CORRECTION Exercices Chapitre 2 - Systèmes linéaires.

Exercice 24 Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. Le problème revient à déterminer les réels a, b et c qui vérifient le système (S) $\left\{\begin{array}{l} f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2 \\ f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{4}a - \dfrac{1}{2}b + c = 2 \\ -a + b = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2(1-2c) \\ b = -5 + 4c \end{array}\right.$

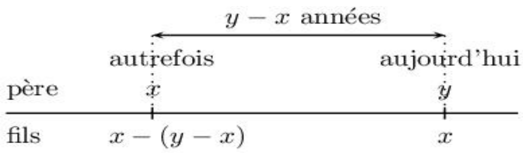
Tous les triplets solutions sont du type $(-2+4c, -5+4c, c)$ où $c \in \mathbb{R}$. Par exemple, pour $c = 0$, on obtient la solution $(-2, 5, 0)$.

Exercice 25 Soient $x = AB = CD$ et $y = BC = AD$. On a le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{l} (x+10)y = 2xy \\ 2(y+40+x) = 4(x+y) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+10 = 2y \\ 2x+2y = 80 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 30 \end{array}\right.$$

Finalement, l'aire du rectangle $ABCD$ est 300 cm^2.

Exercice 26 On peut représenter le problème de la façon suivante :



On a donc $y = 6 \times [\underbrace{x - (y-x)}_{\tilde{x}}]$ où $\overline{x}$ est l'âge que le fils avait lorsque le père avait l'âge actuel de son fils (c'est-à-dire x ans). Finalement,

$$y = 6[x - (y-x)] = 6[2x - y] \Leftrightarrow 7y = 12x$$

On peut donc résoudre le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} x+y = 95 \\ 7y = 12x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 95 - y \\ 7y = 12(95-y) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 95 - y \\ 19y = 1140 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 35 \\ y = 60 \end{array}\right.$$

Exercice 27 Soient x, y, z les coefficients respectifs en mathématiques, en anglais et en informatique. On a le système

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{10x+12y+9z}{x+y+z} = 10 \\ \dfrac{5x+13y+10z}{x+y+z} = 8 \\ \dfrac{12x+20y+8z}{x+y+z} = 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 10x+12y+9z = 10(x+y+z) \\ 5x+13y+10z = 8(x+y+z) \\ 12x+20y+8z = 12(x+y+z) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2y - z = 0 \\ -3x+5y+2z = 0 \\ 8y - 4z = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3x+5y+2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3y \\ z = 2y \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Il est normal que le système soit de rang 2 car si (x, y, z) est un triplet de coefficients solutions alors tous les triplets de la forme (kx, ky, kz) avec k réel positif seront aussi solutions. La solution offrant les calculs les plus simples est $(3, 1, 2)$.

Exercice 28 Soient x et y les deux parties du capital (placées respectivement à 6% et 8%). On a le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 50000 \\ 0,06x + 0,08y & = & 0,068 \times 50000 \end{array}\right.$$

On obtient aisément (par substitution ou par combinaison) $(x, y) = (30000, 20000)$.

Exercice 29

1. NON, soit le système admet une unique solution, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.
2. NON, le système peut être incompatible et n'avoir donc aucune solution.
3. OUI, si le système est homogène et NON sinon.
4. OUI, il admet la solution nulle.

Exercice 30

1. Faux. (Contre-exemple : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x+y+z & = & 2 \end{array}\right.$ n'admet aucune solution.)
2. Faux. (Contre-exemple : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ 2x+2y & = & 2 \\ 3x+3y & = & 3 \end{array}\right.$ admet une infinité de solutions.)
3. Vrai. (Soit m le nombre d'équations du système et n son nombre d'inconnues. On a donc $rg(A) = m < n$ et d'après le Théorème 2.4.1, le système admet une infinité de solutions.)
4. Faux. (Toujours d'après le Théorème 2.4.1, si un système vérifie $m > n$ avec $rg(A) = rg([A|b]) = n$, il admet aussi une solution unique.)
5. Vrai. (Voir Théorème 2.4.1.)
6. Vrai. (Contraposée de "Un système homogène admet toujours au moins une solution".)
7. Faux. (Contre-exemple : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x+y-z & = & 1 \end{array}\right.$ n'admet pas de solution unique.)
8. Vrai. (Les deux équations du système sont reprséntables graphiquement à l'aide de droites. Comme le système n'admet pas de solution, il n'y a pas d'intersection entre les droites ce qui signifie que les deux droites sont parallèles disjointes.)
9. Faux. (Deux plans parallèles dans l'espace.)

Exercice 31

1. Faux. (Contre-exemple : le système (S) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right.$ n'admet pas de solution alors que (H) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ x+y & = & 0 \end{array}\right.$ en admet une infinité.)
2. Faux. (Même contre-exemple que précédemment.)
3. Faux. (Contre-exemple : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ 2x+2y & = & 0 \\ x-y & = & 0 \end{array}\right.$ admet une unique solution alors que $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ 2x+2y & = & 1 \\ x-y & = & 0 \end{array}\right.$ n'en admet aucune. L'implication de droite à gauche est donc fausse contrairement à l'implication de gauche à droite.)
4. Vrai. (Si $rg(A) = rg([A|b]) = n$, alors $rg(A) = rg([A|0] = n$, 0 désignant le vecteur second membre nul.)
5. Vrai. (Si $rg(A) = rg([A|b]) < n$, alors $rg(A) = rg([A|0]) < n$.)
6. Faux. (Si s_0 et s_1 sont solutions du système (S) $Ax = b$, alors $As_0 = b$ et $As_1 = b$ ce qui implique que $A(s-0+s_1) = 2b$. Donc $s_0 + s_1$ n'est pas solution de (H).)
7. Vrai. (Si s_0 et s_1 sont solutions du système (S) $Ax = b$, alors $As_0 = b$ et $As_1 = b$ ce qui implique que $A(s-0-s_1) = 0$ ou encore, en multipliant l'égalité par 2, que $A(2(s-0-s_1)) = 0$. Donc $2(s_0 + s_1)$ est solution de (H).)
8. Faux. (s_0 et s_1 définies précédemment ne vérifient pas $A(2(s-0-s_1)) = b$.)
9. Vrai. (On a $A(s_0 - s_1) = A(s_1 - s_0) = A(2s_1 - s_0 - s_1) = 0 \Leftrightarrow A(2s_1 - s_0) - As_1 = 0 \Leftrightarrow A(2s_1 - s_0) = As_1 = b$. Donc $-s_0 + 2s_1$ est bien solution de (S).)

Exercice 32

– Étape de descente :

$$\left\{\begin{array}{rl} x - y + 2z = 1 & (L_1) \\ 2x + 12y + z = 5 & (L_2) \leftarrow 2(L_1) - (L_2) \\ 3x - 12y + 8z = 1 & (L_3) \leftarrow 3(L_1) - (L_2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z=1 & (L_1) \\ -14y+3z=-3 & (L_2) \\ 9y-2z=2 & (L_3) \leftarrow 9(L_2)+14(L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z=1 & (L_1) \\ 14y-3z=3 & (L_2) \\ -z=1 & (L_3) \leftarrow -(L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z=1 & (L_1) \\ 14y-3z=3 & (L_2) \\ z=-1 & (L_3) \end{cases}$$

Exercice 33

1. Faux. (Le système $\begin{cases} \boxed{0}x+y & = & 1 \\ x+y & = & 2 \end{cases}$ implique un pivot nul et pourtant le système est compatible.)
2. Faux. (Si on considère le système (S) $\begin{cases} x+y & = & 1 \\ 2x+3y & = & 2 \\ 2x+2y & = & 2 \end{cases}$ qui admet une unique solution $(x,y)=(1,0)$, le système échelonné associé (SE) $\begin{cases} x+y & = & 1 \\ y & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{cases}$ admet une équation dont le premier membre est nul.)
3. Vrai. (Soient m et n les nombres d'équations et d'inconnues du système (S) avec $m>n$. Comme le rang s de (S) vérifie $s \leq \min(m,n)$, on a $s \leq n$. Cela signifie donc bien qu'il y a au moins une ligne dont le premier membre est nul.)
4. Faux. (Contre-exemple : le système (S) $\begin{cases} x+y+z & = & 1 \\ 2x+2y+2z & = & 2 \end{cases}$ a moins d'équations que d'inconnues et pourtant le système échelonné associé (SE) $\begin{cases} x+y+z & = & 1 \\ 0 & = & 0 \end{cases}$ a une équation dont le premier membre est nul.)
5. Faux. (Il peut y avoir, conjointement avec l'équation dont les membres sont nuls, une équation de la forme $0=b$ avec $b\neq 0$, c'est-à-dire une équation incompatible. Le système n'admettra donc aucune solution.)
6. Vrai. (Si (S) admet moins d'équations que d'inconnues, le système n'admet pas une unique solution. On sait dans ce cas que la prsence d'équations de compatiblité de la forme $0=0$ exclusivement implique une infinité de solutions.)
7. Vrai. (Si le système admet une infinité de solutions alors $rg(A)=rg([A|b])<n$ avec n le nombre d'équations du système. Cela implique que le système a moins d'équations que d'inconnues ou qu'une équation dans (SE) au moins a un premier membre nul.)
8. Faux. (Contre-exemple : $\begin{cases} x+y & = & 1 \\ x+y & = & 0 \end{cases}$ est un système impossible qui admet pourtant une équation avec un second membre nul.)

