z,t) = x-y+2z+3t$.

3.7 Détermination pratique de l'image et du noyau

Nous reprenons les notations de la section précédente : E et F sont deux espaces vectoriels, munis respectivement des bases $(b_1,\dots,b_n)$ et $(c_1,\dots,c_m)$. La matrice de l'application linéaire f relative à ces deux bases est $(a_{i,j})$. Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est le vecteur nul. Soit v un vecteur de E et $x = (x_1,\dots,x_n)$ le n-uplet de ses coordonnées dans la base $(b_1,\dots,b_n)$. La condition nécessaire et suffisante sur x pour que $f(v)$ soit nul est que toutes les coordonnées de $f(v)$, c'est-à-dire toutes les lignes du produit Ax, soient nulles :

$$(H)\left\{\begin{array}{ccccccc}
a_{1,1}x_1+ & \dots & +a_{1,j}x_j+ & \dots & +a_{1,n}x_n & = & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{i,1}x_1+ & \dots & +a_{i,j}x_j+ & \dots & +a_{i,n}x_n & = & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{m,1}x_1+ & \dots & +a_{m,j}x_j+ & \dots & +a_{m,n}x_n & = & 0
\end{array}\right. .$$

Le système linéaire (H) est homogène : l'ensemble de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. La méthode du pivot de Gauss permet de déterminer une base de l'ensemble des solutions de (H), donc une base de $Ker(f)$. Nous allons voir qu'elle permet aussi au passage de déterminer le rang de f, et même une base de $Im(f)$.

D'après la Proposition 3.6.1, à toute famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ correspond une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Nous avons vu que le rang de cette application est le rang de la famille de vecteurs (Définitions 3.3.4 et 3.5.2). La technique décrite ici s'applique indifféremment à une famille de vecteurs ou à une application linéaire. La première étape de la méthode de Gauss consiste à mettre le système (H) sous forme échelonnée :

$$(H')\left\{\begin{array}{ccccccccc}
p_1y_1 & +a'_{1,2}y_2+ & \dots & +a'_{1,j}y_j+ & \dots & +a'_{1,n}y_n & = & 0\\
 & p_2y_2+ & \dots & +a'_{2,j}y_j+ & \dots & +a'_{2,n}y_n & = & 0\\
 & & \ddots & & & \vdots & & \vdots\\
 & & & p_ry_r+ & \dots & +a'_{r,n}y_n & = & 0\\
 & & & & & 0 & = & 0\\
 & & & & & \vdots & & \vdots\\
 & & & & & 0 & = & 0
\end{array}\right. .$$

Mettre le système (H) sous forme échelonnée, c'est passer de (H) à (H') par des transformations de lignes consistant à ajouter à une ligne le produit d'une autre par une constante, échanger deux lignes, permuter éventuellement des coordonnées, de sorte que

1. les systèmes (H) et (H') sont équivalents,
2. les inconnues $(y_1, \dots, y_n)$ de (H') sont celles de (H), mais dans un ordre qui peut être différent,
3. les pivots $p_1, \dots, p_r$ sont tous non nuls.

Au système (H') on peut associer la matrice suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} p_1 & a'_{1,2} & \dots & a'_{1,j} & \dots & a'_{1,n} \\ & p_2 & \dots & a'_{2,j} & \dots & a'_{2,n} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & p_r & \dots & a'_{r,n} \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est celle d'une autre application linéaire f', de E vers F.

Théorème 3.7.1 *Les applications f et f' sont de rang r.*
- *$(f'(b_1), \dots, f'(b_r))$ est une base de $Im(f')$.*
- *Soient $i_1, \dots, i_r$ les indices tels que $(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) = (y_1, \dots, y_r)$.*
- *$(f(b_{i_1}), \dots, f(b_{i_r}))$ est une base de $Im(f)$.*

La technique est beaucoup plus facile à appliquer qu'il n'y paraît. Considérons l'application suivante, de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$f : (x, y, z, t) \mapsto (x + 2y + z + t, 2x + 4y + 3z + t, x + 2y + 2z).$$