Exercice 34

1. Faux. (Si $b=-2a$, (S) admet une infinité de solutions.)
2. Faux. ($\det(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix})=0$ donc $\mathcal{S}$ ne peut pas être un singleton.)
3. Vrai. (Si $a=b\neq 0$, on a $(rg\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}=1)\neq(rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ -2 & 4 & a \end{pmatrix}=2)$.
4. Faux. (Si $a=1$ et $b=-2$, $b=-2a$, $(1,0$ est une solution du système.)
5. Vrai. (Si $b=-2a$, le système peut se réécrire sous la forme : $\begin{cases} x & = & a+2y \\ & y\in\mathbb{R} & \end{cases}$ donc les solutions du système peuvent s'écrire sous la forme $(x,y)=(a+2y,y)=(a,0)+y(2,1)$ avec $y\in\mathbb{R}$, ce qui implique bien que $\mathcal{S}$ est une droite affine.)

Exercice 35

1. Faux. (Si $(a,b)=(0,0)$, le système n'admet pas de solution.)
2. Vrai. (Si $(a,b)=(1,-1)$, le système admet une unique solution $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.)
3. Vrai. (Si $a=b$, les deux équations sont incompatibles.)
4. Faux. (Si $b=2a$ avec $a\neq 0$, det $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 2a \end{pmatrix}=a\neq 0$, ce qui siginifie que le systmè est inversible et admet une unique solution.)
5. Vrai. (Voir ci-dessus.)

Exercice 36

1. Faux. (Supposons que $b \neq 2a$. On a $\det \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix} = b - 2a \neq 0$ donc le système admet une unique solution.)
2. Vrai. (Si $b = 2a$, le système est équivalent à $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 - ay \\ & y \in \mathbb{R} & \end{array} \right.$ donc les solutions du système peuvent s'écrire sous la forme $(x, y) = (1 - ay, y) = (1, 0) + y(-a, 1)$ avec $y \in \mathbb{R}$, ce qui implique bien que $\mathcal{S}$ est une droite affine.)
3. Faux. (Comme on $rg \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}$ quel que soit le couple (a, b), $\mathcal{S}$ ne peut jamais être l'ensemble vide.)
4. Faux. (Voir 2.)
5. Vrai. (Voir 2.)

Exercice 37

1. Faux. (Si $b = 0$, $\mathcal{S}$ est vide.)
2. Faux. (Si $a = 0$, le système admet une infinité de solutions puisque (L_3) est égale à (L_2).)
3. Vrai. (Si $(a, b) = (1, 1)$, alors $(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x - y + z & = & 1 \\ -x + y - z & = & -1 \\ z & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ & y \in \mathbb{R} & \\ z & = & 1 \end{array} \right.$ donc les solutions du système peuvent s'écrire sous la forme $(x, y, z) = (y, y, 1) = (0, 0, 1) + y(1, 1, 0)$ avec $y \in \mathbb{R}$, ce qui implique bien que $\mathcal{S}$ est une droite affine.)
4. Faux. (Si $(a, b) = (0, 1) \neq (1, 1)$, le système admet une infinité de solutions.)
5. Vrai. (En remplaçant (x, y, z) par $(0, 0, 1)$ dans $(\mathcal{S})$, on retrouve la condition $b = 1$.)

Exercice 38

1. La matrice du système est égale à $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$. On a $\det(A) = -a + 2$ qui s'annule pour $a = 2$. Par conséquent,
   - si $a = 2$, $rg(A) = rg([A|b]) < 2$, il y a donc une infinité de solutions,
   - si $a \neq 2$, $rg(A) = 3$ et le système admet une unique solution.
2. La matrice du système est égale à $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$. On a $\det(A) = a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$. Par conséquent,
   - si $a = 1$, $rg(A) = rg([A|b]) < 2$, il y a une infinité de solutions,
   - si $a = -1$, $rg(A) = 1 \neq rg([A|b]) = 2$, il n'y a aucune solution,
   - si $a \neq 1$ et $a \neq -1$, $rg(A) = 2$ et le système admet une unique solution.
3. La matrice du système est égale à $A = \begin{pmatrix} a & 1 - a \\ 1 - a & -a \end{pmatrix}$. On a $\det(A) = -a^2 - (1 - a)^2 = -(2a^2 - 2a + 1)$ qui ne s'annule jamais. Par conséquent, $rg(A) = 2$ et le système admet une unique solution quel que soit $a \in \mathbb{R}$.
4. La matrice du système est égale à $A = \begin{pmatrix} a & 1 - a \\ a & a \end{pmatrix}$. On a $\det(A) = a^2 - a(1 - a) = a(2a - 1)$. Par conséquent,
   - si $a = 0$ ou $a = \frac{1}{2}$, $rg(A) = rg([A|b]) < 2$, il y a une infinité de solutions,
   - si $a \neq 0$ et $a \neq \frac{1}{2}$, $rg(A) = 2$ et le système admet une unique solution.

Exercice 39 Pour chacun des systèmes nous calculons le déterminant qui permet, d'une part de statuer sur l'ensemble des solutions du système et d'autre part de former la solution explicite.

(a) $\Delta = 5 \neq 0$, le système admet une unique solution. On obtient
$x = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \end{vmatrix} / \Delta = 10/5 = 2$, $y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} / \Delta = 0/5 = 0$ et $z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 8 \end{vmatrix} / \Delta = 5/5 = 1$.

(b) $\Delta = -3 \neq 0$, le système admet une unique solution. On obtient
$x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 10 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} / \Delta = -30/(-3) = 10$, $y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} / \Delta = 15/(-3) = -5$ et $z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} / \Delta = 15/(-3) = -5$.

(c) $\Delta=-40\neq 0$, le système admet une unique solution. On obtient $x=\begin{vmatrix}2&-1&3\\-1&4&1\\4&-2&-3\end{vmatrix}/\Delta=-63/(-40)=63/40$, $y=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&-1&1\\3&4&-3\end{vmatrix}/\Delta=-4/(-40)=1/10$ et $z=\begin{vmatrix}1&-1&2\\-1&-4&-1\\3&-2&4\end{vmatrix}/\Delta=-7/(-40)=7/40$.

(d) $\Delta=-9\neq 0$, le système admet une unique solution. On obtient $x=\begin{vmatrix}3&1&-1\\2&-1&1\\0&1&2\end{vmatrix}/\Delta=-15/(-9)=5/3$, $y=\begin{vmatrix}2&3&-1\\1&2&1\\1&0&2\end{vmatrix}/\Delta=7/(-9)=-7/9$ et $z=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&-1&2\\1&1&0\end{vmatrix}/\Delta=-4/9$.

(e) $\Delta=9\neq 0$, le système admet une unique solution. On obtient $x=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&2&-1\\4&0&-2\end{vmatrix}/\Delta=-6/9=-2/3$, $y=\begin{vmatrix}0&1&1\\-5&-1&-1\\1&4&-2\end{vmatrix}/\Delta=-30/9=-10/3$ et $z=\begin{vmatrix}0&-1&1\\-5&2&-1\\1&0&4\end{vmatrix}/\Delta=-21/9=-7/3$.

(f) $\Delta=-15\neq 0$, le système admet une unique solution. On obtient $x=\begin{vmatrix}3&1&-2\\2&-3&1\\0&1&-2\end{vmatrix}/\Delta=15/(-15)=-1$, $y=\begin{vmatrix}0&3&-2\\-2&2&1\\3&0&-2\end{vmatrix}/\Delta=9/(-15)=-3/5$ et $z=\begin{vmatrix}0&1&3\\-2&-3&2\\3&1&0\end{vmatrix}/\Delta=27/(-15)=-9/5$.

(g) $\Delta=1\neq 0$, le système admet une unique solution. On obtient $x=\begin{vmatrix}-50&9&1\\40&10&5\\180&5&9\end{vmatrix}/\Delta=10/1=10$, $y=\begin{vmatrix}10&-50&1\\9&40&5\\1&180&9\end{vmatrix}/\Delta=-20/1=-20$ et $z=\begin{vmatrix}10&9&-50\\9&10&40\\1&5&180\end{vmatrix}/\Delta=30/1=30$.

(h) $\Delta=5\neq 0$, le système admet une unique solution. On obtient $x=\begin{vmatrix}-50&9&1\\41&10&5\\180&5&9\end{vmatrix}/\Delta=-66/1=-66$, $y=\begin{vmatrix}10&-50&1\\9&41&5\\1&180&9\end{vmatrix}/\Delta=69/1=69$ et $z=\begin{vmatrix}10&9&-50\\9&10&41\\1&5&180\end{vmatrix}/\Delta=-11/1=-11$.

Exercice 40 Pour chacun des systèmes nous calculons le déterminant qui permet, d'une part de statuer sur l'ensemble des solutions du système et d'autre part de former - si cela est possible - la solution explicite.

(a) $\Delta=0$, le système n'est pas inversible. On ne peut donc pas utiliser les formules de Cramer... On peut néanmoins utiliser la méthode du pivot de Gauss pour préciser si le système n'admet aucune solution ou s'il en admet une infinité.

$$\left\{\begin{array}{rcll} x-2y+3z&=&0&(L_1)\\ 2x-4y+z&=&0&(L_2)\quad\leftarrow\quad(L_2)-2(L_1)\\ 3x-6y+2z&=&0&(L_3)\quad\leftarrow\quad(L_3)-3(L_1)\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+3z&=&0\\ -5z&=&0\\ -7z&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x&=&2y\\ y&\in&\mathbb{R}\\ z&=&0\end{array}\right.$$

On en déduit que le système admet une infinité de solutions, qui s'écrivent toutes sous la forme $(x,y,z)=(2y,y,0)=y(2,1,0)$. Conclusion, $\mathcal{S}=\{\alpha(2,1,0),\alpha\in\mathbb{R}\}$.

(b) $\Delta=0$, le système n'est pas inversible. On a

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+2y-z&=&0&(L_1)\\ 2x+y-2z&=&0&(L_2)\quad\leftarrow\quad(L_2)-2(L_1)\\ x-z&=&0&(L_3)\quad\leftarrow\quad(L_3)-(L_1)\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z&=&0\\ -3y&=&0\\ -2y&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x&=&z\\ y&=&0\\ z&\in&\mathbb{R}\end{array}\right.$$

On en déduit que le système admet une infinité de solutions, qui s'écrivent toutes sous la forme $(x,y,z)=(z,0,z)=z(1,0,1)$. Conclusion, $\mathcal{S}=\{\alpha(1,0,1),\alpha\in\mathbb{R}\}$.

(c) $\Delta=0$, le système n'est pas inversible. On a

$$\left\{\begin{array}{rcll} x-y+3z &=& 0 & (L_1)\\ -x+4y+z &=& 3 & (L_2) \quad \leftarrow \quad (L_2)+(L_1)\\ -3y-4z &=& -3 & (L_3)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x-y+3z &=& 0 & (L_1)\\ 3y+4z &=& 3 & (L_2)\\ -3y-4z &=& -3 & (L_3) \quad \leftarrow \quad (L_3)+(L_2)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y+3z &=& 0\\ 3y+4z &=& 3\\ 0 &=& 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y+3z &=& 0\\ y &=& -\frac{4}{3}z+1\\ z &\in& \mathbb{R}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\frac{13}{3}z+1\\ y &=& -\frac{4}{3}z+1\\ z &\in& \mathbb{R}\end{array}\right.$$

On en déduit que le système admet une infinité de solutions, qui s'écrivent toutes sous la forme $(x,y,z) = (-\frac{13}{3}z+1, -\frac{4}{3}z+1, z) = z(-\frac{13}{3}, -\frac{4}{3}, 1) + (1,1,0)$ ou encore $(x,y,z) = \alpha(13,4,-3) + (1,1,0)$. Conclusion, $\mathcal{S} = \{\alpha(13,4,-3)+(1,1,0), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(d) $\Delta = 3 \neq 0$, on peut donc utliser la méthode de Cramer. On obtient $x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -2 & 2 & -3\end{vmatrix} /\Delta = 1/3$, $y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix} /\Delta = 1/3$ et $z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix} /\Delta = 3/3 = 1$.

(e) $\Delta = -7 \neq 0$, le système admet une unique solution. On obtient $x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix} /\Delta = -7/(-7) = 1$, $y = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix} /\Delta = 0/(-7) = 0$ et $z = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix} /\Delta = -7/(-7) = 1$.

(f) $\Delta = -17 \neq 0$, le système admet une unique solution. On obtient $x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2\\ -2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix} /\Delta = 17/(-17) = -1$, $y = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2\\ -2 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -3\end{vmatrix} /\Delta = -17/(-17) = 1$ et $z = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3\\ -2 & -3 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix} /\Delta = 17/(-17) = -1$.

Exercice 41

(a) $\Delta = 58 \neq 0$, le système admet une unique solution. Développons le déterminant plus explicitement, selon par exemple la deuxième colonne (on choisira en général une ligne ou une colonne qui contient des zéros afin de diminuer le nombre de calculs) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{-1} & -1 & -1\\ 2 & \boxed{0} & -1 & 3\\ 3 & \boxed{3} & 2 & 0\\ -1 & \boxed{-2} & 1 & -1\end{vmatrix} = \boxed{-1}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix} + \boxed{0}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1\\ 3 & 2 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$+\boxed{3}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix} + \boxed{-2}(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}$$

$\Leftrightarrow \Delta = \boxed{-1}(-1)^{1+2} \times 8 + \boxed{0}(-1)^{2+2} \times (-10) + \boxed{3}(-1)^{3+2} \times (-2) + \boxed{-2}(-1)^{4+2} \times (-22) = 58$.

On montrera dans le chapitre 3 comment créer des zéros dans un déterminant et simplifier de ce fait les calculs.

On peut ensuite utiliser les formules de Cramer (4 nouveaux déterminants d'ordre 4 à calculer) ou utiliser la méthode du pivot de Gauss, ce qu'on choisit de faire.

$$\left\{\begin{array}{rcll} x-y-z-t &=& 3 & (L_1)\\ 2x-z+3t &=& 9 & (L_2) \quad \leftarrow \quad (L_2)-2(L_1)\\ 3x+3y+2z &=& 4 & (L_3) \quad \leftarrow \quad (L_3)-3(L_1)\\ -x-2y+z-t &=& 0 & (L_4) \quad \leftarrow \quad (L_4)+(L_1)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x-y-z-t &=& 3 & (L_1)\\ 2y+z+5t &=& 3 & (L_2)\\ 6y+5z+3t &=& -5 & (L_3) \quad \leftarrow \quad (L_3)-3(L_2)\\ -3y-2t &=& 3 & (L_4) \quad \leftarrow \quad 2(L_4)+3(L_2)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x-y-z-t &=& 3 & (L_1)\\ 2y+z+5t &=& 3 & (L_2)\\ 2z-12t &=& -14 & (L_3)\\ 3z+11t &=& 15 & (L_4) \quad \leftarrow \quad 2(L_4)+3(L_2)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x-y-z-t &=& 3 & (L_1)\\ 2y+z+5t &=& 3 & (L_2)\\ 2z-12t &=& -14 & (L_3)\\ 58t &=& 72 & (L_4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{83}{29}\\ y &=& -\frac{53}{29}\\ z &=& \frac{13}{29}\\ t &=& \frac{36}{29} \end{array}\right.$$

(b) $\Delta = 8 \neq 0$, le système admet une unique solution.

$$\left\{\begin{array}{rcllcl} x-y+z-t &=& 1 & (L_1) & & \\ x+y-z-t &=& -1 & (L_2) & \leftarrow & (L_2)-(L_1)\\ x+y+z-t &=& 0 & (L_3) & \leftarrow & (L_3)-(L_1)\\ x-y-z+t &=& 2 & (L_4) & \leftarrow & (L_4)-(L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcllcl} x-y+z-t &=& 1 & (L_1) & & \\ 2y-2z &=& -2 & (L_2) & & \\ 2y &=& -1 & (L_3) & \leftarrow & (L_3)-3(L_2)\\ -2z+2t &=& 1 & (L_4) & \leftarrow & 2(L_4)+3(L_2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& -\frac{1}{2}\\ z &=& \frac{1}{2}\\ t &=& 1 \end{array}\right.$$

(c) On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcllcl} 3x+4y+z+2t &=& 3 & (L_1) & & \\ 6x+8y+2z+5t &=& 7 & (L_2) & \leftarrow & (L_2)-2(L_1)\\ 9x+12y+3z+10t &=& 13 & (L_3) & \leftarrow & (L_3)-3(L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcllcl} 3x+4y+z+2t &=& 3 & (L_1) & & \\ t &=& 1 & (L_2) & \leftarrow & (L_2)-2(L_1)\\ 4t &=& 4 & (L_3) & \leftarrow & (L_3)-3(L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &\in& \mathbb{R}\\ y &\in& \mathbb{R}\\ z &=& -3x-4y+1\\ t &=& 1 \end{array}\right.$$