Sa matrice, relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ au départ, et $\mathbb{R}^3$ à l'arrivée est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système homogène permettant de déterminer $Ker(f)$ est :

$$(H) \left\{ \begin{array}{rrrrcl} x & +2y & +z & +t & = & 0 \\ 2x & +4y & +3z & +t & = & 0 \\ x & +2y & +2z & & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrcll} x & +2y & +z & +t & = & 0 & \\ & & z & -t & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & z & -t & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrcl} x & +z & +2y & +t & = & 0 \\ & z & & -t & = & 0 \\ & z & & -t & = & 0 \end{array} \right. \quad \boxed{y \leftrightarrow z} \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrcll} x & +2y & +z & +t & = & 0 & \\ & & z & -t & = & 0 & \\ & & & 0 & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right. .$$

Le système est de rang 2, il en est de même de l'application f. La mise sous forme échelonnée montre que les colonnes de A correspondant aux variables x et z, à savoir la première et la troisième, forment une famille libre, donc une base de $Im(f)$:

$$Im(f) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nous avons écrit les vecteurs en colonnes, pour souligner le fait qu'il s'agit nécessairement de vecteurs colonnes de la matrice A. Pour trouver une base de $Ker(f)$, il faut continuer la résolution.

$$(H) \left\{ \begin{array}{rrcrr} x & +z & = & -2y & -t \\ & z & = & t & \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcrrl} x & & = & -2y & -2t & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & z & = & & t & \end{array} \right. .$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des quadruplets $(-2y-2t, y, t, t)$, où y et t sont deux réels quelconques. Donc :

$$Ker(f) = \{y(-2,1,0,0) + t(-2,0,1,1), y,t \in \mathbb{R}\}.$$

C'est un sous-espace de dimension 2 dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 72 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base naturelle $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ où

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1).$$

Soient les vecteurs $u = (1,0,1)$, $v = (0,1,1)$, $w = (1,2,0)$ et $\mathcal{B}' = \{u, v, w\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
4. Vérifier que $P = Q^{-1}$.

Exercice 73 On considère dans $\mathbb{R}^4$ le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 &=& 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 10x_3 - 6x_4 &=& 1 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 - 7x_4 &=& 2 \end{array}\right.$$

1. Résoudre ce système par la méthode du pivot de Gauss.
2. On considère les vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 définis par

$$v_1 = (1,2,-3), \quad v_2 = (3,5,-4), \quad v_3 = (7,10,1), \quad v_4 = (-5,-6,-7).$$

   (a) La famille $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_3, v_4\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
   (b) La famille $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
   (c) Déterminer les coordonnées de v_4 dans la base $\mathcal{B}_2$ (utiliser une matrice de passaage particulière).

Exercice 74 Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base naturelle de $\mathbb{R}^3$. On considère les trois vecteurs

$$v_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad v_2 = e_1 - e_2, \quad v_3 = e_1 - e_3.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Quelle est la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$?
3. Déterminer sa matrice inverse P^{-1}. À quoi correspond-elle ?

Exercice 75 Soient les vecteurs

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que la famille $\mathcal{B} = \{a, b, c, d\}$ est libre et génératrice.
2. Écrire la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.
3. Exprimer le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 76 Soit $\mathcal{S} = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1)\} = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ ainsi que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ soit $\mathcal{T} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} = \{i,j,k\}$.

1. Comment s'écrit la matrice de changement de base P de $\mathcal{T}$ à $\mathcal{S}$?
2. Comment s'écrit la matrice de changement de base P' de $\mathcal{S}$ à $\mathcal{T}$?
3. Que peut-on conclure ?

Exercice 77 On considère les bases suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{S} = \{(1,-2),(2,-5)\} \text{ et } \mathcal{T} = \{(1,0),(0,1)\} = \{e_1, e_2\}.$$

1. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{T}$ à $\mathcal{S}$.
2. Écrire la matrice de passage Q de $\mathcal{S}$ à $\mathcal{T}$.
3. Vérifier que $P = Q^{-1}$ ou que $P^{-1} = Q$.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice exprimée dans la base $\mathcal{T}$. Soit $B = \begin{pmatrix} 44 & 101 \\ -18 & -41 \end{pmatrix}$ la même matrice que A mais exprimée cette fois-ci dans la base $\mathcal{S}$.
   Calculer $P^{-1}AP$. Conclure.