On en déduit que le système admet une infinité de solutions, qui s'écrivent toutes sous la forme $(x,y,z,t) = (x,y,-3x-4y+1,1) = x(1,0,-3,0)+y(0,1,-4,0)+(0,0,1,1)$. Conclusion,

$$\mathcal{S} = \{\alpha(1,0,-3,0)+\beta(0,1,-4,0)+(0,0,1,1), \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}.$$

(d) On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcllcl} x-2y+z+t &=& -2 & (L_1) & & \\ 2x-y-z-t &=& -1 & (L_2) & \leftarrow & (L_2)-2(L_1)\\ x+y+z+t &=& -8 & (L_3) & \leftarrow & (L_3)-(L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcllcl} x-2y+z+t &=& -2 & (L_1) & & \\ 3y-3z-3t &=& 3 & (L_2) & \leftarrow & (L_2)-2(L_1)\\ 3y &=& -6 & (L_3) & \leftarrow & (L_3)-3(L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -3\\ y &=& -2\\ z &=& -3-t\\ t &\in& \mathbb{R} \end{array}\right.$$

On en déduit que le système admet une infinité de solutions, qui s'écrivent toutes sous la forme $(x,y,z,t) = (-3,-2,-3-t,t) = t(0,0,-1,1)+(-3,-2,-3,0)$. Conclusion,

$$\mathcal{S} = \{\alpha(0,0,-1,1)+(-3,-2,-3,0), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

(e) On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcllcl} x+2y-3z &=& 4 & (L_1) & & \\ x+3y-z &=& 11 & (L_2) & \leftarrow & (L_2)-(L_1)\\ 2x+5y-5z &=& 13 & (L_3) & \leftarrow & (L_3)-2(L_1)\\ x+4y+z &=& 18 & (L_4) & \leftarrow & (L_4)-(L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcllcl} x+2y-3z &=& 4 & (L_1) & & \\ y+2z &=& 7 & (L_2) & & \\ y+z &=& 5 & (L_3) & \leftarrow & (L_3)-(L_2)\\ 2y+4z &=& 14 & (L_4) & \leftarrow & (L_4)-2(L_2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcllcl} x+2y-3z &=& 4 & (L_1) & & \\ y+2z &=& 7 & (L_2) & & \\ -z &=& -2 & (L_3) & & \\ 2z &=& 4 & (L_4) & \leftarrow & (L_4)+2(L_3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z &=& 4\\ y+2z &=& 7\\ -z &=& -2\\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4\\ y &=& 3\\ z &=& 2 \end{array}\right.$$

(f) La méthode du pivot de Gauss n'est pas nécessaire ici :

$$\left\{\begin{array}{rcll} y+z &=& 5 & (L_1)\\ x+z &=& 4 & (L_2)\\ x+y+2z &=& 9 & (L_3)\\ -x+y &=& 1 & (L_4) \end{array}\right.$$

On remarque que $(L_1)+(L_2) \Rightarrow x+y+2z=9$ donc (L_3) est redondante. De plus, $(L_1)-(L_2) \Rightarrow -x+y=-1$ donc (L_4) est redondante. Finalement, le système se réduit à (L_1) et (L_2). On en déduit que $(x,y,z) = (4-z, 5-z, z) = z(-1,-1,1)+(4,5,0)$. Conclusion, $\mathcal{S} = \{\alpha(-1,-1,1)+(4,5,0), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 42

(a) On a $rg\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 2$. D'autre part,

- $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & a \end{vmatrix} = (-4a-5+24)-(-40-4+3a) = -7a+63 = -7(a-9)$,
- $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & a \end{vmatrix} = (6a+20-16)-(60+16-2a) = 8a-72 = 8(a-9)$,
- $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & a \end{vmatrix} = (9a-40+4)-(-15+24+4a) = 5a-45 = 5(a-9)$.

On en déduit que
- si $a=9$, $rg(A) = rg([A|b]) = 2 < 3$ et il y a une infinité de solutions.
- si $a \neq 9$, $rg(A) \neq rg([A|b])$ et il n'y a pas de solution.

On peut procéder autrement :

$$\begin{cases} 2x+3y-2z &=& 5 & (L_1) \\ x-2y+3z &=& 2 & (L_2) \leftarrow 2(L_2)-(L_1) \\ 4x-y+4z &=& a & (L_3) \leftarrow (L_3)-2(L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-2z &=& 5 & (L_1) \\ -7y+8z &=& -1 & (L_2) \\ -7y+8z &=& a-10 & (L_3) \leftarrow (L_3)-(L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-2z &=& 5 & (L_1) \\ -7y+8z &=& -1 & (L_2) \\ 0 &=& a-9 & (L_3) \end{cases}$$

Le système admet donc bien des solutions si et seulement si $a \neq 9$. Dans ce cas, $(L_2) \Rightarrow y = \frac{1}{7}+\frac{8}{7}z$ et $(L_1) \Rightarrow x = \frac{1}{2}(5-3(\frac{1}{7}+\frac{8}{7}z)+2z) = \frac{16}{7}-\frac{5}{7}z$. Finalement, si $a \neq 9$, le système admet une infinité de solutions qui s'écrivent sous la forme :

$$(x,y,z) = \left(\frac{16}{7}-\frac{5}{7}z, \frac{1}{7}+\frac{8}{7}z, z\right) = \left(\frac{16}{7}, \frac{1}{7}, 0\right) + z\left(-\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, 1\right) \text{ avec } z \in \mathbb{R}.$$

(b) On a $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+a+1)-(a^2-1-1) = -a^2+2a+3 = (a+1)(-a+3)$.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1,3\}$, on a $\det(A) \neq 0$, ce qui implique alors que $rg(A) = 3 = rg([A|b])$. Dans ce cas, le système admet une unique solution.
- Si $a=-1$, $rg(A)=2$. D'autre part,
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$
Par conséquent, $rg(A) = rg([A|b]) = 2 < 3$ et le système admet une infinité de solutions.
- si $a=3$, $rg(A)=2$. D'autre part, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ donc $rg(A) \neq rg([A|b])$, ce qui implique que le système n'admet pas de solution.

On peut procéder autrement :

$$\begin{cases} x-y+az &=& a & (L_1) \\ x+ay-z &=& -1 & (L_2) \leftarrow (L_2)-(L_1) \\ x+y+z &=& 2 & (L_3) \leftarrow (L_3)-(L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+az &=& a & (L_1) \\ y(a+1)-z(a+1) &=& -(a+1) & (L_2) \\ 2y+z(1-a) &=& 2-a & (L_3) \leftarrow (a+1)(L_3)-2(L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+az &=& a & (L_1) \\ y(a+1)-z(a+1) &=& -(a+1) & (L_2) \\ z(a+1)(-a+3) &=& (a+1)(4-a) & (L_3) \end{cases}$$

– Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 3\}$, la solution est unique et on obtient par substitution du bas vers le haut :
$$(x, y, z) = \left(\frac{a-1}{a-3}, -\frac{1}{a-3}, \frac{a-4}{a-3}\right).$$
– Supposons maintenant que $a = -1$. Le système échelonné se réécrit $\left\{\begin{array}{rcl} x - y - z &=& -1 \\ 0 &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right.$.

Le système (S) admet donc une infinité de solutions de la forme :
$$(x, y, z) = (-1 + y + z, y, z) = (-1, 0, 0) + (y, y, 0) + (z, 0, z) = (-1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1)$$
avec $y, z \in \mathbb{R}$.
– Si $a = 3$, la ligne (L_3) du système échelonné s'écrit $0 = 4$, ce qui prouve donc que le système n'admet pas de solution.

(c) On a $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2a-1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (1 + a^2(2a-1) + 1) - ((2a-1) + a + a) = 2a^3 - a^2 - 4a + 3 = (a-1)^2(2a+3))$.

– Si $a \in \mathbb{R} - \{1, -\frac{3}{2}\}$, on a $\det(A) \neq 0$, ce qui implique alors que $rg(A) = 3 = rg([A|b])$. Dans ce cas, le système admet une unique solution.
– Si $a = 1$, le système est incompatible donc il n'admet aucune solution.
– Si $a = -\frac{3}{2}$, on a $rg(A) = 2$ et $rg([A|b]) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = 2$. Par conséquent, le système admet une infinité de solutions.

On peut procéder autrement :
$$\left\{\begin{array}{rcll} x + y + (2a-1)z &=& 1 & (L_1) \\ ax + y + z &=& 1 & (L_2) \leftarrow (L_2) - a(L_1) \\ x + ay + z &=& 3(a+1) & (L_3) \leftarrow (L_3) - (L_1) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x + y + (2a-1)z &=& 1 & (L_1) \\ y(1-a) + z(1 - a(2a-1)) &=& 1 - a & (L_2) \\ y(a-1) + z(2(1-a)) &=& 3a + 2 & (L_3) \leftarrow (L_3) + (L_2) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x + y + (2a-1)z &=& 1 & (L_1) \\ y(1-a) + z(1 - a(2a-1)) &=& 1 - a & (L_2) \\ z(a-1)(-2a-3) &=& 2a + 3 & (L_3) \end{array}\right..$$
Le système est maintenant échelonné.
– Si $a \in \mathbb{R} - \{1, -\frac{3}{2}\}$, le système admet une unique solution :
$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{1-a}, \frac{-3a}{1-a}, \frac{1}{1-a}\right).$$
– Si $a = 1$, la ligne (L_3) du système échelonné s'écrit $0 = 5$ ce qui prouve que le système n'admet pas de solution.
– Si $a = -\frac{3}{2}$, le système s'écrit
$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y - 4z &=& 1 \\ y - 2z &=& 1 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2z \\ y = 1 + 2z \\ z \in \mathbb{R} \end{array}\right..$$
Finalement, le système admet une infinité de solutions de la forme
$$(x, y, z) = (2z, 1 + 2z, z) = (0, 1, 0) + z(2, 2, 1) \text{ avec } z \in \mathbb{R}.$$

(d) On a $\det(A) = \begin{vmatrix} 3a & 3a-7 & a-5 \\ 2a-1 & 4a-1 & 2a \\ 4a & 5a-7 & 2a-5 \end{vmatrix} \overset{C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 2a+5 & 3a-7 & a-5 \\ -1 & 4a-1 & 2a \\ 2a+5 & 5a-7 & 2a-5 \end{vmatrix} \overset{L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 2a+5 & 3a-7 & a-5 \\ -1 & 4a-1 & 2a \\ 0 & 2a & a \end{vmatrix}$

$\overset{C_2 - 2C_3}{=} \begin{vmatrix} 2a+5 & a+3 & a-5 \\ -1 & -1 & 2a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 2a+5 & a+3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = a(-a-2)$.

– Si $a \in \mathbb{R} - \{0, -2\}$, on a $\det(A) \neq 0$, ce qui implique alors que $rg(A) = 3 = rg([A|b])$. Dans ce cas, le système admet une unique solution.
– Si $a = 0$, le système se réécrit $\left\{\begin{array}{rcl} -7y - 5z &=& -1 \\ -x - y &=& 1 \\ -7y - 5z &=& -1 \end{array}\right.$ et est manifestement de rang 2. Par conséquent, $rg(A) = rg([A|b]) = 2$ et le système admet une infinité de solutions.
– Si $a = -2$, le système se réecrit $\left\{\begin{array}{rcl} -6x - 13y - 7z &=& -3 \\ -5x - 9y - 4z &=& -1 \\ -8x - 17y - 9z &=& -3 \end{array}\right.$ et on peut vérifier qu'il est de rang 3.
Finalement, puisque $rg(A) \neq rg([A|b])$, le système n'admet pas de solution.

On peut procéder autrement :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 3ax+(3a-7)y+(a-5)z &=& a-1 & (L_1)\\ (2a-1)x+(4a-1)y+2az &=& a+1 & (L_2)\leftarrow 3a(L_2)-(2a-1)(L_1)\\ 4ax+(5a-7)y+(2a-5)z &=& a-1 & (L_3)\leftarrow 3(L_3)-4(L_1)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll} 3ax+(3a-7)y+(a-5)z &=& a-1 & (L_1)\\ (6a^2+14a-7)y+(4a^2+11a-5)z &=& a^2+6a-1 & (L_2)\\ (3a+7)y+(2a+5)z &=& -a+1 & (L_3)\leftarrow(6a^2+14a-7)(L_3)-(3a+7)(L_2)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll} 3ax+(3a-7)y+(a-5)z &=& a-1 & (L_1)\\ (6a^2+14a-7)y+(4a^2+11a-5)z &=& a^2+6a-1 & (L_2)\\ -3a(a+2)z &=& -a(a+3)(3a+2) & (L_3)\end{array}\right.$$

Le système est maintenant échelonné.

– Si $a\in\mathbb{R}-\{0,-2\}$, le système admet une unique solution :

$$(x,y,z)=\left(\frac{a^2+5a+2}{a+2},-2\frac{a^2+4a+2}{a+2},\frac{3a^2+11a+6}{a+2}\right)$$

– Si $a=0$, on ne peut pas utiliser le système échelonné. En effet, le pivot de la ligne (L_1) du système initial aurait été nul et il aurait fallu permuter des lignes ou des variables. Le système initial se réécrit donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -7y-5z &=& -1\\ -x-y &=& 1\\ -7y-5z &=& -1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-1-y\\ y\in\mathbb{R}\\ z=\frac{1}{5}-\frac{7}{5}y\end{array}\right..$$

Finalement, le système admet une infinité de solutions de la forme

$(x,y,z)=\left(-1-y,y,\frac{1}{5}-\frac{7}{5}y\right)=\left(-1,0,\frac{1}{5}\right)+\left(-y,y,-\frac{7}{5}y\right)=\left(-1,0,\frac{1}{5}\right)+y\left(-1,1,-\frac{7}{5}\right)$ avec $y\in\mathbb{R}$.

– Si $a=-2$, la ligne (L_3) du système échelonné (on peut l'utiliser puisqu'il n'y a plus de pivot nul) donne $0=-8$ ce qui prouve que le système n'admet pas de solution.

(e) Déterminons les rangs de $A=\begin{pmatrix}2&a&4\\1&1&2a\end{pmatrix}$ et $[A|b]=\begin{pmatrix}2&a&4&0\\1&1&2a&-3\end{pmatrix}$. Tout d'abord, $rg([A|b])=2$ car $\begin{vmatrix}2&0\\1&-3\end{vmatrix}\neq 0$. On a ensuite

$$\begin{vmatrix}2&a\\1&1\end{vmatrix}=2-a,\ \begin{vmatrix}a&4\\1&2a\end{vmatrix}=2a^2-4=2(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2}),\ \begin{vmatrix}2&4\\1&2a\end{vmatrix}=4a-4=4(a-1).$$

Comme aucun des déterminants ne s'annule pour une même valeur, on a systématiquement $rg(A)=2=rg([A|b])$ donc le système admet une infinité de solutions. Le système s'écrit sous la forme

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2x+ay+4z &=& 0 & (L_1)\\ x+y+2az &=& -3 & (L_2)\leftarrow 2(L_2)-(L_1)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll} 2x+ay+4z &=& 0 & (L_1)\\ (2-a)y+4(a-1)z &=& -6 & (L_2)\end{array}\right.$$

– Si $a\in\mathbb{R}-\{2\}$, les solutions s'écrivent sous la forme :

$$\begin{array}{rcl}(x,y,z) &=& \left(-\frac{3a}{a-2}-\frac{2(a^2-2)}{a-2}z,\frac{6}{a-2}+\frac{4(a-1)}{a-2}z,z\right)\\ &=& \left(-\frac{3a}{a-2},\frac{6}{a-2},0\right)+z\left(-\frac{2(a^2-2)}{a-2},\frac{4(a-1)}{a-2},1\right)\ \text{avec } z\in\mathbb{R}\end{array}.$$

– Si $a=2$, le système échelonné se réécrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y+4z &=& 0\\ 4z &=& -6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x+y+2z=0\\ z=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

et admet une infinité de solutions de la forme :

$$(x,y,z)=\left(-y+3,y,-\frac{3}{2}\right)=\left(3,0,-\frac{3}{2}\right)+y\,(-1,1,0)\ \text{avec } y\in\mathbb{R}.$$

(f) On a $rg\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\1&3&1&-1\\2&1&-8&1\end{pmatrix}=3=rg([A|b])$, donc le système admet une infinité de solutions quelle que soit la valeur de a. On a

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+2y-z+t &=& 1 & (L_1)\\ x+3y+z-t &=& 1 & (L_2)\leftarrow(L_2)-(L_1)\\ 2x+y-8z+t &=& a & (L_3)\leftarrow(L_3)-2(L_1)\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+2y-z+t &=& 1 & (L_1)\\ y+2z-2t &=& 0 & (L_2)\\ -3y-6z-t &=& a-2 & (L_3)\leftarrow(L_3)+3(L_2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll} x+2y-z+t &=& 1 & (L_1)\\ y+2z-2t &=& 0 & (L_2)\\ -7t &=& a-2 & (L_3)\end{array}\right.$$

En remontant le système échelonné, on peut montrer que les solutions s'écrivent sous la forme :

$$(x,y,z)=\left(\frac{5a-3}{7}+5z,\frac{2(2-a)}{7}-2z,z,\frac{2-a}{7}\right)=\left(\frac{5a-3}{7},\frac{2(2-a)}{7},0,\frac{2-a}{7}\right)+z\,(5,-2,1,0)$$

avec $z \in \mathbb{R}$.

(g) Déterminons le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 3 & -a & 2 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ puis celui de $[A|b]$. On a

- $\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 3 & -a & 2 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = (a + 3a - 4a) - (-a^3 + 2 + 6) = a^3 - 8 = (a-2)(a^2 + 2a + 4)$.
- $\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 3 & -a & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-a - 6a - 4) - (-a^2 - 4 - 6) = a^2 - 7a + 6 = (a-1)(a-6)$.
- $\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ a & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 2a^2 + 2) - (a + 2 - 2a) = -2a^2 + a + 1 = (a-1)(-2a-1)$.
- $\begin{vmatrix} 3 & -a & 2 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (3 - 4a + a) - (2 + 6 - a^2) = a^2 - 3a - 5 = (a - \frac{3-\sqrt{29}}{2})(a - \frac{3+\sqrt{29}}{2})$.

Comme aucun des déterminants ne s'annule pour une même valeur, on a systématiquement $rg(A) = 3$. Ensuite,

- $\begin{vmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 3 & -a & 2 & 1 \\ a & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{L_4 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 3 & -a & 2 & 1 \\ a & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{vmatrix} \overset{C_3 + C_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & a+1 & 1 \\ 3 & -a & 3 & 1 \\ a & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & a+1 \\ 3 & -a & 3 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix}$

  $= (a-1)[(a + 3(a+1) - 6a) - (-a^2(a+1) + 3 + 6)] = (a-1)(a^3 + a^2 - 2a - 6) = a^4 - 3a^2 - 4a + 6$.

  Ce polynôme en "a" s'annule pour $a_1 = 1$ et $a_2 = \frac{\sqrt[3]{71+9\sqrt{58}}}{3} + \frac{7}{3\sqrt[3]{71+9\sqrt{58}}} - \frac{1}{3}$.

  Par conséquent $rg([A|b]) = 4 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} - \{1, a_2\}$. Sinon, $rg([A|b]) = 3$.

On en déduit les cas suivants :
– Si $a \in \{1, a_2\}$, $rg(A) = rg([A|b]) = 3$ et le système admet une unique solution.
– Si $a \in \mathbb{R} - \{1, a_2\}$, $rg(A) \neq rg([A|b])$ et le système n'admet pas de solution.
Le système s'écrit :

$$\begin{cases} x - 2y + az &= 1 & (L_1) \\ 3x - ay + 2z &= 1 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 3(L_1) \\ ax + y - z &= 0 & (L_3) \leftarrow (L_3) - a(L_1) \\ x - 2y + z &= a & (L_4) \leftarrow (L_4) - (L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + az &= 1 & (L_1) \\ (6-a)y + (2-3a)z &= -2 & (L_2) \\ (1+2a)y - (1+a^2)z &= -a & (L_3) \leftarrow (6-a)(L_3) - (1+2a)(L_2) \\ (1-a)z &= a-1 & (L_4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + az &= 1 & (L_1) \\ (6-a)y + (2-3a)z &= -2 & (L_2) \\ (a^3 - 8)z &= a^2 - 2a + 2 & (L_3) \\ (1-a)z &= a-1 & (L_4) \end{cases}$$

– Si $a = 2$, la ligne (L_3) donne $0 = 2$ ce qui est impossible donc le système n'admet pas de solution.
– Si $a \neq 2$, on a :

$$\begin{cases} x - 2y + az &= 1 & (L_1) \\ (6-a)y + (2-3a)z &= -2 & (L_2) \\ (a^3 - 8)z &= a^2 - 2a + 2 & (L_3) \\ 0 &= a^4 - 3a^2 - 4a + 6 & (L_4) \end{cases}.$$

On en déduit aisément que l'équation (L_4) est compatible si et seulement si $a = 1$ ou $a = a_2$. Donc
. Si $a \in \mathbb{R} - \{1, a_2\}$, le système n'admet pas de solution.
. Si $a = 1$, on obtient la solution $(x, y, z) = \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}\right)$.
. Si $a = a_2$, on obtient la solution $(x, y, z) = \left(\frac{(a_2 - 2)(a_2 + 3)}{a_2 - 6}, \frac{3a_2}{a_2 - 6}, -1\right)$.

(h) On a $\det \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} = a^4 - 6a^2 + 8a - 3 = (a+3)(a-1)^3$ donc $rg(A) = 4 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} - \{-3, 1\}$. On en déduit les cas suivants :

– Si $a \in \mathbb{R} - \{-3, 1\}$, $rg(A) = rg([A|b]) = 4$, le système admet dans ce cas une solution unique.
– Si $a = 1$, $(rg(A) = 1) \neq (rg([A|b]) = 2)$ et le système n'admet pas de solution.
– Si $a = -3$, $(rg(A) = 3 = rg([A|b]) < 4$ et le système admet une infinité de solutions.
Le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rcll} ax+y+z+t & = & 1 & (L_1) \leftarrow (L_4) \\ x+ay+z+t & = & -1 & (L_2) \leftarrow (L_3) \\ x+y+az+t & = & 1 & (L_3) \leftarrow (L_2) \\ x+y+z+at & = & -1 & (L_4) \leftarrow (L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+y+z+at & = & -1 & (L_1) \leftarrow (L_1) \\ x+y+az+t & = & 1 & (L_2) \leftarrow (L_2)-(L_1) \\ x+ay+z+t & = & -1 & (L_3) \leftarrow (L_3)-(L_1) \\ ax+y+z+t & = & 1 & (L_4) \leftarrow (L_4)-a(L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+y+z+at & = & -1 & (L_1) \\ (a-1)z+(1-a)t & = & 2 & (L_2) \leftarrow (L_4) \\ (a-1)y+(1-a)t & = & 0 & (L_3) \\ (1-a)y+(1-a)z+(1-a^2)t & = & 1+a & (L_4) \leftarrow (L_2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+y+z+at & = & -1 & (L_1) \\ (1-a)y+(1-a)z+(1-a^2)t & = & 1+a & (L_2) \\ (a-1)y+(1-a)t & = & 0 & (L_3) \leftarrow (L_3)+(L_2) \\ (a-1)z+(1-a)t & = & 2 & (L_4) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+y+z+at & = & -1 & (L_1) \\ (1-a)y+(1-a)z+(1-a^2)t & = & 1+a & (L_2) \\ (1-a)z+(1-a)(2+a)t & = & 1+a & (L_3) \\ (a-1)z+(1-a)t & = & 2 & (L_4) \leftarrow (L_4)+(L_3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+y+z+at & = & -1 & (L_1) \\ (1-a)y+(1-a)z+(1-a^2)t & = & 1+a & (L_2) \\ (1-a)z+(1-a)(2+a)t & = & 1+a & (L_3) \\ (1-a)(3+a)t & = & 3+a & (L_4) \end{array}\right.$$

– Si $a \in \mathbb{R} - \{1, -3\}$, le système admet une unique solution donnée par :

$$(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{a-1}, -\frac{1}{a-1}, \frac{1}{a-1}, -\frac{1}{a-1}\right).$$

– Si $a = 1$, (L_4) donne $0 = 3$ ce qui signifie que le système n'admet pas de solution.
– Si $a = -3$, le système se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-3t & = & -1 \\ 4y+4z-8t & = & -2 \\ 4z-4t & = & -2 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = t - \frac{1}{2} \\ y = t \\ z = t - \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

et admet donc une infinité de solutions qui s'écrivent sous la forme :

$$(x, y, z, t) = \left(t - \frac{1}{2}, t, t - \frac{1}{2}, t\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0\right) + t\,(1, 1, 1, 1).$$

Exercice 43

(a) On a $rg(A) = 2$. De plus,

- $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & a \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = b + a - 3,$
- $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & a \\ 4 & -1 & b \end{vmatrix} = -b - a + 3,$
- $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & a \\ 1 & -1 & b \end{vmatrix} = 0.$

Donc $rg([A|b]) = 2$ si et seulement si $a + b = 3$ et $rg([A|b]) = 3$ sinon. Conclusion,
– Si $a + b = 3$, $rg(A) = rg([A|b]) = 2 < 3$ et dans ce cas, il y a une infinité de solutions.
– Si $a + b \neq 3$, $rg(A) \neq rg([A|b])$ et le système n'admet pas de solution.
Le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 3x+y-z & = & 1 & (L_1) \\ 5x+2y-2z & = & a & (L_2) \leftarrow 3(L_2)-5(L_1) \\ 4x+y-z & = & b & (L_3) \leftarrow 3(L_2)-4(L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 3x+y-z & = & 1 & (L_1) \\ y-z & = & 3a-5 & (L_2) \\ -y+z & = & 3b-4 & (L_3) \leftarrow (L_3)+(L_2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 3x+y-z & = & 1 & (L_1) \\ y-z & = & 3a-5 & (L_2) \\ 0 & = & 3(a+b-3) & (L_3) \leftarrow (L_3)+(L_2) \end{array}\right.$$

– Si $a+b\neq 3$, l'équation (L_3) est incompatible donc le système n'admet aucune solution.
– Si $a+b=3$, le système se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 3x+y-z &=& 1 & (L_1)\\ y-z &=& 3a-5 & (L_2)\\ 0 &=& 0 & (L_3)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-a+2\\ y=z+3a-5\\ z\in\mathbb{R}\end{array}\right.$$

Le système admet donc une infinité de solutions de la forme :

$$(x,y,z)=(-a+2,z+3a-5,z)=(-a+2,3a-5,0)+z(0,1,1) \text{ avec } z\in\mathbb{R}.$$

(b) Le système s'écrit de la manière suivante :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcll} ax+(b-1)y+2z &=& 1 & (L_1)\\ ax+(2b-3)y+3z &=& 1 & (L_2)\leftarrow(L_2)-(L_1)\\ ax+(b-1)y+(b+2)z &=& 2b-3 & (L_3)\leftarrow(L_3)-(L_1)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll} ax+(b-1)y+2z &=& 1 & (L_1)\\ (b-2)y+z &=& 0 & (L_2)\\ bz &=& 2b-4 & (L_3)\end{array}\right.$$

– Si $b=0$, le système n'admet pas de solution.
– Si $b\neq 0$, le système se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{rcll} ax+(b-1)y+2z &=& 1 & (L_1)\\ (b-2)y+z &=& 0 & (L_2)\\ bz &=& 2b-4 & (L_3)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} ax=-3+\frac{6}{b} & (L_1)\\ y=-\frac{2}{b} & (L_2)\\ z=2-\frac{4}{b} & (L_3)\end{array}\right. .$$

. Si $a\neq 0$, le système admet une unique solution

$$(x,y,z)=\left(\frac{3}{a}(\frac{2}{b}-1),-\frac{2}{b},2-\frac{4}{b}\right).$$

. Si $a=0$, l'équation (L_1) est incompatible, le système n'admet donc pas de solution.

(c) Le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2x+y-z &=& 2 & (L_1)\\ x-y+z &=& 4 & (L_2)\leftarrow 2(L_2)-(L_1)\\ 3x+3y-z &=& 4a & (L_3)\leftarrow 2(L_3)-3(L_1)\\ (2-a)x+2y-2z &=& -2b & (L_4)\leftarrow 2(L_4)-(2-a)L_1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll} 2x+y-z &=& 2 & (L_1)\\ -3y+3z &=& 6 & (L_2)\\ 3y+z &=& 8a-6 & (L_3)\leftarrow(L_3)+(L_2)\\ y(a+2)-z(a+2) &=& 2(a-2b-2) & (L_4)\leftarrow 3(L_4)+(a+2)(L_3)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll} 2x+y-z &=& 2 & (L_1)\\ -3y+3z &=& 6 & (L_2)\\ 4z &=& 8a & (L_3)\\ 0 &=& 12(2a-b-2) & (L_4)\end{array}\right.$$

– Si $2a-b\neq 2$, le système n'admet aucune solution.
– Si $2a-b=2$, le système admet une unique solution :

$$(x,y,z)=(2,2a-2,2a).$$

(d) On reconnaît une matrice vue dans l'exercice précédent (système (h)). Le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rcll} ax+y+z+t &=& 1 & (L_1)\leftarrow(L_4)\\ x+ay+z+t &=& b & (L_2)\leftarrow(L_3)\\ x+y+az+t &=& b^2 & (L_3)\leftarrow(L_2)\\ x+y+z+at &=& b^3 & (L_4)\leftarrow(L_1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+y+z+at &=& b^3 & (L_1)\leftarrow(L_1)\\ x+y+az+t &=& b^2 & (L_2)\leftarrow(L_2)-(L_1)\\ x+ay+z+t &=& b & (L_3)\leftarrow(L_3)-(L_1)\\ ax+y+z+t &=& 1 & (L_4)\leftarrow(L_4)-a(L_1)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll} x+y+z+at &=& b^3 & (L_1)\\ (a-1)z+(1-a)t &=& b^2(1-b) & (L_2)\leftarrow(L_4)\\ (a-1)y+(1-a)t &=& b(1-b^2) & (L_3)\\ (1-a)y+(1-a)z+(1-a^2)t &=& 1-ab^3 & (L_4)\leftarrow(L_2)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll} x+y+z+at &=& b^3 & (L_1)\\ (1-a)y+(1-a)z+(1-a^2)t &=& 1-ab^3 & (L_2)\\ (a-1)y+(1-a)t &=& b(1-b^2) & (L_3)\leftarrow(L_3)+(L_2)\\ (a-1)z+(1-a)t &=& b^2(1-b) & (L_4)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll} x+y+z+at &=& b^3 & (L_1)\\ (1-a)y+(1-a)z+(1-a^2)t &=& 1-ab^3 & (L_2)\\ (1-a)z+(1-a)(2+a)t &=& 1+b-b^3(a+1) & (L_3)\\ (a-1)z+(1-a)t &=& b^2(1-b) & (L_4)\leftarrow(L_4)+(L_3)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x+y+z+at & = & b^3 & (L_1) \\ (1-a)y+(1-a)z+(1-a^2)t & = & 1+a & (L_2) \\ (1-a)z+(1-a)(2+a)t & = & 1+b-b^3(a+1) & (L_3) \\ (1-a)(3+a)t & = & 1+b+b^2-b^3(a+2) & (L_4) \end{array} \right.$$

– Si $a \in \mathbb{R}-\{1,-3\}$, le système admet une unique solution donnée par :

$$(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} \frac{a^2-b^2+2+4a-b+2ab^3-2b^3+a^2b^3}{(3+a)(a-1)} \\ -\frac{a^2+b^2+1+3a-2b-ab+4ab^3+2b^3+a^2b^3}{(3+a)(a-1)} \\ \frac{a^2b^3+2b^2-b+3ab^3-1+b^3+ab^2}{(3+a)(a-1)} \\ \frac{-b-b^2+b^3-1}{(3+a)(a-1)} \end{pmatrix}$$

– Si $a=1$, (L_2) donne $0=1$ ce qui signifie que le système n'admet pas de solution.

– Si $a=-3$, (L_4) donne $0=1+b+b^2+b^3=(1+b)(1+b^2)$

. Si $b \neq -1$, le système n'admet pas de solution.

. Si $b=-1$, le système se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z-3t & = & -1 \\ 4y+4z-8t & = & -2 \\ 4z-4t & = & -2 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Il admet une unique solution donnée par :

$$(x,y,z,y) = \left(-\frac{1}{2}+t, t, -\frac{1}{2}+t, t\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0\right) + t\,(1,1,1,1).$$

Exercice 44

1. Réponses (b) et (c).
2. Réponses (d) et (e).
3. Réponses (a) et (c).
4. Réponses (b) et (d).
5. Réponses (c) et (e).
6. Réponses (a) et (e).
7. Réponses (a) et (d).
8. Réponses (b) et (c).
9. Réponses (a) et (b).
10. Réponses (b) et (e).

Exercice 45

1. Il suffit de réarranger les lignes :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcll} ay+az & = & ab & (L_1) \leftarrow (L_2) \\ bz & = & a & (L_2) \leftarrow (L_3) \\ x+y+z & = & 1 & (L_3) \leftarrow (L_1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x+y+z & = & 1 & (L_1) \\ ay+az & = & ab & (L_2) \\ bz & = & a & (L_3) \end{array} \right.$$

– Si $b=a=0$, le rang de (S) est égal à 1.

– Si $a=0$ et $b \neq 0$, le rang de (S) est égal à 2.

– Si $a \neq 0$ et $b=0$, le rang de (S) est égal à 2.

– Si $a,b \in \mathbb{R}^\star$, le rang de (S) est égal à 3.

2. Dans ce cas, comme $rg(A)=3$, on a $rg([A|b])=3$ et (S) admet une unique solution :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x+y+z & = & 1 & (L_1) \leftarrow (L_1) - \frac{1}{b}(L_3) \\ ay+az & = & ab & (L_2) \leftarrow (L_2) - \frac{a}{b}(L_3) \\ bz & = & a & (L_3) \leftarrow \frac{1}{b}(L_3) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x+y & = & 1-\frac{a}{b} & (L_1) \leftarrow (L_1) - \frac{1}{a}(L_2) \\ ay & = & ab-\frac{a^2}{b} & (L_2) \leftarrow \frac{1}{a}(L_2) \\ z & = & \frac{a}{b} & \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1-b-\frac{2a}{b} \\ y & = & b-\frac{a}{b} \\ z & = & \frac{a}{b} \end{array} \right. .$$

3. Si $a=0$ (et $b \neq 0$), le système (S) admet une infinité de solutions $((rg(A)=2) \neq (rg([A|b])=3)$. On a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ 0 & = & 0 \\ bz & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y \in \mathbb{R} \\ z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1-y \\ y \in \mathbb{R} \\ z=0 \end{array} \right. .$$

Par conséquent, $(x,y,z)=(1-y,y,0)=(1,0,0)+y(-1,1,0)$ avec $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 46 On obtient par la méthode de Cramer :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&-1&2\\-1&1&0\\1&2&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&1&0\\3&2&0\end{vmatrix}}=\frac{-6}{2}=-3,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&2&2\\2&-1&0\\3&1&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&1&0\\3&2&0\end{vmatrix}}=\frac{10}{2}=5,\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&1&-1\\3&2&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&1&0\\3&2&0\end{vmatrix}}=\frac{10}{2}=5.$$

Exercice 47

1. On trouve à l'aide des deux méthodes $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.
2. On a $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{7}{2}\\\frac{8}{2}\end{pmatrix}$.

Exercice 48

1. On a le système

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcl}0,9x+0,9y+z&=&435,6\\0,8x+y+0,9z&=&422,4\\x+0,9y+0,8z&=&421,3\end{array}\right.$$

2. On utilise la méthode du pivot de Gauss en multipliant au préalable chacune des lignes du système par 10 :

$$(S)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}9x+9y+10z&=&4356&(L_1)\\8x+10y+9z&=&4224&(L_2)\quad\leftarrow\quad 9(L_2)-8(L_1)\\10x+9y+8z&=&4213&(L_3)\quad\leftarrow\quad 9(L_3)-10(L_1)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}9x+9y+10z&=&4356&(L_1)\\18y+z&=&3168&(L_2)\\-9y-28z&=&-5643&(L_3)\quad\leftarrow\quad 2(L_3)+(L_2)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}9x+9y+10z&=&4356&(L_1)\\18y+z&=&3168&(L_2)\\-55z&=&-8118&(L_3)\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x&=&152,2\\y&=&167,8\\z&=&147,6\end{array}\right.$$

Exercice 49

1. F est une primitive de f (sur $]-1;+\infty[$) si et seulement si $F'=f$. Comme

$$F'(x)=a\ln x+ax\frac{1}{x}+b\frac{1}{x-1}+c\frac{1}{x+1}=a\ln x+a+\frac{b(x+1)+c(x-1)}{(x-1)(x+1)}=a\ln x+\frac{(b+c)x+(b-c)}{x^2-1}+a,$$

on obtient par identification avec $f(x)$, le système

$$\left\{\begin{array}{rcl}a&=&-2\\b+c&=&0\\b-c&=&2\\a&=&-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}a&=&-2\\b&=&1\\c&=&-1\end{array}\right..$$

Finalement, F est une primitive de f (sur $]-1;+\infty[$) si et seulement si $F(x)=-2x\ln x+\ln(x-1)-\ln(x+1)$.

2. $\int_2^3\left(-2\ln x+\frac{2}{x^2-1}-2\right)dx=[F(x)]_2^3=[-2x\ln x+\ln(x-1)-\ln(x+1)]_2^3=(-6\ln 3+\ln 2-\ln 4)-(-4\ln 2+\ln 1-\ln 3)=-5\ln 3+5\ln 2-\ln 4=-5\ln 3+5\ln 2-\ln 2^2=-5\ln 3+5\ln 2-2\ln 2=-5\ln 3+3\ln 2.$

Exercice 50

1. On a le système

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcl}3x+2y&=&18\\x+2y+z&=&9\\2x+y+z&=&10\end{array}\right.$$

2. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 3x+2y & = & 18 & (L_1) \\ x+2y+z & = & 9 & (L_2) \quad \leftarrow \quad 3(L_2)-(L_1) \\ 2x+y+z & = & 10 & (L_3) \quad \leftarrow \quad 3(L_3)-2(L_1) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 3x+2y & = & 18 & (L_1) \\ 4y+3z & = & 9 & (L_2) \\ -y+3z & = & -6 & (L_3) \quad \leftarrow \quad 4(L_3)+(L_2) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 3x+2y & = & 18 & (L_1) \\ 4y+3z & = & 9 & (L_2) \\ 15z & = & -15 & (L_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4 \\ y & = & 3 \\ z & = & -1 \end{array}\right.$$

3. Il ne peut exister de programme de fabrication qui épuise exactement le stock de facteurs disponibles puisqu'il faudrait produire -1 quantité de produit C. Le système (S) admet bien une solution mathématique mais non interprétable au sens économique.

Exercice 51

1. Afin de répondre à cette question, nous devons résoudre le système linéaire suivant

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcll} x+2y+4z & = & 2000 & (L_1) \\ 1,5x+1,5y+4,5z & = & 2400 & (L_2) \\ 1,5x+2,5y+1,5z & = & 2400 & (L_3) \end{array}\right.$$

traduisant le problème. Vérifions dans un premier temps que le système est inversible, c'est-à-dire qu'il admet une unique solution. On calcule pour cela le déterminant du système :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1,5 & 1,5 & 4,5 \\ 1,5 & 2,5 & 1,5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Le déterminant est non nul, le système est inversible, il admet une unique solution. On peut maintenant utiliser la méthode du pivot de Gauss en multipliant au préalable les lignes (L_2) et (L_3) du système par 2. Ainsi,

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+2y+4z & = & 2000 & (L_1) \\ 3x+3y+9z & = & 4800 & (L_2) \quad \leftarrow \quad (L_2)-3(L_1) \\ 3x+5y+3z & = & 4800 & (L_3) \quad \leftarrow \quad (L_3)-3(L_1) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+2y+4z & = & 2000 & (L_1) \\ -3y-3z & = & -1200 & (L_2) \\ -y-9z & = & -1200 & (L_3) \quad \leftarrow \quad 3(L_3)-(L_2) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+2y+4z & = & 2000 & (L_1) \\ -3y-3z & = & -1200 & (L_2) \\ -24z & = & -2400 & (L_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x & = & 1000 & (L_1) \\ y & = & 300 & (L_2) \\ z & = & 100 & (L_3) \end{array}\right.$$

Il existe donc bien un programme de fabrication utilisant à plein les capacités de chaque atelier et générant 1000 lots de pièces A, 300 lots de pièces B et 100 lots de pièces C.

2. (a) On souhaite déterminer le bénéfice réalisé lors de la vente de 800 pièces de A, 200 pièces de B et 200 pièces de B, c'est-à-dire de 80 lots de pièces A, 20 lots de pièces B et 20 lots de pièces C, sachant qu'un lot est constitué de 10 pièces. Le bénéfice est obtenu en soustrayant aux revenus les coûts de fabrication. On a donc

$$\begin{array}{rcl} B(80,20,20) & = & 80\times[335-(1\times 60+1,5\times 80+1,5\times 50)] \\ & & +\ 20\times(515-[2\times 60+1,5\times 80+2,5\times 50]) \\ & & +\ 20\times[925-(4\times 60+4,5\times 80+1,5\times 50)] \\ & = & 14400 \end{array}.$$

(b) Pour le programme trouvé au 1., on trouve

$$\begin{array}{rcl} B(1000,300,100) & = & 1000\times[335-(1\times 60+1,5\times 80+1,5\times 50)] \\ & & +\ 300\times(515-[2\times 60+1,5\times 80+2,5\times 50]) \\ & & +\ 100\times[925-(4\times 60+4,5\times 80+1,5\times 50)] \\ & = & 150000 \end{array}.$$

Exercice 52

1. On a le système

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcl} 10x+4y+10z & = & a \\ 2x+y+2z & = & p \\ 10x+6y+12z & = & t \end{array}\right.$$

2. On remplace a par 4200, p par 800 et t par 5000 dans (S). Vérifions que le système est inversible :

$$\begin{vmatrix} 10 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 10 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Le déterminant est non nul, le système est inversible, il admet une unique solution. On peut maintenant utiliser la méthode du pivot de Gauss pour résoudre (S).

$$\left\{\begin{array}{rcll} 10x+4y+10z & = & 4200 & (L_1) \\ 2x+y+2z & = & 800 & (L_2) \quad \leftarrow \quad 5(L_2)-(L_1) \\ 10x+6y+12z & = & 5000 & (L_3) \quad \leftarrow \quad (L_3)-(L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 10x+4y+10z & = & 4200 & (L_1) \\ y & = & -200 & (L_2) \quad \leftarrow \quad (L_3) \\ 2y+2z & = & 800 & (L_3) \quad \leftarrow \quad (L_2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 10x+10z+4y & = & 4200 & (L_1) \\ 2z+2y & = & 800 & (L_2) \\ y & = & -200 & (L_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -100 \\ z & = & 600 \\ y & = & -200 \end{array}\right.$$

Par conséquent, il n'existe pas de production permettant d'utiliser exactement 4200 kg d'acier, 800 kg de peinture et 5000 heures de travail. Le système admet bien une solution numérique mais elle n'est pas interprétable économiquement.